

P1 | Encuentre la expresión de la diferencia de gravedad si nos alejamos una altura 'h' de la superficie terrestre.

- Considere una Tierra esférica de radio y gravedad superficial $R_T = 6371 \text{ km}$ y $g_0 = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Nota: Este resultado teórico se conoce como el 'efecto de aire libre'.

Usando aproximación de Taylor cercano a la superficie:

$$g(r) \approx g(R_T) + g'(R_T)(r - R_T) \quad \text{definimos } r = R_T + h$$

$$\Rightarrow \Delta g = g(R_T + h) - g(R_T) \approx g'(R_T) \cdot (\cancel{R_T} + h - \cancel{R_T})$$

$$\text{si } g(r) = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow g'(r) = -\frac{2GM}{r^3} \quad \text{luego } g'(R_T) = -\frac{2GM}{R_T^3}$$

$$\text{definiendo } g_0 = \frac{GM}{R_T^2}$$

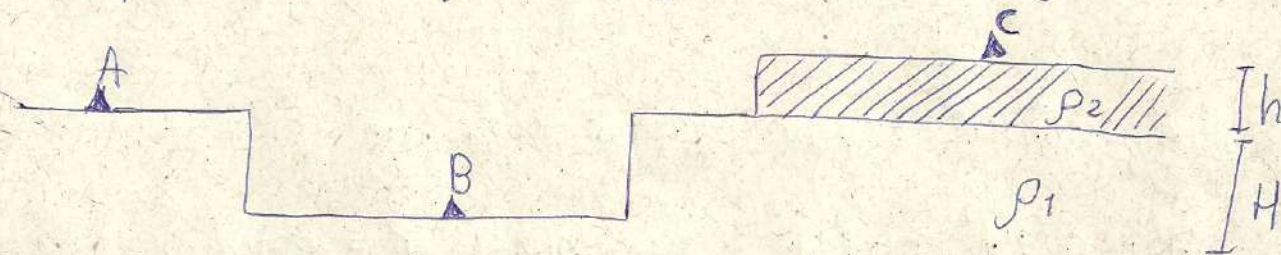
$$\Delta g \approx -\frac{2g_0}{R_T} \cdot h = \frac{-2 \cdot 9.8 [\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]}{6371 [\text{km}]} = \frac{-2 \cdot 9.8 \cdot 10^5 [\text{mgal}]}{6371 \cdot 10^3 [\text{m}]}$$

$$\Delta g \approx -0.3076 \cdot h$$

$$\text{Finalmente: } \boxed{\Delta g = -\gamma \cdot h \quad \text{con } \gamma: \text{gradiente gravimétrico} \\ \gamma = 0.3076}$$

Observación: En geofísica la componente z suele estar definido positivo hacia abajo en prospección. Por eso al subir, en realidad variamos "-h".

P2 Siguiendo el esquema determine el valor de la gravedad en los puntos A, B y C, donde ρ_1 y ρ_2 son densidades de distintos suelos. Asimismo que los puntos están suficientemente alejados entre sí lateralmente. Determine además, la condición para que A y C tengan la misma gravedad.



Desarrollo...

• Defino mi DATUM al nivel de A con valor g_0 .



• Realizo las correcciones de aire libre y Bouguer simple.

A $g_A = g_0$ pues está al nivel del DATUM y no hay una 'capa de Bouguer' bajo ni sobre él.

B

B está más abajo ganando gravedad, por tanto, debo sumarle ese efecto: $+ \gamma H$.

B dejó de tener una 'capa de Bouguer' de espesor H y densidad ρ_1 perdiendo gravedad, por tanto, debo ~~sumarle~~ restarle ese efecto: $- 2\pi G \rho_1 H$

$$g_B = g_0 + \gamma H - 2\pi G \rho_1 H$$

P2/

C/

C está más arriba perdiendo gravedad, por tanto, debo restarle ese efecto: $-\gamma h$

