Diseño de Mecanismos y Licitaciones Profesor: Juan Escobar

Primavera 2018

Tarea 1

Entrega: lunes 23 de septiembre a las 11hrs con Olga Barrera

1. Dos participantes en una licitación tienen valoraciones privadas $v_i \in [0, 1]$ distribuidas uniforme e independientemente. Los participantes son aversos al riesgo. Si el participante i obtiene el bien pagando p_i, su utilidad es
$$u_i(v_i, p_i) = \sqrt{v_i - p_i}$$
mientras que si no obtiene el bien su utilidad es 0. Los participantes maximizan su utilidad esperada. En lo que sigue, suponga que los equilibrios son simétricos y diferenciables

   a. Calcule los equilibrios Bayesianos en una licitación segundo precio y en una primer precio.
   b. Compare los ingresos esperados para el licitador usando las licitaciones en a.
   c. Contradice su resultado el RET? Explique.
   d. Tiene sentido poner precios mínimos para aumentar el ingreso esperado del licitador? Explique.

2. Bundling. Este ejercicio explore la decisión de empaquetar o no productos. Considere un vendedor que posee dos bienes distintos. Hay $N = 2$ compradores. La valoración de cada comprador i por el bien j es $v_{i,j}$. Si el comprador i obtiene ambos bienes, su utilidad es $v_{i,1} + v_{i,2}$. Las valoraciones son información privada de cada comprador, $v_{i,j}$ es uniforme en [0,1] (independdiente de cualquier otra valoración).

   a. Suponga que el vendedor organiza dos licitaciones independientes. Calcule su ingreso esperado.
   b. Suponga que el vendedor empaqueta los productos. Calcule su ingreso esperado. Es el resultado eficiente? Compare los ingresos del vendedor y la eficiencia de la licitación de un paquete y las licitaciones separadas.
   c. Repita a y b suponiendo que $N \geq 3$ participantes. Muestre que el vendedor siempre prefiere vender separadamente.

3. En este problema consideramos el diseño de reglas de transacción bajo restricciones presupuestarias. Muchos compradores (firmas, hogares) enfrentan restricciones de endeudamiento, por lo que es importante entender el impacto de estas resticciones en el diseo de mecanismos. En particular, en este ejercicio mostraremos que un vendedor que enfrenta compradores con restricciones presupuestarias debiese vender el bien de manera dinámica.

   Un vendedor enfrenta a un continuo de consumidores que valoran el bien en $v = 1$. El vendedor no tiene valoración por el bien. Los consumidores tienen restricciones presupuestarias $w \in [0, 1]$ que son su información privada. Desde la perspectiva del vendedor, w se distribuye uniforme en $[0, 1]$. Nos restringimos a mecanismos dinámicos, en los que el momento en que el bien se traspasa coincide con el pago. De este modo, si $x \in \{0, 1\}$ es la decisión de asignar o no el bien, la transacción ocurre en el periodo $T \in \Re$, y el pago es p, la utilidad del agente es
$$u(x, T, p) = e^{-rT}(x - p)$$
   donde r es la tasa de interés. Un mecanismo (directo) transforma reportes w' en $x(w')$, $T(w')$, y $p(w')$. Un mecanismo satisface la restricción presupuestaria si $p(w) \leq w$ para todo w. Un mecanismo satisface la restricción de incentivos si
$$w \in \arg \max_{w' st. p(w') \leq w} u(x(w'), T(w'), p(w')) \ \forall w.$$
   Un mecanismo es individualmente racional si $u(x(w), T(w)), p(w) \geq 0$.

a. Suponga que nos restringimos a mecanismos estáticos, es decir, mecanismos tales que $T \equiv 0$. Muestre que el mecanismo estático óptimo fija un precio de reserva $r = 1/2$. Es la curva de demanda la manera de medir el excedente social? Ilustra su respuesta gráficamente.

   En lo que sigue, nos interesa encontrar el mejor mecanismo para el vendedor sujeto a las restricciones de incentivos, participación, y presupuestaria.

b. Muestre que el mecanismo satisface la restricción de incentivos ssi $w \mapsto u(x(w), T(w), p(w))$ es no-decreciente.

c. En lo que sigue, sea $U(w)$ la utilidad que obtiene el tipo con presupuesto w. Muestre que el mecanismo satisface la restricción presupuestaria ssi $x(w) - w \leq U(w)e^{rT(w)}$.

d. Deduzca que el problema reduce a

$$\max_{T,U,x} \int \Big(x(w)e^{-rT(w)} - U(w)\Big)dw$$

   subjet to

$$x(w) - w \leq U(w)e^{rT(w)} \tag{0.0.1}$$

$$\frac{\partial U(w)}{\partial w} \geq 0$$

$$T(w) \geq 0$$

$$U(0) \geq 0.$$

e. Argumente que en el óptimo, si $T(w) > 0$ y $x(w) = 1$, entonces (0.0.1) es activa.

f. Sea $\bar{w} = \max\{w \mid T(w) > 0\}$. Reformule el problema como

$$\max_{\bar{w}\in[0,1],T\colon [0,\bar{w}]\to\Re_+} \int_0^{\bar{w}} (e^{-rT(w)}w)f(w)dw + \int_{\bar{w}}^1 \bar{w}f(w)dw$$

   subject to

$$T'(w) \leq \frac{-1}{r}\frac{1}{1-w} \quad w \in [0, \bar{w}]$$

   and

$$T(\bar{w}) = 0.$$

g. Deduzca el siguiente resultado:

   In the optimal mechanism, types $w > \bar{w} = 1 - 1/e$ trade at $T(w) = 0$ and pay $p(w) = \bar{w}$. All types $w < \bar{w}$ trade dynamically with $T(w) > 0$, pay $p(w) = w$, and get surplus strictly lower than $1 - w$. Trade is exhausted in finite time.

h. Explique intuitivamente porqué el vendedor no se beneficia de hacer transacciones dinámicas con valoraciones privadas, pero sí lo hace con presupuestos privados.

i. Discuta las implicancias que el modelo tiene para las estrategias de precios usadas por firmas en el sector retail.