Dudas:

¿Qué significa S_{-i}?

S_{-i} es un vector que contiene las estrategas de todos los jugadores menos las del jugador i, es decir, en un juego de penales, si yo soy el arquero, la estrategia del "chuteador" se podria reprecentar como $S_{-arquero}$. Por lo tanto es simplemente una simplificación de notación para juegos más grandes, osea, con más jugadores.

¿En EIEED puedo eliminar estrategias que no son <u>estrictamente</u> dominadas?

No. En caso de eliminar estrategias que no estén <u>estrictamente</u> dominadas (me refiero a estrategias dominadas pero no de manera estricta) se podrían estar eliminando EN.

P1

Jugador 1 (columnas), Jugador 2 (filas)

	A	B	C
X	2, 0	1, 1	4, 2
Y	3, 4	1, 2	2, 3
Z	1, 3	0, 2	3, 0

① Z está estrictamente dominada por X

② Una vez eliminado Z, B queda estrictamente dominada por C.

De esto se obtiene la siguiente matriz de pagos:

	A	C
X	2, 0	4, 2
Y	3, 4	2, 3

Ya que no existen más EED procedemos a buscar los EN preguntandonos: ¿Si soy el jugador i, y el jugador j juega S_j, cual es la estrategia S_i que máximiza mi utilidad?

De esta forma encontramos que (X, C) y (Y, A) son EN.

Juego 2: Para este juego basta notar que no existen EED, que se trata de un juego de coordinación y que tiene 2 EN: (D, D) y (C, C)

Juego 3:

	A	B	C	D	E	
V	4, -1	3, 0	-3, 1	-1, 4	-2, 0	5) dom. por X
W	-1, 1	2, 2	2, 3	-1, 0	2, 5	
X	2, 1	-1, -1	3, 4	4, -1	0, 2	
Y	1, 6	-8, 0	-1, 4	1, 1	-1, 4	1) dominada por X
Z	0, 0	1, 4	-3, 1	-2, 3	-1, 1	3) dom. por W
	2) dom. por C	4) dom. por C		6) dom. C y E		

←

	C	E
W	2, 3	2, 5
X	3, 4	0, 2

↳ con (X, C) y (W, E) EN.

P2)

a) Si $\vec{S}^*$ es un EN y (procedemos por contradicción) no sobrevive al EIEE, quiere decir que $\exists \hat{S}_i \in S_i$ tq:

$$U_i(\hat{S}_i, S_{-i}) > U_i(S_i^*, S_{-i}), \quad \forall S_{-i} \in S_{-i}$$

En particular se concidera que $S_{-i} = S_{-i}^*$ (pues solo eliminamos la estrategia S_i) con lo que se obtiene:

$$U_i(\hat{S}_i, S_{-i}^*) > U_i(S_i^*, S_{-i}^*)$$

$$\rightarrow\leftarrow$$

Lo que contradice la definición de EN.

b) Demostremos primero la unicidad: Sabemos, por la parte anterior que la EIEED no elimina EN. Por otro lado, una solución de EIEED es única (lo obtenido en la P1 no son soluciones de EIEED, son solo estrategias que sobreviven a ella). Por lo tanto, de existir más de un EN, la EIEED no lo habría eliminado y por tanto no habríamos encontrado UNA solución de EIEED.

Ahora demostremos que una solución de EIEED es, necesariamente, un EN:

A) Para quienes prefieren la intuición:

Supongamos que $\vec{S}^*$ es solución de EIEED, pero que no es un EN, entonces existe un jugador i, que dada la mejor jugada del resto de los jugadores (S_{-i}^*), cuenta con una estrategia $\hat{S}_i \neq S_i^*$ tal que maximiza la utilidad del jugador i, es decir:

$$U_i(\hat{S}_i, S_{-i}^*) = \max_{S_i} U_i(S_i, S_{-i}^*)$$

Entonces $\hat{s}_i$ ($\neq s_i^*$) es la mejor jugada del jugador i, por lo que nunca debió ser eliminada, lo que representa una contradicción.

B) Para l@s más rigurosos@s matemáticamente:

Asumamos que $\vec{s}^*$ es solución de EIEED pero no es EN, entonces $\exists i \in I, \exists s'_i \in S'_i$ tq $u_i(s'_i, s^*_{-i}) > u_i(s^*_i, s^*_{-i})$.
Esta jugada s'_i fue eliminada (pues no es parte de $\vec{s}^*$).
Si s'_i fue eliminada es porque existe otra jugada s''_i tq

$$u_i(s''_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}), \ \forall s_{-i} \in S'_{-i}$$

Nótese que $s^*_i \in S_i$, por lo que podemos tomar $s_{-i} = s^*_{-i}$, y de esta forma nos enfrentamos a dos posibilidades:

1) $s''_i = s^*_i$:

$$u_i(s''_i, s^*_{-i}) > u_i(s'_i, s^*_{-i}) > u_i(s^*_i, s^*_{-i})$$

$$\Leftrightarrow \ u_i(s^*_i, s^*_{-i}) > u_i(s^*_i, s^*_{-i})$$

$\rightarrow \leftarrow$

un elemento no puede ser mayor o menor estricto que sí mismo.

2) $s''_i \neq s^*_i$: con esto se tendrá un s'''_i que fue eliminada y que sigue siendo mejor estrategia que s''_i.

De esta forma seguimos iterando hasta analizar todas las estrategias hasta que no queden más estrategias que la estrategia s^*_i, con lo que llegamos, sin más alternativas, a la contradicción anterior.

P3

a.1) Jugadores: usted y sus n amigos $(i \in I, \text{ con } |I| = n+1)$

Estrategias: $u_i \in]0, \infty[\ , \forall i \in I$

pagos: $$\mu_i = \sum_{j \in I} \ln(u_j) - u_i \ , \ \forall i \in I$$

a.2) Para encontrar la mejor respuesta del jugador i, debemos encontrar aquella estrategia que maximice su utilidad. Para esto basta tomar la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{j \in I} \ln(u_j) - u_i\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\cancel{\sum_{j \in I, j \neq i} \ln(u_j)}\right) + \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\ln(u_i) - u_i\right)$$

$$= \frac{1}{u_i} - 1 \ / \text{CPO}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_i = 1}$$

b) Ambas empresas deciden, simultaneamente, cuanto producir, con el fin de máximizar sus utilidades:

$$U_i = P \cdot q_i - c_i \cdot q_i$$

Nótese que la firma i solo puede decidir q_i, entonces su mejor estrategia estará dada por:

$$q_i^* = \underset{q_i}{\text{Arg max}}\ P \cdot q_i - c_i \cdot q_i$$

$$\iff \underset{q_i}{\operatorname{Arg\,max}}\ (a-Q)q_i - c_i \cdot q_i$$

Notemos ahora que $Q = \sum_k q_k$, lo que en este caso sería $q_1 + q_2$, entonces:

$$q_1^* = \underset{q_1}{\operatorname{Arg\,max}}\ (a-(q_1+q_2))\cdot q_1 - c_i \cdot q_1$$

Por CPO se tiene que:

$$a - q_2 - 2q_1^* = c_1$$

$$\iff q_1^* = \frac{q_2 + c_1 - a}{-2}$$

Análogamente $q_2^* = \dfrac{-q_1 - c_2 + a}{2}$

Como las dos firmas deciden simultaneamente, el EN se encontrara en la interseccion de q_1^* y q_2^*, es decir, cuando ambas firmas esten jugando su mejor estrategia (simultaneamente):