C ahora tiene una 'capa de Bouguer' de densidad ρ_2 y espesor h que le añade gravedad, por tanto, debo sumarle ese efecto: $+2\pi G \rho_2 h$

$$g_c = g_0 - \gamma h + 2\pi G \rho_2 h$$

$$\text{Si } g_A = g_c \Rightarrow g_0 = g_0 - \gamma h + 2\pi G \rho_2 h$$

$$\text{Luego } \gamma h = 2\pi G \rho_2 h$$

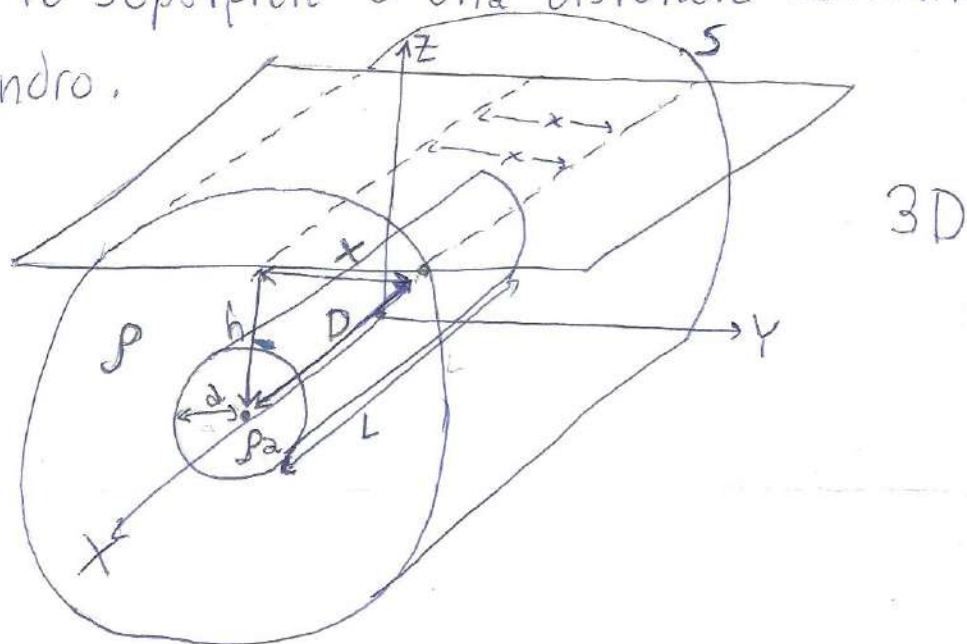
$$\text{Finalmente: } \rho_2 = \frac{\gamma}{2\pi G} = \frac{0.3086}{2\pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}} \frac{\left[\frac{\text{mgal}}{\text{m}}\right]}{\left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right]}$$

$$\therefore \rho_2 = 7.36 \text{ [g/cc]}$$

Nota: Las gravedades calculadas son la gravedad teórica o modeladas para cada punto, este valor se resta a la gravedad medida para obtener la gravedad anómala a posteriori.

P3] Sea un cilindro de radio ' a ', largo ' L ' y densidad ' ρ_a ', dispuesto horizontalmente con su eje a una profundidad ' h ' de la superficie ($h > a$) en un medio de densidad ' ρ '.
 Construya una expresión para el valor de la gravedad provocada por este cuerpo en la superficie a una distancia horizontal ' x ' del eje del cilindro.

Obs: $L \gg h$.
 $L \rightarrow \infty$



Por ley de Gauss
 obtenemos:

$$\int_S \Delta \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \Delta M_{enc}$$

donde $\Delta M_{enc} = \Delta \rho V$

con $\Delta \rho = \rho_a - \rho$

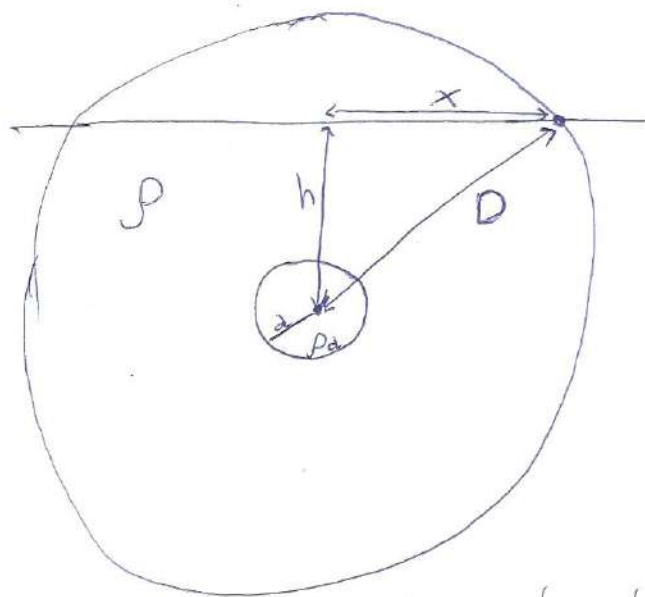
$$V = \pi a^2 L$$

$$\Rightarrow \int_S \Delta \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G (\rho_a - \rho) \pi a^2 L$$

