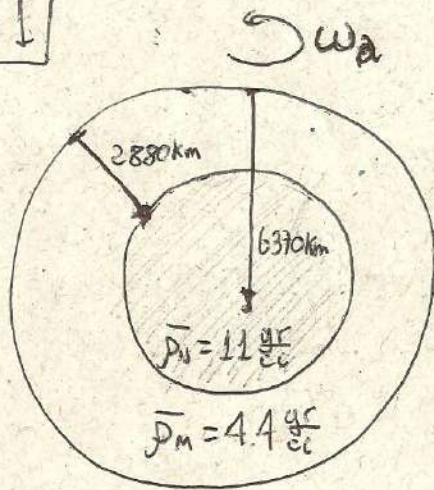
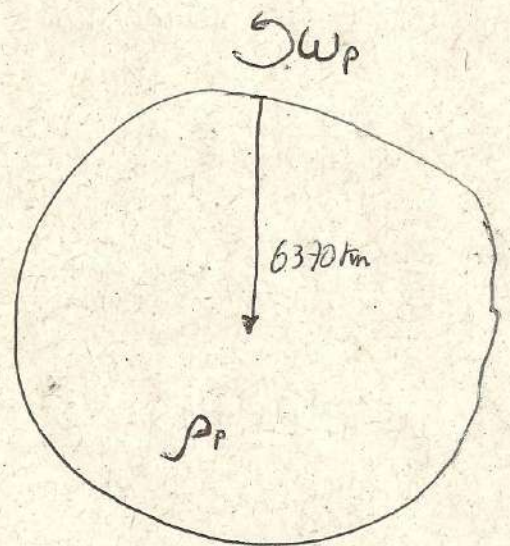


Ejercicio 1

HOY



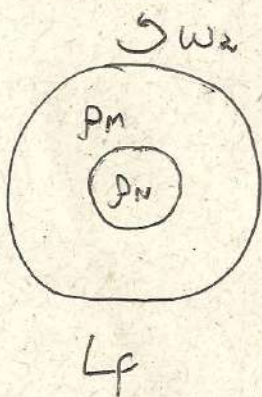
ANTES

¿Cuál sería la duración del día en la Tierra primitiva?

Usaremos la conservación del momentum angular. $L_i = L_f$ con $L = \frac{2}{5} MR^2 \omega$ para una esfera homogénea de masa M y velocidad angular ω .

• $L_f = L_M (\text{mento}) + L_{\text{núcleo}}$

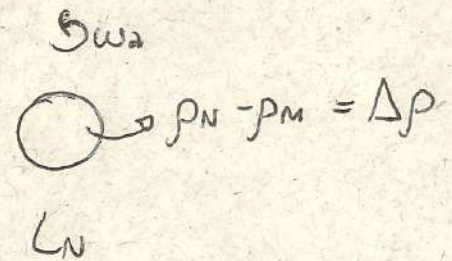
momentum se suma linealmente.



=



+



• Volumen total: $V_T = \frac{4}{3} \pi \cdot (6370)^3$, Volumen núcleo: $V_N = \frac{4}{3} \pi (6370 - 2880)^3$

$\therefore V_N = \left(\frac{6370 - 2880}{6370} \right)^3 V_T = 0.16446 \cdot V_T$

• $\rho_P = \frac{\text{Peso}}{V_T} = \frac{6370^3 \cdot 4.4 + (6370 - 2880)^3 \cdot 11}{6370^3}$

$\therefore \rho_P = 6.2 \frac{g}{cc}$

• Conservación momentum angular: $L_F = L_i = L_m + L_N$

$$\frac{2}{5} V_N \Delta \rho R_N^2 \omega_a + \frac{2}{5} V_T \rho_M R_T^2 \omega_a = \frac{2}{5} V_T \rho_P R_T^2 \omega_P$$

$$\downarrow$$

$$0.16446 V_T \cdot 6.6 \cdot \left(\frac{6370 - 2880}{6370} \right)^2 R_T^2 \omega_a + \cancel{V_T} \cdot 4.4 \cdot \cancel{R_T^2} \omega_a = \cancel{V_T} \cancel{R_T^2} \omega_P$$

$$\omega_P = \left(\frac{0.16446 \cdot 6.6 \cdot ((6370 - 2880)/6370)^2 + 4.4}{6.2} \right) \omega_a$$

$$\omega_P = 0.76 \omega_a$$

• $\omega_P = \frac{2\pi}{T_P}$, $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$ con $T_a = 24$ hrs.

