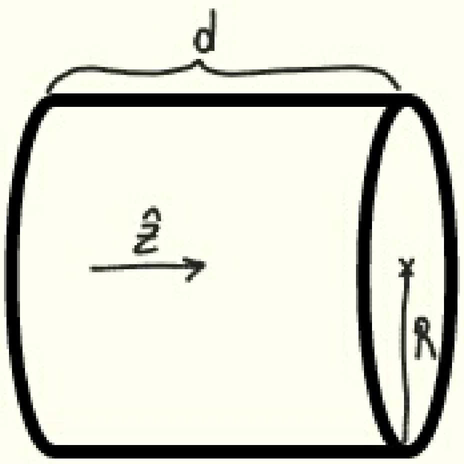
P1



Partimos por un pequeño resumen de guías de onda. Estas consisten en una superficie coductora infinita que se repite en z, es decir como un cilindro pero con cara no necesariamente circular. Si asumimos una dependencia temporal $e^{-i\omega t}$ las ecs. de Maxwell son:

Aplicando rotor a las ecs de los rotores

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = -i\omega\mu\varepsilon \vec{E} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\Rightarrow (\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2)\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0 \quad \Big\} \text{ Ec de ondas}$$

Ahora debido a la geometría de la guía podemos decir que la onda se propaga en z $\Rightarrow \vec{K} = K\hat{z}$ con K positivo o negativo

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\vec{E}(\vec{r})\\ \vec{B}(\vec{r})\end{Bmatrix} e^{i(Kz-\omega t)}$$

y $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ deben ajustarse a las condiciones de borde. Pero estas no dependen de z $\Rightarrow \vec{r}$ se reemplaza por (x,y) o (r,θ) según sea conveniente. Luego la ecuación de onda es posible escribirla como:

$$\left(\nabla_t^2 + \mu\varepsilon\omega^2 - K^2\right)\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0$$

donde ∇_t^2 no incluye z, es decir $\nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Sin embargo algo muy importante, es que las soluciones de la ec. de onda no necesariamente satisfacen las ecs de maxwell. Para asegurarnos se define $\vec{E} = \vec{E}_t + E_z\hat{z}$, $\vec{B} = \vec{B}_t + B_z\hat{z}$ con $\vec{B}_t \cdot \hat{z} = \vec{E}_t \cdot \hat{z} = 0$ y se

REEMPLAZA EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL. ESTO LLEVA A LAS ECUACIONES 8.26 DEL JACKSON:

$$\vec{E}_t = \frac{i}{(\mu\varepsilon\omega)^2 - K^2}\left[K \nabla_t E_z - \omega \hat{z} \times \nabla_t B_z\right]$$

$$\vec{B}_t = \frac{i}{(\mu\varepsilon\omega)^2 - K^2}\left[K \nabla_t B_z + \mu\varepsilon\omega \hat{z} \times \nabla_t E_z\right]$$

$\Rightarrow$ SOLO NECESITAMOS SABER LAS COMPONENTES z

ESTAS ECUACIONES SON LA BASE DE GUÍAS DE ONDA Y SON GENERALES, PUES SOLO SE ASUMIÓ QUE LA GUÍA DE ONDA VA EN z, QUE SU CONTORNO NO DEPENDE DE z Y QUE E_z O B_z SON DISTINTOS DE 0.

AHORA PODEMOS CENTRARNOS EN LA CAVIDAD RESONANTE CIRCULAR, QUE RESOLVEREMOS COMO UNA GUÍA DE ONDA CIRCULAR PERO CON CONDICIONES DE BORDE ADICIONALES EN $z=0$ Y $z=d$, DADAS POR CONDUCTORES IDEALES. ENTONCES PARTIMOS POR CALCULAR LOS MODOS TM DE LA GUÍA DE ONDA CIRCULAR.

