

Recordar la solución formal para la función de onda de scattering ante un potencial local $V(\mathbf{r})$

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') , \quad (1)$$

donde $U(\mathbf{r}) = (2\mu/\hbar^2)V(\mathbf{r})$. Suponiendo simetría esférica en la interacción, vale decir $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(r)$, resulta práctico adoptar las siguientes expansiones en ondas parciales para las funciones de onda incidente y distorsionada:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) j_l(kr) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) ; \quad (2)$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) . \quad (3)$$

Considere además la siguiente identidad

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \frac{u_l(r)}{r} Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') , \quad (4)$$

donde $r_{<} = \min(r, r')$, y $r_{>} = \max(r, r')$. Además, $h_l^{(1)} = j_l + in_l$, define la función esférica de Hankel, donde j_l y n_l denotan las funciones esféricas de Bessel de 1er tipo y de Neumann, respectivamente. La conversión de fase para n_l es tal que

$$n_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x} .$$

En base a lo anterior, demuestre que la onda parcial $u_l(r)$ satisface la siguiente ecuación integral:

$$\frac{u_l(r)}{r} = j_l(kr) - ik \int_0^{\infty} r' dr' j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}) U(r') u_l(r') . \quad (5)$$