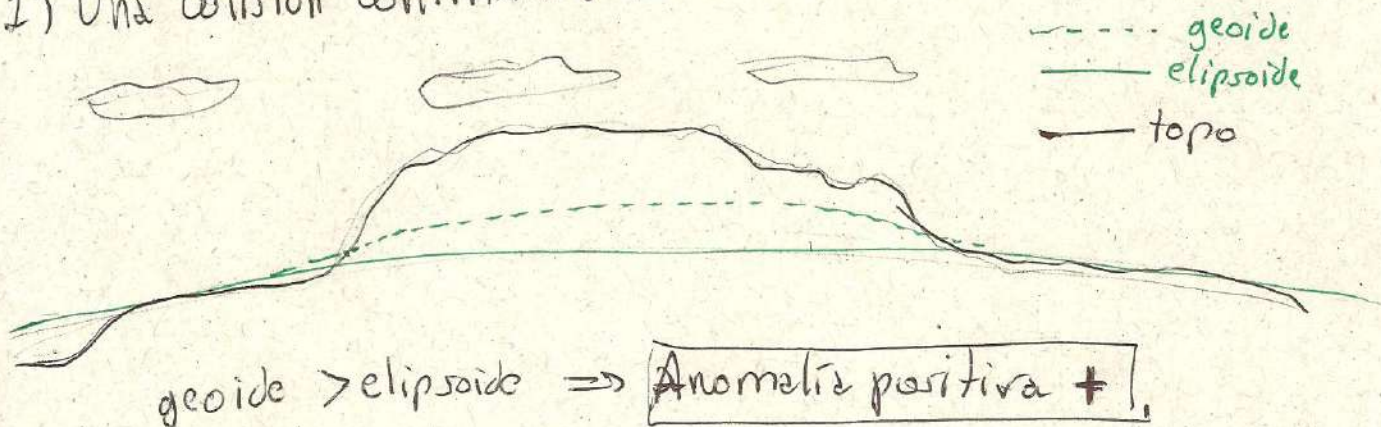
$$\Rightarrow T_a = 0.76 \cdot T_P \quad , \quad T_P = \frac{24}{0.76} \text{ [hrs]}$$

$$\therefore T_P = 31.6 \text{ hrs.}$$

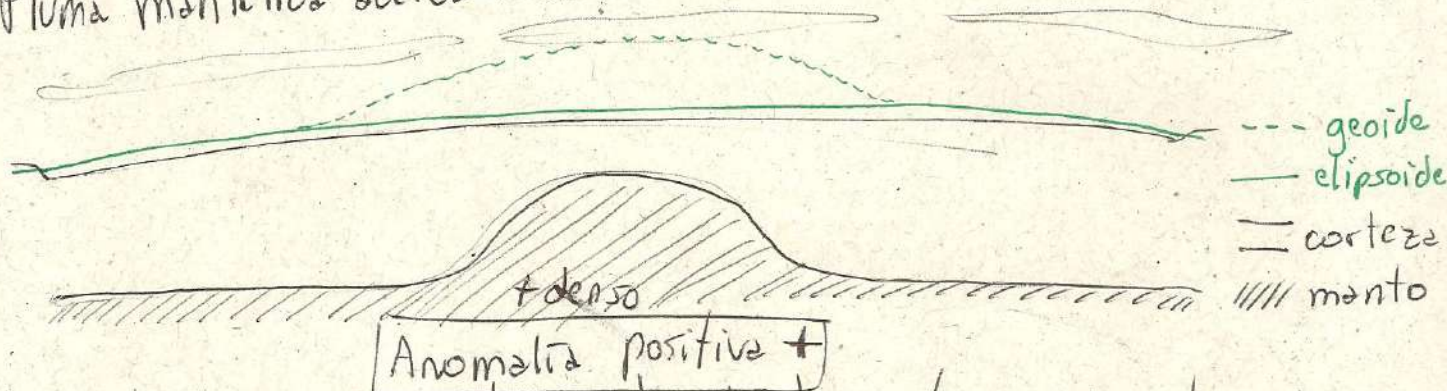
Ejercicio 2

Para cada caso define si se produciría una anomalía positiva (+) o negativa (-) de geoide.

