

P2)

Sabemos que:

$$p(\epsilon) \propto e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una partícula tenga una velocidad $\vec{v}$ en un gas ideal es:

$$P(\vec{v}) = A e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}} d^d \vec{v}$$

Con d la dimensión de la caja, determinemos A

$$1 = \int d^d \vec{v} A e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}}$$

$$= A \left(\frac{2kT\pi}{m} \right)^{d/2}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{m}{2kT\pi} \right)^{d/2}$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar una partícula con rapidez v será calculado integrando $P(\vec{v})$ sobre todas las direcciones posibles, como $P(\vec{v})$ depende ~~de~~ sólo de $|\vec{v}|$, hoy que ~~debemos~~ multiplicar $P(\vec{v})$ por el hipervolumen que define un casquete d-ésferico con ancho dv

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}$$

Dicho volumen se calcula como el producto de el área de una d-esfera con dv

$$V^d = \frac{d \pi^{d/2} v^{d-1} dv}{\Gamma(d/2 + 1)}$$

luego, la probabilidad de que una partícula tenga una rapidez v será:

$$\begin{aligned} P(v) &= P(\vec{v}) V^d \\ &= \frac{d \pi^{d/2} v^{d-1}}{\Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{d/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \end{aligned}$$

la densidad de probabilidad derivada es

$$P(v) = \frac{d \pi^{d/2} v^{d-1}}{\Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{d/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

En $d=3$ tenemos la típica distribución de Maxwell-Boltzmann:

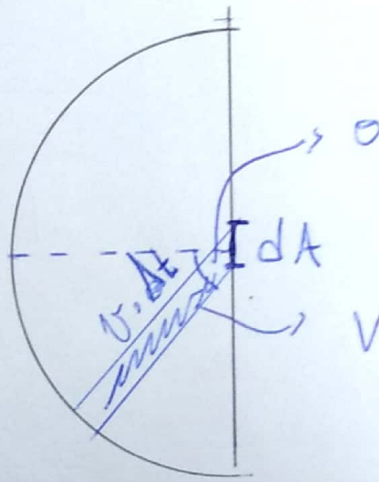
$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Para calcular la presión, primero calculamos la presión parcial que ejercen todos los partículas con rapidez, dando una dirección particular del espacio tenemos que:

la cantidad de colisiones contra un segmento

dA , en un intervalo Δt , de los partículas

que vienen en una dirección particular, dado por un ángulo sólido $d\Omega(\theta, \phi) = \sin(\theta) d\theta d\phi$ será:



$$V = dA \cdot v \Delta t \cdot \cos(\theta)$$

$$dN = \rho_0 \cdot dA \cdot v \cdot \Delta t \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \cos(\theta)$$

ρ_0 : Densidad volumétrica de partículas con rapidez v , la transferencia de momento entre la pared y cada partícula será: $2mv \cos(\theta)$, luego, la transferencia de momento por unidad de ángulo sólido será:

$$\Delta P = 2mv \cos(\theta) dN$$

$$\Delta P = \frac{2 m v^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{4\pi} \cdot \rho v \cdot dA \cdot dt \cdot d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta A} = \frac{m v^2 \rho \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{2\pi} d\phi$$

↓
Presión debida a los partículas que vienen de una dirección dada.

Integrando sobre la semiesfera del dibujo anterior

$$P_{\theta} = \frac{m v^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \rho v \quad \text{Recordemos así la presión parcial}$$

Coloquemos $P_{\theta i}$

$$P_{\theta} = \frac{N}{V} \cdot P(v) \cdot dv = \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$P_{\theta} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot m v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \cdot 4\pi$$

Integrando sobre todas las velocidades obtenemos la presión:

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} m \frac{\Gamma(5/2)}{2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2}} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{e kT}{m} \right) \frac{m}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= \frac{N}{V} kT$$