IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesores: F. Subiadre, D. Sauré
Auxiliares: P. Galaz, S. Grass, D. Iriarte,
N. Toro, N. Trigo

Pauta Auxiliar # 8

Procesos de Poisson II

Problema 1

Suponga que uno de sus auxiliares ha decidido incursionar en el *stand up comedy* y ha sido contratado por un bar para participar en shows de una hora de duración. Para hacer el show, el auxiliar debe contar chistes, los cuales se sabe que llegan a su mente según un proceso de Poisson de tasa λ [chistes/hora]. Se sabe que un chiste es bueno con probabilidad p o es malo con probabilidad $(1-p)$, y que de acuerdo con el contrato, el auxiliar debe contar al menos un chiste bueno.

1. Calcule la probabilidad de que el auxiliar cumpla con el contrato.

   Solución: Sea X_1^b el instante en que se le ocurre el primer chiste bueno al auxiliar. X_1^b distribuye exponencial de tasa λp.
   $$\mathbb{P}(X_1^b \leq 1) = 1 - e^{-\lambda p}$$
   Notemos que llegamos exactamente al mismo resultado si definimos el proceso de conteo $N_b(t)$: número de chistes buenos que se le ocurre en un intervalo de largo t. Este es un proceso de Poisson de tasa λp. Entonces:
   $$\mathbb{P}(N_b(t) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_b(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda p}$$

2. Condicional en que cumplió el contrato, calcule la probabilidad de que el primer chiste sea bueno.

   Solución: Sea X_1^m el instante en que se le ocurre el primer chiste malo. La probabilidad pedida es:
   $$\mathbb{P}(X_1^b < X_1^m | X_1^b \leq 1)$$
   Podríamos pensar que en este caso usamos directamente la carrera de exponenciales, pero no es así, ya que en este caso estamos condicionando a que el auxiliar cuenta al menos un chiste bueno durante la hora del show, mientras que en la carrera de exponenciales, el primer momento puede pasar en cualquier momento, y en particular, pasada la hora que dura el show.
   $$\mathbb{P}(X_1^b < X_1^m | X_1^b \leq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1^b < X_1^m, X_1^b \leq 1)}{\mathbb{P}(X_1^b \leq 1)}$$
   El denominador lo calculamos en la parte anterior, mientras que el numerador, la forma fácil de calcularlo es calculando la probabilidad de que el primer chiste (sea bueno o malo) se le ocurra antes 1 hora $(1 - e^{-\lambda})$, y que ese chiste sea bueno (p):
   $$\mathbb{P}(X_1^b < X_1^m | X_1^b \leq 1) = \frac{(1 - e^{-\lambda})p}{1 - e^{-\lambda p}}$$

3. Calcule la probabilidad de que el auxiliar cuente más chistes buenos que malos.

Solución: Consideremos el proceso de conteo $N_b(t)$ y $N_m(t)$ el número de chistes malos que se le ocurre en un intervalo de largo t. Ambos son procesos de Poisson de tasa λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente. Entonces:

$$\mathbb{P}(N_b(1) > N_m(1)) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j>i}^{\infty} \mathbb{P}(N_m(1)=i)\mathbb{P}(N_b(1)=j) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j>i}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}\frac{(\lambda p)^i}{j!}$$

4. Considere que el auxiliar recibe un bono si es que cumple con el contrato y lanza a lo más un chiste malo. Calcule la probabilidad de recibir el bono.

Solución: Para recibir el bono se necesita que $N_b(1) \geq 1$ y $N_m(1) \leq 1$. Entonces:

$$\mathbb{P}(N_b(1) \geq 1, N_m(1) \leq 1) = \mathbb{P}(N_b(1) \geq 1)\mathbb{P}(N_m(1) \leq 1) = (1-e^{-\lambda p})(e^{-\lambda(1-p)} + \lambda(1-p)e^{-\lambda(1-p)})$$

5. Condicional en que durante el show el auxiliar contó exactamente n chistes, ¿cuál es la probabilidad de que k de ellos hayan sido malos?

