

P11

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(n!)!}$; bajo la función $\varphi(n) = n!$
 $\downarrow$
 creciente
 por def

lo anterior es una sub sucesión de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{k!} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Teo 1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(n!)!} \rightarrow 0$ //

Por que $\frac{3^k}{k!} \rightarrow 0$?

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot k}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k-3 \text{ veces}}$

$$0 \leq \frac{3^k}{k!} \leq \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3}^{k \text{ veces}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1) \cdot k} \leq \frac{3^k}{1 \cdot 2 \cdot 3^{k-3} \cdot k} = \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot k}$$

Luego tomo $\lim_{k \rightarrow \infty}$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{k!} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot k} = 0$$

Por Teorema del sandwich germamos!

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n)^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[k]{k} = k^{\frac{1}{k}}$$

$$f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

↑ Por criterio de
cocientes! $\frac{\sqrt[k+1]{k+1}}{\sqrt[k]{k}} > 1$
TARGET!

Como por IC $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ Creciente
Estático

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n)^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

lo importante 2^n creciente estático

$$2 = \frac{2^{n+1}}{2^n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} //$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{\frac{4n^2}{3n^2+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{\frac{4n^2 \cdot \frac{3n^2+2}{3n^2+2}}{3n^2+2}}$$

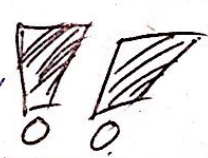
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{\frac{4n^2}{3n^2+2}} \right] = e^{2 \cdot \frac{4}{3}} = e^{\frac{8}{3}}$$

Por que? Podemos ver esta sucesión como composición de subsecuencias, en efecto será del tipo $\left(1 + \frac{2}{k} \right)^k$, $k \in \mathbb{N}$, vía la función

$f(n) = 3n^2+2$, la cual es creciente!

Entonces es una subsecuencia de $\left(1 + \frac{2}{k} \right)^k$, luego

Por teorema 4.1 (Si $S_n \rightarrow l \Leftrightarrow (S_{n_k})_k \rightarrow l$)

Entonces $\left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{\frac{4n^2}{3n^2+2}} \rightarrow e^2 \Leftrightarrow$ def exp. 

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{3n^2+2} \rightarrow \frac{4}{3}$, como ambas convergen

Puedo decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+2} \right)^{\frac{4n^2}{3n^2+2}} = (e^2)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{8}{3}}$

P21
 a) Para esta pregunta usaremos la siguiente proposición
 mayor al teorema de las subsucesiones

* Una sucesión $(x_n)_n$ diverge si:

1) $\nexists$ subsucesión $(x_{p(m)})_m$ divergente

ó
 2) $\exists$ 2 subsucesiones $(x_{p_1(m)})_m, (x_{p_2(m)})_m$
 que convergen a distintos valores,

$$x_{p_1(m)} \rightarrow x_1, x_{p_2(m)} \rightarrow x_2 \wedge x_1 \neq x_2$$

Para

a) Basta $p(m) = 2m + 1$, luego como
 es creciente ~~luego~~ $u_m = \sin\left(\frac{m}{2}\pi\right) \rightarrow (-1)^m$ diverge.
 Por I.C.

b) $u_{2m} = \left[(-1)\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right]^{2m} \rightarrow e^{-1}$
 $u_{2m+1} = \left[(-1)\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\right]^{2m+1} \rightarrow -e^{-1}$ } por criterio 2
 diverge! //

P31
Una función es continua en un punto dado cuando sus límites laterales, son iguales

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por álgebra y composición de funciones continuas será continua en su dominio, a excepción de $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)^2 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} \beta = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)^2$$

Transitividad.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \beta = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)^2$$

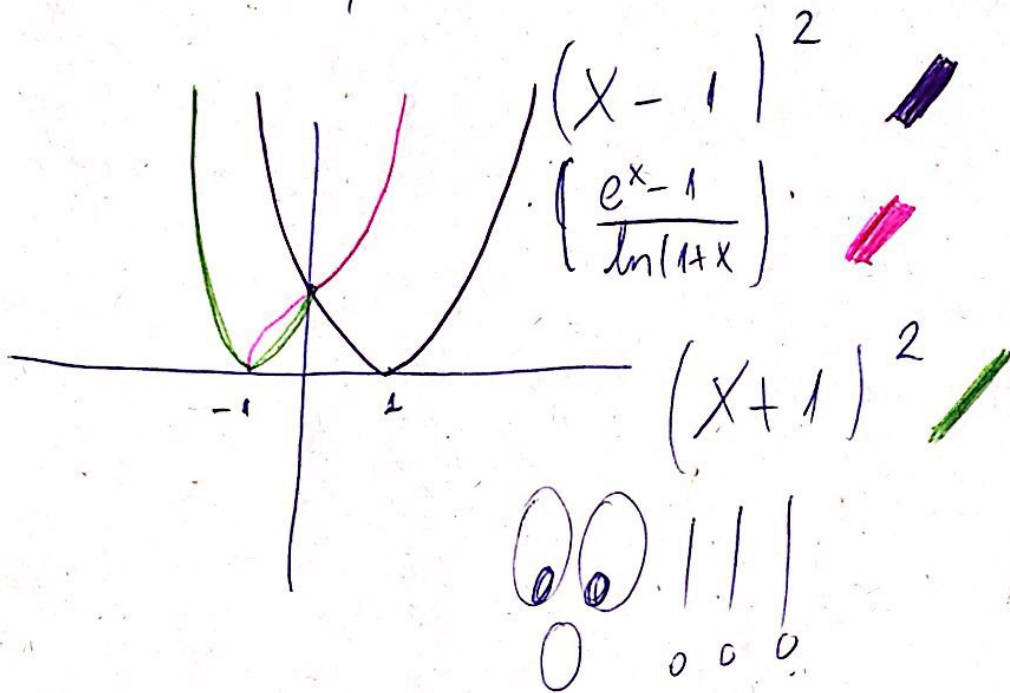
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si: teo mplazo} \\ \frac{e^0 - 1}{\ln(1+0)} = \frac{0}{0} \quad \text{L'Hopital!} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{1+x}} = \frac{e^0}{\frac{1}{1}} = 1 // = \lim_{x \rightarrow 0} \beta = \beta \Rightarrow \beta = 1 //$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)^2 = \beta = \lim_{x \rightarrow 0} \beta$$

