IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesores: F. Subiabre, D. Sauré
Auxiliares: P. Galaz, S. Grass, D. Iriarte,
N. Toro, N. Trigo

Pauta Control 1 - Recuperativo

Problema 1

Considere el problema de un consumidor que visita periódicamente una tienda de "fast-fashion." Durante los T períodos que dura la temporada, la tienda presenta distintos productos: en el periodo t se presenta un conjunto de productos S_t. (Asuma que $S_t \cap S_s = \emptyset$ si $t \neq s$.)

El consumidor visita la tienda todos los periodos, pudiendo comprar uno o más productos en cada visita. Sin embargo, la utilidad, al final de la temporada, asociada a comprar un conjunto de productos S esta dada por

$$U(S) = \max_{i \in S} U_i - \sum_{i \in S} p_i,$$

donde p_i es el precio de venta del producto i, y U_i representa la utilidad asociada al producto i, la cual es a priori una variable aleatoria, pero que es observada por el consumidor cuando visita la tienda y el producto se encuentra disponible. Suponga que $P(U_i = k) = q_{i,k}$, para $k < K$, donde $\{q_{i,k}\}$ es tal que

$$\sum_{k=1}^{K} q_{i,k} = 1, \quad \forall\, i.$$

a) **(3.0 pts.)** Considere el caso $T = 3$, $S_t = \{t\}$, $q_{t,k} = 0{,}25$, para $k \leq 4$, $p_t = (4 - t)/2$, y resuelva el problema utilizando árboles de decisión.

b) **(3.0 pts.)** Construya un modelo de programación dinámica para el problema general.

Solución.

- Períodos: los períodos de la temporada, $t = 1, \ldots, T$.
- Decisión: $A_t \subseteq S_t$, el conjunto de productos a comprar en el período t.
- Incertidumbre: $W_t = \{W_i, i \in S_{t+1}\}$, utilidad de los productos ofrecidos en el período $t+1$.
- Estado:
  - $U_t = \{U_i, i \in S_t\}$, utilidad de los productos ofrecidos en el período t.
  - $\hat{U}_t$, la máxima utilidad entre los productos comprados antes del período t.
- Recurrencia: $U_{t+1} = W_t$, y

$$\hat{U}_{t+1} = \max\{\hat{U}_t, \max\{U_i, i \in A_t\}\}.$$

- Bellman:
$$V_t(U_t, \hat{U}_t) = \max_{A_t \subseteq S_t} \left\{ - \sum_{i \in A_t} p_i + E\left(V_{t+1}(W_t, \hat{U}_{t+1}) \right) \right\},$$
con condición de borde $\hat{U}_0 = 0$ y $V_{T+1}(\hat{U}_{t+1}) = \hat{U}_{T+1}$.

Problema 2

Considere el comportamiento de un turista que desea conocer el metro de Santiago. Partiendo en la estación *Los Heroes*, en cada estación que visita, el turista: escoge una dirección al azar desde las disponibles en la estación (considerando posibles conexiones a otras lineas); se sube al próximo tren que viaja en esa dirección; y se baja en la siguiente estación, donde repite el proceso. (Supondremos que los tiempos de viaje entre cada par de estaciones adyacentes es constante, y que el tiempo de espera en cada estación - hasta tomar el siguiente tren- también lo es)

a) **(1.5 pts.)** Escriba este modelo como como una cadena de Markov a tiempo discreto, explique por qué es homogénea y dibuje el grafo asociado (como mejor pueda).

   Solución. Los estados de la cadena son las estaciones $i \in N$, y las probabilidades de transición son
$$P_{i,j} = \begin{cases} n_i^{-1} & \text{si las estaciones i y j son adyacentes} \\ 0 & \sim . \end{cases}$$
   La cadena es homogénea por que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo.

b) **(1.5 pts.)** Justifique la existencia de un vector estacionario de probabilidades $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$, donde para cada i, π_i representa la probabilidad de que el turista se encuentre en la estación i en el largo plazo, y S representa el conjunto de estaciones del metro de Santiago.

   Solución Todas las estaciones están comunicadas entre si (supuesto), por lo que existe una única clase recurrente. No es claro que la cadena es aperíodica. Si podemos encontrar una forma de ir y volver a una estación (cualquiera) en un numero impar de movidas, entonces la clase es aperíodica, y existen probabilidades estacionarias.

c) **(1.5 pt.)** Suponiendo que el turista solo se mueve por las lineas 1,2 y 5 del metro (de forma que la red en la que se mueve tiene forma de árbol), justifique que para cada par (i, j) de estaciones adyacentes en la linea de metro, se debe tener que
$$\frac{\pi_i}{n_i} = \frac{\pi_j}{n_j},$$

donde n_i es el número de estaciones adyacentes a i.

Solución. Sea $n_t(i,j)$ el número de transiciones desde i a j en los primeros t períodos. Entonces, dado que la red de metro tiene forma de árbol, tenemos que

$$|n_t(i,j) - n_t(j,i)| \leq 1.$$

Dividiendo por t, tomando el limite cuando $t \uparrow \infty$, concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_t(i,j)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{n_t(j,i)}{t}.$$

Suponiendo que existen probabilidades estacionarias, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_t(i,j)}{t} = \pi_i \cdot p_{i,j} = \pi_i \cdot \frac{1}{n_i},$$

esto por que el limite de la izquierda es la fracción de transiciones que van desde i a j en el largo plazo, y también lo es el termino de la derecha (usando la interpretación de las probabilidades estacionarias como fracción del tiempo que los procesos pasan en ciertos estados). Esto prueba el resultado.

d) **(1.5 pts.)** Bajo el supuesto de la parte anterior, muestre que π esta dado por

$$\pi_i = \frac{n_i}{\sum_{j\in S} n_j}, \quad i \in S.$$

Solución. Sea A el conjunto de pares (no ordenados) de estaciones adyacentes. Entonces, las ecuaciones de balance están dadas por

$$\begin{aligned} \pi_i &= \sum_{j\in N:(i,j)\in A} \pi_j \cdot \frac{1}{n_j} \\ \sum_{i\in N} \pi_i &= 1, \quad \pi_i \geq 0\, \forall i \in N \end{aligned}$$

Definamos $C = (\sum_{j\in S} n_j)^{-1}$. Reemplazando con $\pi_i = C \cdot n_i$ arriba, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j\in N:(i,j)\in A} \pi_j \cdot \frac{1}{n_j} &= \sum_{j\in N:(i,j)\in A} C \cdot n_j \cdot \frac{1}{n_j} \\ &= n_i \cdot C \\ &= \pi_i. \end{aligned}$$

El resultado sigue del hecho que C es tal que $\sum_{i\in N} \pi_i = 1$, y de la unicidad del vector de probabilidades estacionarias.