Solución: Sea $N(t)$ el número de chistes que se le ocurre en un intervalo de largo t. $N(t)$ es un proceso de Poisson de tasa λ. Calculamos:

$$\mathbb{P}(N_m(t)=k|N(t)=n) = \frac{\mathbb{P}(N_m(t)=k, N(t)=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)} = \frac{\mathbb{P}(N_m(t)=k)\mathbb{P}(N_b(t)=n-k)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}$$

$$\mathbb{P}(N_b(t)=k|N(t)=n) = \binom{n}{k}\frac{(\lambda(1-p)t)^k e^{-\lambda(1-p)t}\cdot(\lambda pt)^{n-k}e^{-\lambda pt}}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}} = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

Notamos que no depende del largo del intervalo.

Problema 2

Boris recibe regalos por parte de sus seres queridos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Además, es visitado por cobradores de deudas, quienes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ. Ambos procesos son independientes. Suponga que la casa de Boris tiene espacio para guardar prácticamente infinitos regalos.

a) Si Boris aún no ha recibido ningún regalo, ni ha sido visitado por ningún cobrador, ¿cuánto es el tiempo esperado hasta que haya ocurrido al menos una de cada tipo de llegadas?

Solución: Sean T_r y T_c los tiempos hasta la llegada del primer regalo y el primer cobrador, respectivamente. Buscamos la esperanza del máximo de estas variables aleatorias:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\max\{T_r, T_c\}) &= \mathbb{E}(T_r + T_c - \min\{T_r, T_c\}) \\ &= \mathbb{E}(T_r) + \mathbb{E}(T_c) - \mathbb{E}(\min\{T_r, T_c\}) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu}\end{aligned}$$

Obs: Alternativamente se puede estudiar la distribución de probabilidad de $\max\{T_r, T_c\}$ para calcular su esperanza por definición.

b) Si en $[0,T]$ Boris recibió 2 regalos y llegaron 3 cobradores, ¿cuál fue el instante esperado de llegada del primer regalo?

Solución: Cada una de las llegadas mencionadas sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0,T]$. En particular, nos interesa conocer la esperanza del menor de ambos instantes de llegada correspondientes a regalos. Para dicho análisis, los instantes de llegada de los cobradores son irrelevantes.

En general, calcular la esperanza de los estadísticos de orden de n variables aleatorias uniformes en un intervalo equivale a dividir dicho intervalo en $n+1$ partes iguales, siendo los límites entre sub-intervalos consecutivos los valores buscados. En este caso particular, dividimos el intervalo $[0,T]$ en $2+1=3$ partes iguales: $[0,\frac{T}{3})$, $[\frac{T}{3},\frac{2T}{3})$ y $[\frac{2T}{3},T]$. Concluimos que la esperanza del instante de llegada del primer regalo es $\frac{T}{3}$

Obs: Alternativamente, calculamos la esperanza del minimo de dos uniformes $(0,T)$. Esto es

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \text{mín}\{t_1,t_2\}dt_1dt_2 \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T (t_2(T-t_2)+\int_0^{t_2} t_1dt_1)dt_2 \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T (t_2\cdot T - t_2^2/2)dt_2 \\ &= T/2 - T/6 = T/3. \end{aligned}$$

Suponga a continuación que, al llegar, los cobradores eligen al azar alguno de los regalos a modo de pago, y se marchan inmediatamente tras elegirlo. En caso de llegar un cobrador y no encontrar regalos, esperará hasta la llegada del siguiente. Sin embargo, si un cobrador al llegar se encuentra con que un colega suyo ya se encuentra esperando, abandonará el lugar inmediatamente, sin esperar su regalo.

c) Si en un momento cualquiera Boris no tiene ningún regalo, y no hay ningún cobrador esperando, ¿cuánto será el tiempo de espera del siguiente cobrador hasta tomar un regalo e irse, en esperanza?