PARA MODOS TM: AQUÍ SE CUMPLE $B_z = 0$ Y LA ECUACIÓN DE ONDA PARA LA COMPENTE z DE $\vec{E}$ LA PODEMOS RESOLVER CON SEPARACIÓN DE VARIABLES

$$E_z = R(\rho)T(\phi) \Rightarrow \left(\nabla_t^2 + \mu\varepsilon\omega^2 - K^2\right)E_z = 0 \iff \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho R' T) + \frac{1}{\rho^2} R T'' + (\mu\varepsilon\omega^2 - K^2)RT = 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{\rho}{R}\partial_\rho(\rho R') + \rho^2 \underbrace{(\mu\varepsilon\omega^2 - K^2)}_{K_c}}^{n^2} + \overbrace{\frac{T''}{T}}^{-n^2} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} R(\rho) &= A J_n(K_c\rho) + B N_n(K_c\rho) \\ T(\phi) &= C\cos n\phi + D\sin(n\phi) \end{aligned}$$

PERO N_n LA FUNCIÓN DE NEUMANN DIVERGE EN $\rho = 0$ ASÍ QUE $B = 0$

$$\Rightarrow \quad E_z(\rho,\phi) = J_n(K_c\rho)\Big(C\cos(n\phi) + D\sin(n\phi)\Big) \equiv F J_n(K_c\rho)\sin(n\phi+\phi_0)$$

Porque $C\cos(n\phi) + D\sin(n\phi)$ siempre se puede escribir como $F\sin(n\phi+\phi_0)$ y ϕ_0 basicamente no significa solo rota a los eje x e y.

Ahora imponemos las condiciones de borde que son $E^{\parallel} = B^{\perp} = 0$, es decir $E_z = E_\phi = B_\rho = 0$ para $\rho = R$. Si usamos las ecuaciones para $\vec{E}_t$ y $\vec{B}_t$:

$$E_\rho = \frac{i}{K_c^2}\left(K\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\omega}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \phi}\right) \qquad E_\phi = \frac{i}{K_c^2}\left(\frac{K}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial \phi}\right)$$

$$B_\rho = \frac{i}{K_c^2}\left(K\frac{\partial B_z}{\partial \rho} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}\right) \qquad B_\phi = \frac{i}{K_c^2}\left(\frac{K}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} + \mu\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)$$

Lo cual se simplifica pues $B_z = 0$. Con esto observamos que:

$$E_z(R,\phi) = 0 \Rightarrow J_n(K_cR) = 0$$

$$E_\phi(R,\phi) = 0 \Rightarrow \frac{i}{K_c^2}\frac{K}{R} F J_n(K_cR) n\cos(n\phi+\phi_0) = 0 \Rightarrow J_n(K_cR) = 0$$

$$B_\rho(R,\phi) = 0 \Rightarrow \frac{i}{K_c^2}\cdot -\frac{\mu\varepsilon\omega}{R} F J_n(K_cR) n\cos(n\phi+\phi_0) \Rightarrow J_n(K_cR) = 0$$

Luego todas las condiciones de borde se satisfacen simultaneamente si es que $J_n(K_cR) = 0 \Rightarrow K_c = \frac{x_{nm}}{R}$ donde x_{nm} es el m-esimo 0 de la función $J_n(x)$. Con esto tenemos la solución a la guía de onda sin tapas.

Entonces, qué produce que ahora hayan tapas en la guía? Debido a que la onda se refleja en la tapa conductora ahora nuestra solución incluira una onda con $K>0$ y otra con $K'<0$ $(K'=-K)$.

$$\Rightarrow \quad E_z^{nm} = \underbrace{J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin(n\phi+\phi_0)}_{\text{término asociado a las C.B.}} e^{-i\omega t}\left(Fe^{ikz}+F_Re^{-ikz}\right)$$

En otras palabras lo que hicimos antes fue determinar la forma de la onda para que se propague por la guía, es decir para que cumplan las condiciones de borde. Una vez hecho esto, cualquier condición en el eje z la podemos ver como independiente y solo aplicar las soluciones que trabajamos antes para ondas libres al cambiar de medio.

$$\Rightarrow \quad E_\rho = \frac{i}{K_c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin(n\phi+\phi_0)e^{-i\omega t}\right)\cdot K\left(Fe^{iKz}\overbrace{-}^{\text{signo - del } K}F_Re^{-ikz}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_\rho\Big|_{z=0} = 0 \quad\Rightarrow\quad F-F_R=0 \quad\Rightarrow\quad E_\rho\Big|_{z=d}=0 \quad\Rightarrow\quad \sin(Kd)=0$$

