Aux 3 micro.

P1)

		J_2 A	NA	
J_1	A	$a-c$, $a-c$	$a-c$, a	q
	NA	a, $a-c$	$0, 0$	$1-q$
		$1-p$	p	

(i) ¿Cuales son los EN?

son: $\{(NA, A), (A, NA)\}$

¿Cuál es el eq. en estrategias mixtas?

Imponemos indiferencia para calcular el ENEM

Para esto buscamos el conjunto de creencias del jugador i sobre el jugador J.

Para J_1. El valor esperado de jugar A es: $(1-p)\cdot(a-c)\cdot p(a-c)$

y el valor esperado de jugar NA: $(1-p)\cdot a + p\cdot 0$

Luego: $E_1(A \mid p) = E_1(NA \mid p) = (1-p)(a-c)\cdot p(a-c) = (1-p)\,a$

$\Leftrightarrow a-c = (1-p)\,a \Rightarrow 1-p = \frac{a-c}{a}$

$\Rightarrow 1 - \frac{a-c}{a} = \frac{c}{a} = p$ } Esto nos dice que J_2 juega NA con probabilidad $p = \frac{c}{a}$

* Para entender de forma más simple. Un eq. de Nash en estrategias mixtas involucra al menos un jugador que juega una estrategia aleatoria y ningún jugador puede incrementar su pago esperado al jugar otra estrategia.

Calculemos q. $E_2(A \mid q) = E(NA \mid q) = (a-c)\cdot q + (a-c)(1-q) = a\cdot q + 0\,(1-q)$

$\Leftrightarrow a-c = a\cdot q \rightarrow q = 1 - \frac{c}{a}$

↳ prob. con que J_1 juega A

$\Rightarrow ENEM = \{(1-\frac{c}{a}, \frac{c}{a}), (1-\frac{c}{a}, \frac{c}{a})\}$

donde el primer elementos son las probabilidades con que J_1 juega A y NA

P2|

Evidentemente $w_c < w_s$ (ambos jugadores son racionales).

Es importante notar que el hecho de que el final elige la oferta más cercana a x es equivalente a decir que si $x < \frac{w_c + w_s}{2}$, el final elige w_c y si $x > \frac{w_c + w_s}{2}$, el final elige w_s (visto en la clase).

Luego $\mathbb{P}(w_s \text{ sea escogido}) = \mathbb{P}(x > \frac{w_c + w_s}{2}) = 1 - \mathbb{P}(x < \frac{w_c + w_s}{2})$.

Equivalentemente: $\mathbb{P}(w_c \text{ sea escogido}) = \mathbb{P}(x < \frac{w_c + w_s}{2})$

$\Rightarrow$ El pago esperado para el sindicato es:

$$w_s \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c + w_s}{2}\right)\right) + w_c \cdot \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c + w_s}{2}\right)$$

Poniéndonos en el caso de copec, la empresa busca minimizar este valor. Al contrario, el sindicato busca maximizarlo.

Entonces, si (w_c^*, w_s^*) son un equilibrio de Nash:

$$w_c^* = \underset{w_c}{\operatorname{argmin}}\ w_s^* \left(1 - \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c + w_s^*}{2}\right)\right) + w_c\, \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c + w_s^*}{2}\right) \quad (i)$$

y

$$w_s^* = \underset{w_s}{\operatorname{argmax}}\ w_s \left(1 - \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c^* + w_s}{2}\right)\right) + w_c^*\, \mathbb{P}\left(x < \frac{w_c^* + w_s}{2}\right) \quad (ii)$$

* Recordemos que $\mathbb{P}(x < a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = F(a)$

tomaremos la densidad de $F(\cdot)$ como $f(\cdot)$

$$w_c^* = \underset{w_c}{\operatorname{argmin}}\ w_s^* \left(1 - F\left(\frac{w_c + w_s^*}{2}\right)\right) + w_c\, F\left(\frac{w_c + w_s^*}{2}\right)$$

y

$$w_s^* = \underset{w_s}{\operatorname{argmax}}\ w_s \left(1 - F\left(\frac{w_c^* + w_s}{2}\right)\right) + w_c^*\, F\left(\frac{w_c^* + w_s}{2}\right)$$

Luego, imponemos condiciones de primer orden.
-> derivando en W_c^*

$$\frac{\partial}{\partial W_c}\left(W_s^*\left(1-F\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)\right)+W_c F\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)\right)=0$$

$$-W_s^* f\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial W_c}\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)+F\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)+W_c^* f\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial W_c}\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)=0$$

$$=-\frac{W_s^*}{2} f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)+F\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)+\frac{W_c^*}{2} f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{W_c+W_s^*}{2}\right)=(W_s^*-W_c^*)\cdot\frac{1}{2} f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right) \quad (1)$$

ahora en W_s^*

$$\frac{\partial}{\partial W_s}\left(W_s\left(1-F\left(\frac{W_c^*+W_s}{2}\right)\right)+W_c^* F\left(\frac{W_c^*+W_s}{2}\right)\right)=0$$

$$1-F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)-W_s^* f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial W_s}\left(\frac{W_c^*+W_s}{2}\right)+W_c^* f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)\frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{W_c^*+W_s}{2}\right)=0$$

$$1-F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=(W_s^*-W_c^*)\cdot\frac{1}{2} f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right) \quad (2)$$

de (1) y (2) $\Rightarrow F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)-1+F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=0 \Rightarrow 2F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=1$