Además

$$\int_S \Delta \vec{g} \cdot d\vec{S} = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \Delta g D d\theta dx$$

$$\Rightarrow \int_S \Delta \vec{g} \cdot d\vec{S} = -2\pi D L \Delta g$$



Solo integramos el manto del cilindro,
 pues las tapas son insignificantes ($L \rightarrow \infty$).

P31 Igualando las expresiones de $\int \Delta \vec{g} \cdot d\vec{s}$ obtenemos:

$$-4\pi^2 G (\rho_2 - \rho) a^2 K = -2\pi D K \Delta g$$

$$\Delta g = \frac{2\pi G a^2 (\rho_2 - \rho)}{D}$$

Para efectos de prospección gravimétrica nos interesa la componente vertical de este valor.

$$\Delta g_z = \Delta g \cdot \cos \theta, \quad \text{con } \cos \theta = \frac{h}{D} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$\Delta g_z = \frac{2\pi G (\rho_2 - \rho) a^2}{\sqrt{h^2 + x^2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$\therefore \Delta g_z = \frac{2\pi G a^2 (\rho_2 - \rho) h}{h^2 + x^2}$$

$$\text{con } \Delta g_{z \max} = \frac{2\pi G a^2 (\rho_2 - \rho)}{h} \quad (x=0)$$

P4) Luego de realizar un perfil gravimétrico, se obtiene la siguiente anomalía:



Asumiendo que la anomalía corresponde a la de un túnel vacío de sección circular y que la densidad del suelo es $2 \frac{\text{gr}}{\text{cc}}$, obtenga:

- a) Profundidad del eje central del túnel
- b) Altura del túnel.

• Desarrollando la Ley de Gauss se obtiene la expresión para el efecto gravitacional de un cilindro horizontal de densidad ρ , radio a y profundidad h ; a una distancia x en la horizontal del eje del cilindro:

$$\Delta g_z = \frac{2\pi G \Delta \rho a^2 h}{x^2 + h^2} \quad \text{función de } x$$

$$\Rightarrow \Delta g_z(0) = \frac{2\pi G \Delta \rho a^2 h}{0^2 + h^2} = \frac{2\pi G \Delta \rho a^2}{h}$$

$$\Delta g_z(h) = \frac{2\pi G \Delta \rho a^2 h}{h^2 + h^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi G \Delta \rho a^2}{h} = \frac{1}{2} \cdot \Delta g_z(0)$$

P4) $\Delta g_z(h) = \frac{1}{2} \Delta g_z(0) \quad \forall x \in [0, \infty) \Delta g_z$ es biyectiva.
 $\therefore$ tiene función inversa.

$$h = \Delta g_z^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta g_z(0) \right) \quad \text{si } \Delta g_z(0) = -0.02$$

$$h = \Delta g_z^{-1}(-0.01) \quad \boxed{\therefore h = 4 \text{ m}} \quad \text{revisando el perfil de anomalía.}$$

$$\Delta g_z(0) = \frac{2\pi G (\rho_T - \rho) a^2}{h} \Rightarrow a = \left(\frac{h \cdot \Delta g_z(0)}{2\pi G (\rho_T - \rho)} \right)^{1/2}$$

con $h = 4 \text{ m}$, $\Delta g_z(0) = -0.02 \text{ [mgal]}$,

$\rho_T = 0 \frac{\text{gr}}{\text{cc}} \text{ (vacío)} \quad \text{y} \quad \rho = 2 \frac{\text{gr}}{\text{cc}}$

Obs: $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$a = \left(\frac{4 \cdot -0.02 \cdot 10^{-5} \frac{[\text{m}][\text{m/s}^2]}{[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}][\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]} \right)^{-2} = (0.954 \text{ m}^2)^{1/2}$$

$$a = 0.977 \text{ m}$$

Siendo A : altura del túnel $A = 2a$

$$\boxed{\therefore A = 1.95 \text{ [m]}}$$