$\Rightarrow K = \frac{l\pi}{d}$ con lo cual concluimos que $K_c^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - K^2$ podemos escribirlo como:

$$\left(\frac{x_{nm}}{R}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \omega_{lnm} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{x_{nm}}{R}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2\right]^{1/2}$$

con $n,l = 0,1\ldots$ y $m=1,\ldots$

Con esto el campo nos queda:

$$E_z^{\ell nm} = F\, J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin(n\phi+\phi_0)\, e^{-i\omega_{\ell nm} t}\underbrace{\left(\underset{\text{transmitida}}{e^{i\frac{\ell\pi}{d}z}} + \underset{\text{reflejada}}{e^{-i\frac{\ell\pi}{d}z}}\right)}_{2\cos\left(\frac{\ell\pi}{d}z\right)}$$

y los otros campos los determinamos con las ecuaciones

$$E_\rho = \frac{i}{K_c^2}\left(K\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + \frac{\omega}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\phi}\right) \qquad E_\phi = \frac{i}{K_c^2}\left(\frac{K}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial\phi}\right)$$

$$B_\rho = \frac{i}{K_c^2}\left(K\frac{\partial B_z}{\partial\rho} - \frac{\mu\varepsilon\omega}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}\right) \qquad B_\phi = \frac{i}{K_c^2}\left(\frac{K}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\phi} + \mu\varepsilon\omega\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)$$

Teniendo cuidado de en los términos con K, porque hay que agregar un signo menos si es es que se trata de la onda reflejada.

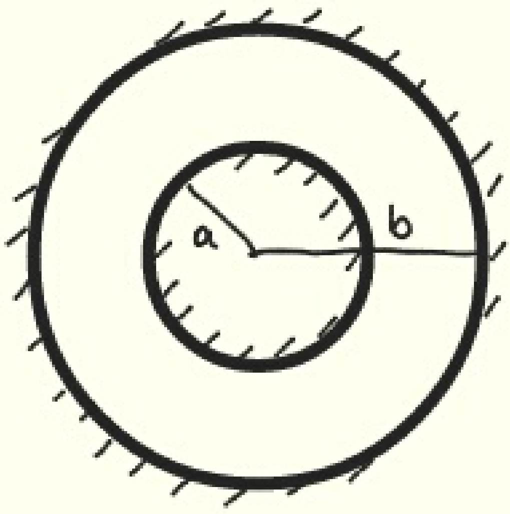
$$E_\rho = F\frac{-1}{K_c^2}\cdot\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)\cdot\frac{x_{nm}}{R}J_n'\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin(n\phi+\phi_0)\sin\left(\frac{\ell\pi z}{d}\right)$$

$$E_\phi = F\frac{-1}{K_c^2}\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)\cdot\frac{n}{\rho}J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\cos(n\phi+\phi_0)\sin\left(\frac{\ell\pi z}{d}\right)$$

$$B_\rho = F\frac{-i}{K_c^2}\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)\cdot\frac{n}{\rho}J_n\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\cos(n\phi+\phi_0)\cos\left(\frac{\ell\pi z}{d}\right)$$

$$B_\phi = F\frac{i}{K_c^2}\cdot\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)\cdot\frac{x_{nm}}{R}J_n'\left(x_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin(n\phi+\phi_0)\cos\left(\frac{\ell\pi z}{d}\right)$$

P_2



a) Buscamos los modos TEM, para ello las ecuaciones de la P1 no sirven pues $E_z = B_z = 0$, así que debemos volver al inicio. Suponemos que los campos son:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\rho,\phi)e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0(\rho,\phi)e^{i(kz-\omega t)}$$

Donde $\vec{E}_0 \cdot \hat{z} = \vec{B}_0 \cdot \hat{z} = 0$ para que la onda sea TEM. Luego como vimos en el auxiliar anterior, podemos considerar a $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ en 2D y las ecs de Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nos llevan a:

de la componente z de $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \nabla \times \vec{E}_0 = 0$ y por lo tanto el problema es como un problema electrostatico efectivo en $\vec{E}_0$, porque $\nabla \times \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 = -\nabla\phi$ y $\nabla \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0$. De hecho es como un condensador cilindrico. Supongamos ϕ_a y ϕ_b, los valores del potencial en el cilindro son distintos, pues de lo contrario $\phi = cte$ sera solución y no habra campo. En dicho caso debemos pensar que hay una carga encerrada en el cilindro interno

$$\Rightarrow E_\rho \cdot 2\pi\rho L = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_{enc}}{2\pi\rho L\varepsilon}\hat{\rho} \Rightarrow \vec{E}_{\rho=a} \cdot \hat{\rho} \equiv E_0 = \frac{Q_{enc}}{2\pi a L\varepsilon}\hat{\rho} \Rightarrow \vec{E} = E_0 \frac{a}{\rho}\hat{\rho}$$

Luego $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow E_0 \frac{a}{\rho} ik\hat{\phi} = +i\omega B_\phi \hat{\phi} \Rightarrow \vec{B} = E_0 \frac{ak}{\rho\omega}\hat{\phi}$

Con esto tenemos los campos.