Solución: Si llega al menos un regalo antes que el siguiente un cobrador, éste no deberá esperar nada. En cambio, si llega un cobrador antes que el siguiente regalo, deberá esperar $\frac{1}{\lambda}$, en esperanza. La probabilidad de que ocurra cada uno de estos escenarios corresponde a una carrera de exponenciales, por lo que el resultado buscado finalmente será

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}$$

d) Si en un momento cualquiera Boris solo cuenta con un regalo, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea el escogido por el siguiente cobrador en llegar?

Solución: Llamemos R al evento cuya probabilidad queremos calcular. Suponiendo que llegan exactamente n regalos más antes de la llegada del siguiente cobrador, la probabilidad de que se elija particularmente el regalo que nos interesa es $\frac{1}{n+1}$. A este evento lo llamaremos R_n. Además, sea N la variable aleatoria que indica el número de regalos adicionales que recibe Boris antes de la llegada del siguiente cobrador. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(R \mid N = n) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(R_n) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(N = n)}{n+1}\end{aligned}$$

Podemos interpretar N como una variable aleatoria geométrica de parámetro $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$, ya que se trata del número de llegadas diferentes a un cobrador, anteriores a la llegada del primer cobrador. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(N = n) = \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

Retomando entonces el cálculo anterior,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(N = n)}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n \frac{\mu}{\mu+\lambda}}{n+1} \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^n}{n}\end{aligned}$$

Obs: Esta serie tiene forma cerrada, obteniéndose $\mathbb{P}(R) = -\frac{\mu}{\lambda} \ln\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$

Problema 3 - Propuesto

Suponga que existe un terminal de buses exclusivo para viajar a la ciudad de Rancagua. Los pasajeros llegan a este terminal segun un proceso de Poisson de tasa μ [personas/hora]. Se sabe, además, que en el terminal existen dos andenes, A y B, uno para cada servicio ofrecido para realizar el viaje. Suponga que una vez en el terminal, los pasajeros eligen el servicio A con probabilidad p, y el servicio B, con $1 - p$.

a) ¿Cuál es la probabilidad que lleguen k pasajeros al andén B durante la primera hora? Y que lleguen más que k pasajeros? En promedio, cuántos pasajeros llegarán al andén B la primera hora?

Solución:

$$P(N_B(1) = k) \ = \tfrac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

Luego,

$$P(N_B(1) \ \geq k) \ = \textstyle\sum_{j\geq k} \tfrac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

Finalmente, la esperanza de un proceso de Poisson de tasa $\lambda(1-p)$ es

$$E(N_B\,(1)) = \lambda\,(1-p)$$

b) Si se sabe que en la primera hora han llegado 100 pasajeros al terminal, determine la probabilidad de que k de ellos hayan escogido el servicio A.

Solución:

$$P[N_A(1)=k|N(1)=100] = \frac{P[N(1)=100|P[N_A]}{P[N(1)=100]}$$

$$= \frac{P[N_B=100-k]\cdot P[N_A(1)=k]}{P[N(1)=100]}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda}(1-p)(\lambda(1-p))^{100-k}}{(100-k)!}}{\frac{e^{-\lambda}\cdot(\lambda)^{100}}{100!}}$$

c) Considerando nuevamente que llegaron 100 pasajeros en la primera hora, calcule la probabilidad que en la primera media hora hayan llegado k pasajeros al andén A. **Solución:**

$$\begin{aligned}
P[N_A^{0,5}=k|N(1)=100] &= \frac{P[N_A(0,5)=k \wedge N(0,5)+N_B(0,5)=100-k]}{P[N(1)=100]} \\
&= \frac{P[N_A(0,5)=k]\cdot P[N(0,5)+N_B(0,5)=100-k]}{P[N(1)=100]} \\
&= \frac{\frac{(\lambda\frac{p}{2})^k\cdot e^{-(\lambda\frac{p}{2})}}{k!}\cdot\frac{(\lambda(1-\frac{p}{2}))^{100-k}\cdot e^{-(\lambda(1-\frac{p}{2}))}}{(100-k)!}}{\frac{(\lambda)^{100}\cdot e^{-\lambda}}{100!}} \\
&= \frac{100!}{(100-k)!k!}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{p}{2}\right)^{100-k}
\end{aligned}$$