1) Una colisión continental levantó los Himalayas sobre los 8000 msnmm

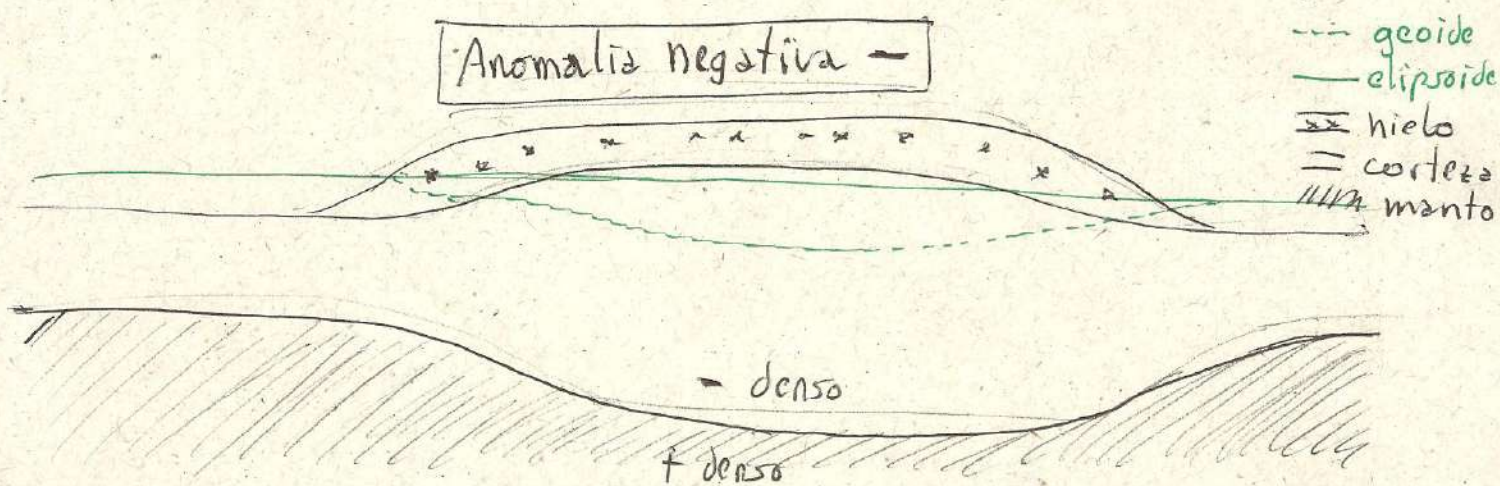


2) Pluma mantélica acerca material más denso a superficie.



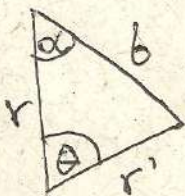
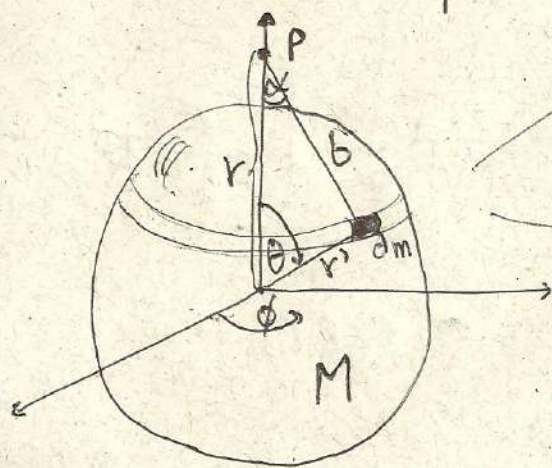
3) Los hielos en zonas polares hunden la corteza, reemplazando manto.

Anomalía negativa -



Ejercicio 3)

¿Cuál es la gravedad producida por una esfera de densidad ρ y radio R sobre un punto P ?



teorema del coseno:

$$b^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta$$

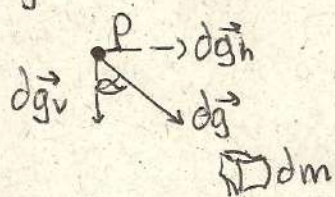
$$r'^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{r^2 + r'^2 - b^2}{2rr'}$$

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb}$$

Ley de gravitación universal: $d\vec{g} = G \frac{dm}{b^2}$ con $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}]$

• Argumento de simetría: Si ρ no depende de ϕ , el vector de gravedad horizontal se anulará con la masa del extremo opuesto, sobreviviendo solo la gravedad vertical.



$$\Rightarrow d\vec{g}_v = G \frac{dm}{b^2} \cos \alpha = G \rho \frac{dV}{b^2} \cdot \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb}$$

$$\vec{g} = \int_V d\vec{g}_v \quad \text{con } dV = r'^2 \sin \theta d\theta d\phi dr'$$

$$g(P) = G \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho}{b^2} \cdot \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb} \cdot r'^2 dr' \sin \theta d\theta$$

$$g(P) = 2\pi G \int_{r-r'}^{r+r'} \int_0^R \frac{\rho}{b^2} \cdot \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{2rb} \cdot r'^2 \cdot \frac{b}{rr'} dr' db$$

c.v.

