FI4004-1 Electrodinámica
Profesora: Daniela Mancilla
Auxiliar: Benjamín Pérez **Ayudante:** Lucas González

Guía de Relatividad
(Tarea #8: P3 y P6)

Fecha de entrega: 4 de diciembre de 2019

P1. Una onda plana electromagnética en un sistema de referencia inercial K, aparecerá también como una onda plana en un sistema de referencia inercial K'.

a) Demuestre que la ecuación de ondas electromagnética permanece invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

b) Escriba la función de ondas en ambos sistemas e identifique al cuadrivector $\vec{\kappa}$ (asociado al vector de ondas $\vec{k}$ y la frecuencia ω). ¿Cómo se transforman las componentes de este vector entre los dos sistemas?

c) Si la velocidad relativa de K' con respecto a K es $\vec{v}$, y el ángulo entre $\vec{k}$ y $\vec{v}$ es θ, demuestre que la frecuencia medida en K' cambia por efecto Doppler, tal que

$$\omega' = \frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\omega.$$

Esta transformación entrega un efecto incluso para $\theta = \pi/2$ (efecto Doppler transversal).

P2. Se tiene un cable de longitud infinita que tiene densidad de carga λ' y corriente I' uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro.

a) ¿Cuál es la corriente I y la densidad de carga lineal λ medida en el marco del laboratorio cuando el cable se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{z}$ en ese marco?

b) Muestre que, mediante una elección adecuada del marco inercial, se puede reducir el campo magnético del cable a cero o se puede reducir el campo eléctrico del cable a cero. En el primer caso, encuentre la densidad de carga lineal responsable del campo eléctrico restante. En el segundo caso, encuentre la corriente responsable del campo magnético restante. ¿Por qué sólo es posible una de estas opciones?

P3. En el sistema de referencia de laboratorio S, un condensador plano tiene placas cuadradas paralelas de área $A = L^2$, ubicadas a una distancia $h \ll L$ una de la otra. Las placas tienen cargas eléctricas $\pm Q$, distribuidas uniformemente sobre sus superficies, con densidad de carga superficial $\sigma = \pm Q/A$, respectivamente. Evalúe, en un marco de referencia S' que se mueve con respecto a S con velocidad $v = \beta c$ paralela a las placas del condensador,

a) las fuentes de los campos (densidad de carga y corriente);

b) los potenciales escalar y vectorial;

c) los campos eléctrico y magnético en la región entre las placas, usando primero las fuentes y luego los potenciales;

d) la fuerza por unidad de superficie y la fuerza total en cada placa, comparando los resultados con los valores correspondientes en S. Comente.

P4. Un dipolo eléctrico puntual $\vec{p}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ y $\vec{A}' = 0$. El sistema S se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto al sistema de laboratorio S'.

a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{cR^3}, \qquad \vec{A} = \frac{\vec{\beta}(\vec{p}\cdot\vec{R})}{R^3},$$

con $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$, donde $\vec{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

b) Muestre explícitamente que los potenciales satisfacen la condición de Lorentz en S.

c) Muestre que el campo $\vec{E}$ en S es el campo de un dipolo eléctrico (centrado en $\vec{r}_0$), o el campo de un dipolo más campos de mayor orden multipolar que dependen del tiempo, si se ve de un origen fijo, y que el campo magnético es $\vec{B} = \vec{\beta}\times\vec{E}$. ¿Cuál es el momento dipolar magnético efectivo?

P5. Sea el tensor de energía-momentum, en el vacío, definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left[F_{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right].$$

Se sabe que la divergencia de este tensor satisface $\partial_\nu T_{\nu\mu} = -\, f_\mu$, donde $f_\mu = j_\nu F_{\mu\nu} = (\vec{f}, i\vec{J}\cdot\vec{E}/c)$. A partir de ésto, demuestre que se pueden obtener las siguientes leyes de conservación

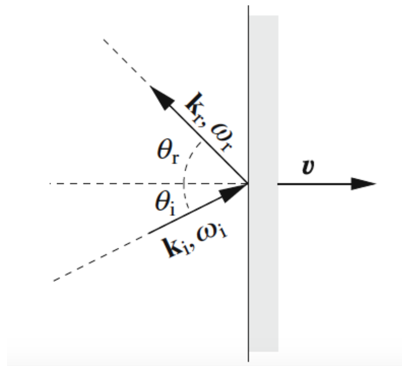
$$\frac{\partial u_{\rm em}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}\,,$$

$$\frac{\partial \vec{p}_{\rm em}}{\partial t} - \nabla\cdot T = -(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})\,.$$

P6. En el marco de laboratorio S, un espejo perfectamente reflectante se mueve con velocidad constante v, perpendicular a su superficie. En S, el vector de onda $\vec{k}_i$ de una onda electromagnética incidente forma un ángulo θ_i con la superficie normal a la del espejo. La onda incidente tiene frecuencia ω_i. Encontrar

a) la frecuencia ω_i de la onda incidente, el ángulo de incidencia θ_i, y el ángulo de reflexión θ_r en el marco S', donde el espejo está en reposo;

b) la frecuencia ω_r de la onda reflejada, y el ángulo de reflexión θ_r, en el marco S. ¿Qué sucede si $\cos\theta_i \gg v/c$?



$\mathbf{k}_r, \omega_r$
θ_r
θ_i
$\mathbf{k}_i, \omega_i$
v