

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Consultas: pyanez@dim.uchile.cl



Teorema del valor inter-miedo

09 de Agosto de 2019

Recuerdo:

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \rightarrow \ell \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weierstrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$
- **Caracterización $\varepsilon - \delta$**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\}$$
- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ con $g(\bar{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.
- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$
- **[Teorema de Weierstrass]**
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ es continua.
- **[Continuidad Uniforme]**
Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\bar{x}$ que puedo estudiar.
- Toda función uniformemente continua es continua.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\bar{x} \in A$

P1. [CONTROL]

Considere una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\bar{x}$ y que satisface

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

- a) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \bar{x}$
- b) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\bar{x}$

P2. Definimos la función en $\mathbb{R}$.

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- a) Verifique que $\tanh$ es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- b) Pruebe que si $n \rightarrow \infty$, entonces $\tanh(n) \rightarrow 1$ y que $\tanh(-n) \rightarrow -1$.
- c) Usando el T.V.I. demuestre que $\forall y \in (-1, 1), \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Ind: analice $y > 0, y = 0, y < 0$
- d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$

P3. [Continuidad Uniforme]

- a) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}$ una función. Demuestre que los siguientes puntos son equivalentes
 - 1) f es uniformemente continua en A
 - 2) $\forall (x_n), (y_n) \subseteq A, |x_n - y_n| \rightarrow 0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$
Note que (x_n) o (y_n) no necesariamente convergen.
- b) Use el resultado de la parte anterior para demostrar que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.
- c) Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de las siguientes funciones:
 - 1) $x \sin(1/x)$
 - 2) $f(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$

Propuestos

P4. Demuestre que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura. **Ind:** Sea $T(\alpha)$ la temperatura en función del ángulo en radianes. Considere la función auxiliar $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$.

P5. (★) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y periódica, de periodo $p > 0$. Pruebe que f es uniformemente continua.

- a) Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que f es continua. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir

$$\exists \bar{x} \in [0, 1], f(\bar{x}) = \bar{x}$$

- b) Demuestre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$

P6. (★) [Álgebra de funciones uniformemente continuas] Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continuas, demuestre que

- a) $f + g$ y λf con $\lambda \in \mathbb{R}$ también lo son.
- b) Demuestre que la función x^2 **no** es uniformemente continua.
- c) Demuestre que no necesariamente $f \cdot g$ será uniformemente continua.
- d) Suponga ahora que $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ es continua uniforme y $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ continua uniforme, con $g(S) \subseteq T$. Pruebe que $f \circ g$ es uniformemente continua.