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} =$$

$$\sin \theta d\theta =$$

$$\frac{b}{rr'} db$$

GF3001

Auxiliar #1

9/8/2019

$$g(P) = \frac{2\pi G}{r^2} \int_{r-r'}^{r+r'} \int_0^R \frac{\rho}{b^2} \cdot \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{r^2} r' dr' db$$

A partir de aquí
asumimos ρ cte.
independiente de r' y θ .

$$g(P) = \frac{2\pi G \rho}{r^2} \int_0^R r' dr' \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{r^2 + b^2 - r'^2}{b^2} db$$

$$g(P) = \frac{G \rho \pi}{r^2} \int_0^R r' dr' \int_{r-r'}^{r+r'} \left[\frac{r^2 - r'^2}{b^2} + 1 \right] db = \frac{G \rho \pi}{r^2} \int_0^R r' \left[\frac{(r^2 - r'^2)}{-b} + b \right]_{r-r'}^{r+r'} dr'$$

$$g(P) = \frac{G \rho \pi}{r^2} \int_0^R r' \left[-\frac{(r^2 - r'^2)}{r+r'} + \frac{(r^2 - r'^2)}{r-r'} + r+r' + (r-r') \right] dr'$$

$$g(P) = \frac{G \rho \pi}{r^2} \int_0^R 4 r' \cdot r' dr' = \frac{4 G \rho \pi}{r^2} \int_0^R r'^2 dr'$$

$$g(P) = G \frac{4\pi \rho}{r^2} \left[\frac{r'^3}{3} \right]_0^R = G \frac{\rho}{r^2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

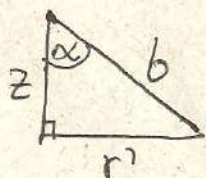
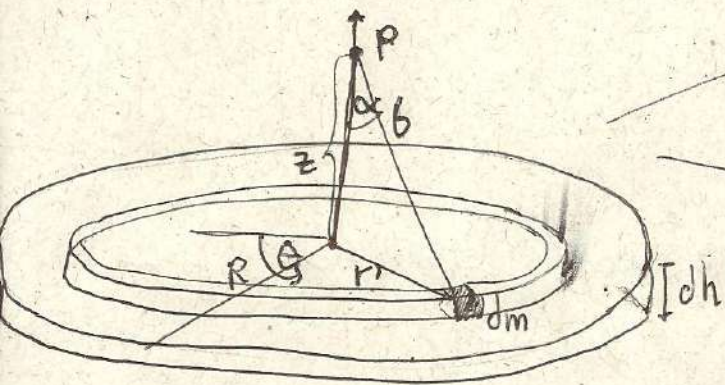
si $M = V \cdot \rho$ con $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volumen esfera)

$$\boxed{g(P) = \frac{GM}{r^2} \quad r > R}$$

Ejercicio 4)

Para una placa circular de densidad ρ , radio R y espesor infinitesimal.

a) Encuentra expresión para la gravedad sobre el eje axial de la placa, a una altura z en P.



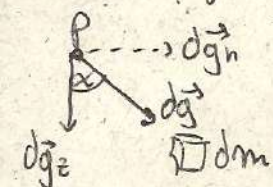
Teorema Pitágoras:

$$b = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

además: $\cos \alpha = \frac{z}{b}$

Ley de gravitación universal: $dg = G \frac{dm}{b^2}$

• Argumento de simetría: componente horizontal de dg se cancela por simetría, mientras ρ no depende de θ . Por lo tanto, solo sobrevive la componente vertical.



$$dg_z = G \frac{dm}{b^2} \cdot \cos \alpha = G \frac{z}{b^3} dm$$

$$g(P) = \int_V dg_z \quad , \quad g(P) = G \int_0^h dh \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho z}{b^3} r' dr'$$

$$dV = r' dr' d\theta dh$$

Desde aquí asumimos ρ cte, independiente de r' .

$$g(P) = G \rho h z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r'}{(\sqrt{r'^2 + z^2})^3} dr'$$

GF3001

Auxiliar #1

9/8/2019

$$g(P) = 2\pi G\rho h z \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right] \Big|_0^R = 2\pi G\rho h z \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{z} \right]$$

$$g(P) = 2\pi G\rho h \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] = 2\pi G\rho h [1 - \cos(\alpha_{\max})]$$

b) ¿Qué sucede si $R \rightarrow \infty$?

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \cos(\alpha_{\max}) \rightarrow 0$$

$$\therefore g(P) = 2\pi G\rho h$$

Resultado conocido como
Placa de Bouguer,

¡independiente de z !

