FI4004-1 Electrodinámica
Profesora: Daniela Mancilla
Auxiliar: Benjamín Pérez **Ayudante:** Lucas González

Control #2

19 de octubre de 2019, duración: 3 horas

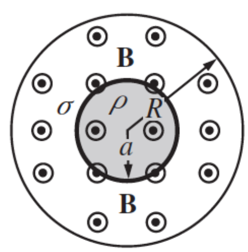
P1. Considere un solenoide cilíndrico infinito de radio R que crea un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ dentro de sí mismo. Un cilindro infinitamente largo de material aislante con radio $a < R$, permeabilidad μ_0 y permitividad ϵ_0, se encuentra dentro (y coaxial) con el solenoide. El cilindro se llena uniformemente con densidad de carga volumétrica $\rho > 0$. Una densidad de carga superficial uniforme σ hace que el cilindro sea eléctricamente neutro.

a) Encuentre el momento angular electromagnético total (por unidad de longitud) del sistema. Considere que el momento angular electromagnético es

$$\vec{L}_{EM} = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r. \quad \text{(3 ptos.)}$$

b) Calcule el torque instantáneo (por unidad de longitud) que actúa sobre el cilindro a medida que el campo magnético se reduce a cero con una dependencia del tiempo $B(t)$. Considere que el torque es $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, donde la fuerza de Lorentz es sólo de origen eléctrico ($\vec{F} = q\vec{E}$), es decir, desprecie la corriente que se origina debido a la rotación del cilindro aislante. (2 ptos.)

c) Calcule el momento angular mecánico final del cilindro. Para ello considere que $d\vec{L}_{mech}/dt = \vec{\tau}$. Comente su resultado. (1 pto.)

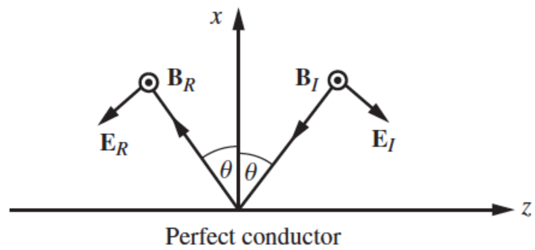


P2. Una onda monocromática de frecuencia ω en el vacío (para $x > 0$), con $E_z > 0$ y $E_x < 0$, incide sobre un conductor perfecto (para $x < 0$) con un ángulo θ (ver figura).

a) Determine los campos eléctrico y magnético en el espacio vacío. (3 ptos.)

b) Calcule las densidad de carga σ, y la densidad de corriente $\vec{K}$, inducidas en la superficie del conductor. ¿Satisfacen la ecuación de continuidad? (2 ptos.)

c) ¿En qué dirección es la fuerza que experimenta la superficie conductora debido a la incidencia de la onda electromagnética? Considere que $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. ¿En qué dirección es la diferencia de densidad momentum electromagnético entre la onda incidente y la onda reflejada? Considere que $\vec{p}_{EM} = \epsilon_0(\vec{E} \times \vec{B})$. Comente. (1 pto.)

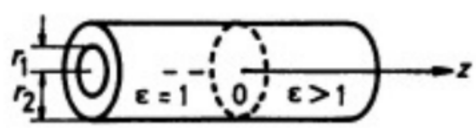


P3. Considere una guía de ondas metálica formada por dos cilindros concéntricos de radios r_1 y r_2, con $r_1 < r_2$. La coordenada z es elegida sobre el eje de los cilindros. Para $z > 0$ la guía está llena con un material de constante dieléctrica $\epsilon/\epsilon_0 > 1$ (y constante magnética igual a la del vacío), para $z < 0$ hay vacío.

a) Calcule las campos eléctricos y magnéticos completos correspondiente a los modos TEM en las dos regiones. Un modo TEM corresponde a considerar que $E_z = 0$ y $B_z = 0$, cuando la onda se propaga en la dirección $\hat{z}$. (3 ptos.)

b) Escriba explícitamente las condiciones de borde que tienen que satisfacer los campos en la interfaz $z = 0$. (1 pto.)

c) Suponga que una onda TEM incide desde $z < 0$. Determine las ondas reflejada y trasmitida, en función de la onda incidente, suponiendo que también son TEM. (2 ptos.)



Coordenadas cartesianas

$$\vec{dl} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$
$$\vec{dS} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{z}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{dl} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\,d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z}$$
$$\vec{dS} = \rho\,d\varphi\,dz\,\hat{\rho} + d\rho\,dz\,\hat{\varphi} + \rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{z}$$
$$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$
$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{z}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho\,F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Teoremas del gradiente, divergencia y rotor:

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{dl} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\varphi = \varphi\left(\vec{r_b}\right) - \varphi\left(\vec{r_a}\right)$$
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$
$$\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{dS} = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$$

Condiciones de borde

$$D_2^n - D_1^n = \sigma_l, \quad E_2^t - E_1^t = 0$$
$$B_1^n = B_2^n, \quad H_2^t - H_1^t = K_l$$

Conservación de la energía

$$\frac{dU_{tot}}{dt} = \frac{d(U_{mech} + U_{EM})}{dt} = -\oint \vec{S}\cdot\hat{n}dS$$
$$U_{mech} = \int \vec{J}\cdot\vec{E}dV$$
$$U_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon_0\int(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B})dV$$
$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}/\mu_0$$

Conservación del momentum lineal

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d(\vec{p}_{mech} + \vec{p}_{EM})}{dt} = \oint \vec{T}\cdot\hat{n}dS$$
$$\vec{p}_{mech} = \int(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})dV$$
$$\vec{p}_{EM} = \epsilon_0\int(\vec{E}\times\vec{B})dV$$
$$T_{ij} = \epsilon_0\left[E_iE_j + c^2B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + c^2B^2)\right]$$

Conservación del momentum angular

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_{mech} + \vec{L}_{EM})}{dt} = -\oint \vec{M}\cdot\hat{n}dS$$
$$\vec{L}_{mech} = \int r\times(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})dV$$
$$\vec{L}_{EM} = \epsilon_0\int r\times(\vec{E}\times\vec{B})dV$$
$$M_{ij} = T_{ik}r_l\epsilon_{jkl}$$