INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesores: F. Subiadre, D. Sauré
Auxiliares: P. Galaz, S. Grass, D. Iriarte,
N. Toro, N. Trigo

Auxiliar #10

Preparación C2

Problema 1

Boris trabaja envolviendo regalos en una tienda en una estación de buses, donde observa que pasajeros llegan de acuedo a un proceso de Poisson de tasa λ. Cada vez que llega un pasajero, el chofer del siguiente bus por salir (siempre hay un bus listo para salir) decide partir con los pasajeros actualmente en el bus (incluyendo al que acaba de llegar) con probabilidad p.

a) Suponiendo que los buses tienen capacidad infinita, modele el número de pasajeros esperando salir como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Boris ahora decide concentrarse en su trabajo. Cuando está desocupado, conjuntos de paquetes llegan para ser envueltos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda' = \lambda(1-p)$. El número de paquetes incluidos en cada conjunto es una variable aleatoria X cuya distribución es tal que

$$P[X = i] = p^{i-1}(1-p), \quad i \geq 1.$$

Boris demora un tiempo exponencial de media λ en envolver un paquete. Una vez envuelto un paquete, este es retirado inmediatamente de la tienda por un cliente.

b) Modele el número de paquetes esperando ser envueltos como una cadena de Markov en tiempo continuo.

Boris, experto en cadenas de Markov, tras mucho tiempo ha notado que la fracción de tiempo π_i en que hay i personas esperando partir coincide con la fracción de tiempo en que a él le quedan i paquetes por empaquetar, cuyo valor es

$$\pi_i = p^i(1-p).$$

c) Pruebe que Boris está en lo correcto. **Hint:** ¿Cómo se relacionan los procesos de las partes a) y b)?

Problema 2

Pasajeros llegan a un paradero de buses de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ, mientras que los buses llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ. Cada bus tiene capacidad para llevar C personas, y partirá inmediatamente una vez que esté lleno. La subida de pasajeros a los buses es instantánea y tanto los buses como los pasajeros forman una fila para subir al bus/tomar pasajeros.

a) Suponga que el paradero se encuentra completamente vacío: no hay pasajeros ni buses. ¿Cuál es la probabilidad de que no queden más de n pasajeros en el paradero tras la salida del siguiente vehículo?

b) Si en el paradero hay $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no ha llegado ningún bus, ¿cuánto es el tiempo esperado hasta que salga el siguiente bus?

c) Suponga que en $t=0$ había $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no había llegado ningún bus. Posteriormente, llegaron exactamente un pasajero y un bus antes del instante T. En esperanza, ¿en qué momento el bus abandonó la parada?

d) Considere ahora que la tasa de llegada de pasajeros no es conocida, pero que a priori se estima que $\lambda \sim exp(\alpha)$. Si hay $C-1$ pasajeros y un bus en la parada, ¿cuál es la probabilidad que, a partir de este momento, el bus demore menos de t en salir?

Problema 3 - Propuesto

Un par de amigos atienden una tienda de abarrotes mientras ven futbol. Cada vez que ingresa un cliente a la tienda cuando esta se encuentra vacía, los amigos tiran una moneda para decidir quién se acerca a atender a los clientes. El amigo a cargo de la atención no regresa a ver el partido sino hasta que la tienda nuevamente se desocupa de clientes. Los clientes por su lado ingresan de acuerdo a un proceso de poisson de tasa λ. Cada amigo atiende a los clientes a su propio ritmo; mientras un amigo demora un tiempo exponencial de tasa μ_1 en atender a un cliente, el otro demora un tiempo exponencial de tasa μ_2. Adicionalmente, la tienda tiene espacio para tan solo N clientes. Los clientes no ingresan si la tienda esta llena.

1. Modele la situación como una cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Calcule las probabilidades estacionarias.
3. En función de las probabilidades estacionarias, calcule la proporción de tiempo (en el largo plazo) que ambos amigos se encuentran viendo futbol juntos y el número de clientes (por unidad de tiempo) que no ingresan a la tienda.
4. Suponga ahora que los amigos toman turnos para atender a la gente. Al igual que antes, el cambio de turno ocurre cuando la tienda se vacía, pero ya no lanzan una moneda si no que es el turno del amigo que no atendió la vez pasada de hacerlo. ¡¿Cómo cambiaría su modelo en la parte (a)?

1. Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Bajo qué condiciones existe estado estacionario?
2. Plantee las ecuaciones para despejar las probabilidades estacionarias.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, ¿qué fracción del tiempo se encuentra atendiendo el kiosco el i-ésimo amigo?