$$(-2)^2 = \beta = 1 \quad (\text{Parte anterior})$$

$$x^2 = 1, \Rightarrow x = \pm 1$$



Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos, $\exists L \geq 0$
p4) $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in A$

PDQ f es continua en A .

¿Qué es ser continua?

Brutalmente $x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

me sirve dicha caracterización?

No ☹️

Entonces debo recordar algo equivalente a continuidad que me sea más útil.

Caracterización vía ϵ - δ , en efecto esto me será más útil, y esto se tiene por su calidad de entregarme de señales.

• Usando sea $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ y ganamos!

/ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Entonces tomamos nuestra hipótesis:

1) $\exists L \geq 0 / |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, donde vemos 2

casos, $L = 0 \wedge L \neq 0$.

1) $L = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| = 0, \forall x, y \in A$, donde
 $|f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y), \forall x, y \in A$

1

luego la función es constante para cualquier elemento de su dominio, En particular toda función constante es continua.

• El otro caso. $L \neq 0$

defino $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, Para que? veamos mi hipótesis de continuidad.

$$\text{dado } \underbrace{|x - y| < \delta}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(y)| < \epsilon}_{\text{Tesis}}$$

Comienzo de la hipótesis

$$|x - y| < \delta = \frac{\epsilon}{L} \Rightarrow |x - y| < \frac{\epsilon}{L}, \text{ hacemos}$$

en mi dato de L .

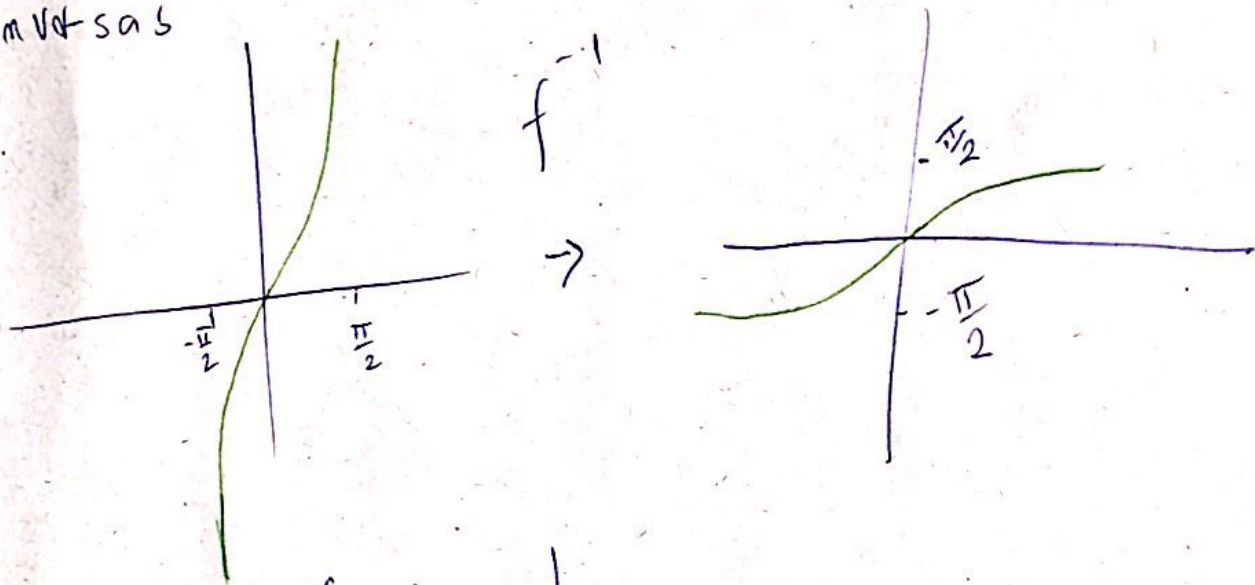
$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - f(y)| &\leq L|x - y| \\ &\leq L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon \end{aligned}$$

$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \therefore \text{Es continua por definición}$

PS

$$S_m = \arctg (m! \cdot e^m \cdot \cos(m^2))$$

recomendamos conceptos, biyectividad y acotamiento, que es $\arctg$? inversa $\rightarrow$ existe? bajo que condición; como se ven gráficamente las inversas



$$\forall x \in \text{dom}(\arctg(x))$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arctg(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$X = m! \cdot e^m \cdot \cos(m^2), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arctg(m! \cdot e^m \cdot \cos(m^2)) = S_m \leq \frac{\pi}{2}$$

Notemos algo $\forall m \in \mathbb{N}$ existirá el término donde sea biyectiva.

Por lo tanto como la sucesión (S_m) es acotada

$\Rightarrow \exists$ una sub sucesión convergente, por T.B.-W.

Ya terminamos !

Cualquier duda a pyanez@din.uchile.cl