$\Rightarrow F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=\frac{1}{2}$ } si sustituimos este resultado en las CPO.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=(W_s^*-W_c^*)\,\frac{1}{2} f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right) \Rightarrow W_s^*-W_c^*=\frac{1}{f\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)}$$

notemos que el hecho de que $F\left(\frac{W_c^*+W_s^*}{2}\right)=\frac{1}{2}$ nos dice que el promedio de ambas ofertas es igual a la mediana de la distribución F.

* $0 \leq F \leq 1$, F integra 1.

Luego, como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\Rightarrow$ la normal es simétrica respecto a su centro $\Rightarrow$ la media es su mediana.

$$\Rightarrow \frac{W_c^* + W_s^*}{2} = \mu$$

y además $$W_s^* - W_c^* = \frac{1}{f\left(\frac{W_c^* + W_s^*}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu-\mu)^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incognitas

$$W_c^* + W_s^* = 2\mu \qquad y \quad W_s^* - W_c^* = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$$\Rightarrow 2W_s^* = 2\mu + \sqrt{2\pi\sigma^2} \Rightarrow \underline{W_s^* = \mu + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}}$$

$$W_c^* + \mu + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} = 2\mu \Rightarrow W_c^* = \mu - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$$

* Anexo: ¿Por qué W_c^* y W_s^* tienen solución si una minimiza y otra maximiza la misma función? Porque no son la misma función porque toman argumentos y parámetros distintos (para W_c^*, W_s es fijo y para W_s^*, W_c es fijo).

Evaluemos convexidad:

$$W_c^* = \underset{W_c}{\operatorname{argmin}}\ W_c \cdot F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right) + W_s^* \cdot \left(1 - F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)\right)$$

¿es $W_c \cdot F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right) + W_s^*\left(1 - F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)\right)$ convexa?

$$\frac{\partial}{\partial W_c} W_c \cdot F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right) + W_s^*\left(1 - F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{F\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)} + W_c \cdot f\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} - W_s^* f\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right) \cdot \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial W_c}(\cdot/\cdot) = \frac{1}{2} f\left(\frac{W_c^* + W_s^*}{2}\right) + f\left(\frac{W_c^* + W_s^*}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + W_c^* \frac{\partial}{\partial W_c}\left(f\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$- W_s^* \cdot \frac{\partial}{\partial W_c}\left(f\left(\frac{W_c + W_s^*}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{4}$$

pero $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) 2(g(x)-\mu) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g(x)) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

si $g(w_c) = \frac{w_c + w_s^*}{2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(g(w_c)) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{\geq 0} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{w_c + w_s^*}{2} - \mu\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{w_c + w_s}{2} - \mu\right)^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_c}\left(f\left(\frac{w_c + w_s^*}{2}\right)\right) \leq 0$ pero $f\left(\frac{w_c^* + w_s^*}{2}\right) \geq 0$ → no existen probabilidades negativas

volviendo a la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial w_c}(\%) = \underbrace{f\left(\frac{w_c^* + w_s^*}{2}\right)}_{\geq 0} + \frac{1}{4} \underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial w_c}\left(f\left(\frac{w_c^* + w_s^*}{2}\right)\right)}_{\leq 0} \underbrace{(w_c^* - w_s^*)}_{\leq 0}}_{\geq 0}$$

≤ 0 ⇒ $w_c < w_s$ (suposición del problema).

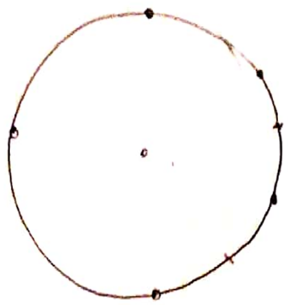
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial w_c}(\%) \geq 0 \Rightarrow$ el valor esperado respecto a w_c es convexa y la firma w_c quiere minimizar el pago esperado.
⇒ se alcanza la sol

pero el valor esperado que depende de w_s (la función que es maximizada por el sindicato), ésta es cóncava (si realizamos el mismo procedimiento, este será la convexidad la entregará el término $\left(1 - F\left(\frac{w_c^* + w_s}{2}\right)\right)$ el cual invierte el resultado.

• Por otro lado. Si bien μ puede ser negativo, dado que uno de los supuestos de los problemas es que $w_i \in \mathbb{R}_+$ (no se pueden ofertar pagos negativos) en particular, $w_c \geq 0$, pero $w_c = \mu - \sqrt{\frac{\pi \sigma^2}{2}} \geq 0$

$\Rightarrow \mu \geq \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \Rightarrow$ En la solución notamos que μ debe ser mayor que 0, pero para el cálculo debemos considerar todos los casos.

P3 |



i) La distancia entre cada firma es $\frac{1 Km}{m}$ => Como todos los sandwich son iguales, y cuestan lo mismo, los transeúntes eligen la sandwichería más cercana.

debemos buscar al consumidor indiferente (¿por qué? por que así encontramos el límite en que un local alcanza a capturar demanda).

Suponiendo que el consumidor se encuentra entre 2 locales, en un espacio delimitado por ellos 2, puede ubicarse entre 0 y $\frac{1}{m}$ => $x \in (0, \frac{1}{m})$. =>

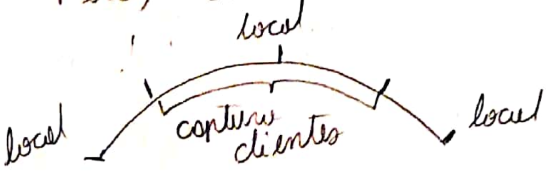
el pago por ir a un local es $u = v - P_i - t \cdot \Delta x$ ← el desplazamiento desde su ubicación al local

El consumidor indiferente cumple

$$v - P_i - t \cdot x = v - P_j - t\left(\frac{1}{m} - x\right)$$

Luego: $P_j - P_i = 2tx - \frac{t}{m}$ => $x = \dfrac{P_j - P_i - \frac{t}{m}}{2t}$

Pero, como un local en particular captura demanda hacia ambos lados, la demanda total que percibe es $2x = \dfrac{P_j - P_i - \frac{t}{m}}{t}$



b) Cada sandwichería busca maximizar sus clientes y reducir lo menos posible sus precios.

su función de utilidad: $u_i = 2x(P_i - C) - F = \left(\dfrac{P_j - P_i - \frac{t}{m}}{t}\right)(P_i - C) - F$

CPO. $\dfrac{\partial}{\partial P_i}\left(\left(\dfrac{P_j^* - P_i - \frac{t}{m}}{t}\right)(P_i - C) - F\right) = \dfrac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{1}{t}\left(P_j^* \cdot P_i - P_i^2 - P_i \cdot \frac{t}{m} + C \cdot P_i\right)\right) = 0$

$$= \frac{1}{t}\left(P_j^* - 2P_i^* - \frac{t}{m} + C\right) = 0$$

$$\Rightarrow P_i^* = \frac{1}{2}\left(C - \frac{t}{m} + P_j^*\right)$$

Sin embargo, como el problema es simétrico, $p_j^* = p_i^*$

↳ misma función de utilidad para cada jugador

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p_i^* = \frac{1}{2}\left(c - \frac{t}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow p_i^* = c - \frac{t}{n}.$$

c) Toda empresa entra al mercado si y solo si percibe una utilidad positiva.

$\Rightarrow$ La utilidad de una empresa i: $u_i = \left(-\frac{t/n}{t}\right)(p_i^* - c) - F$ ($p_i^* = p_j^*$)

$$\Rightarrow u_i = -\frac{1}{n}\left(\cancel{c} - \frac{t}{n} - \cancel{c}\right) - F = \frac{t}{n^2} - F = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{n^2} = F \Leftrightarrow n = \sqrt{\frac{t}{F}}$$

P4 $J = 2$, $S_i \in \{\text{Piedra, Papel, Tijera}\}$

		J_2			
		Piedra	Papel	Tijera	
J_1	Piedra	0,0	-1,1	1,-1	r
	Papel	1,-1	0,0	-1,1	a
	Tijera	-1,1	1,-1	0,0	
		p	q		

→ No hay EN.

Buscamos que $E_1(\text{Piedra}) = E_1(\text{Papel}) = E_1(\text{Tijera})$

↳ $E_1(\text{Piedra}) = 0 \cdot p - 1 \cdot q + 1 \cdot (1-p-q)$

$E_1(\text{Papel}) = 1 \cdot p + 0 \cdot q - 1(1-p-q)$

$E_1(\text{Tijera}) = -1 \cdot p + q + 0(1-p-q)$

Igualamos primero el valor esperado de elegir piedra con el de elegir tijera.

$$\Rightarrow -q + (1-p-q) = p - (1-p-q) \Leftrightarrow 1 - p - 2q = -1 + 2p + q \Leftrightarrow 2 = 3p + 3q$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{3} - q$$

ahora piedra con tijera: $-q + 1 - p - q = -p - q$

$$\Leftrightarrow -2q + 1 - \left(\tfrac{2}{3} \cancel{-q}\right) = -\left(\tfrac{2}{3} \cancel{-q}\right) + q$$

$$\Rightarrow 1 = 3q \Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Como el juego es simétrico, las estrategias del jugador 2 tienen la misma solución.

Finalmente: $\text{ENEM} = \{\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)}_{J_1}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)}_{J_2}\}$