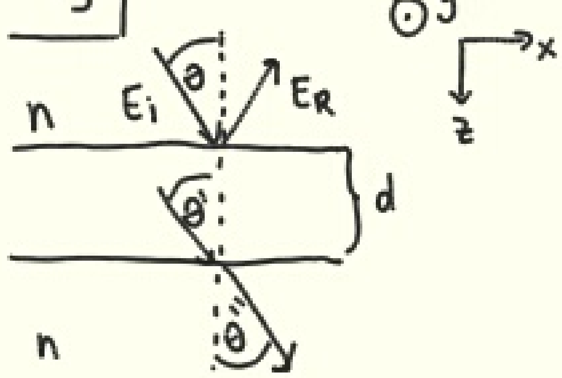
b) LA potencia la calculamos como $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\{ E \times \vec{H}^* \}$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\left\{ E_0^2 \cdot \frac{a^2}{\rho^2} \frac{K}{\omega\mu} \right\} \Rightarrow P = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot ds = \frac{E_0^2}{2\omega\mu} a^2 K \int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow P = \frac{E_0^2 a^2 K}{\omega\mu} \pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$ y como $\frac{\omega}{K} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 a^2 \pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

P3



a) En base a la ley de Snell $n\sin\theta = n\sin\theta'' \Rightarrow \theta = \theta''$, pero se cumple la ley de Snell en este problema? Veamoslo en detalle escribiendo los campos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{y}\left(E_i e^{i[k(\cos\theta z + \sin\theta x) - \omega t]} + E_R e^{i[k(\sin\theta x - \cos\theta z) - \omega t]}\right) & z<0 \\ \hat{y}\left(A e^{i[k'(\cos\theta' z + \sin\theta' x) - \omega t]} + B e^{i[k'(\sin\theta' x - \cos\theta' z) - \omega t]}\right) & 0<z<d \\ \hat{y}\, E_t e^{i[k(\cos\theta'' z + \sin\theta'' x) - \omega t]} & d<z \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} k\cos\theta\,\hat{z}\left(E_i e^{i[k(\cos\theta z + \sin\theta x) - \omega t]} - E_R e^{i[k(\sin\theta x - \cos\theta z) - \omega t]}\right) & \\ \quad + k\sin\theta\,\hat{x}\left(E_i e^{i[k(\cos\theta z + \sin\theta x) - \omega t]} + E_R e^{i[k(\sin\theta x - \cos\theta z) - \omega t]}\right) & z<0 \\ k'\underbrace{\cos\theta'}_{\text{imaginario}}\,\hat{z}\left(A e^{i[k'(\cos\theta' z + \sin\theta' x) - \omega t]} - B e^{i[k'(\sin\theta' x - \cos\theta' z) - \omega t]}\right) & \\ \quad + k'\sin\theta'\,\hat{x}\left(A e^{i[k'(\cos\theta' z + \sin\theta' x) - \omega t]} + B e^{i[k'(\sin\theta' x - \cos\theta' z) - \omega t]}\right) & 0<z<d \\ kE_t\left(\cos\theta''\hat{z} + \sin\theta''\hat{x}\right) E_t e^{i[k(\cos\theta'' z + \sin\theta'' x) - \omega t]} & d<z \end{cases}$$

Recuerden que como $\sin\theta' > 1$ (reflexión total interna) $\cos\theta' = (1-\sin^2\theta_i)^{1/2}$ sera imaginario y entonces en $0<z<d$ las exponenciales seran reales.

Entonces, la ley de Snell se deduce de que las condiciones de borde se deben cumplir independientes del punto en el eje x donde ocurre la incidencia $\Rightarrow k\sin\theta = k'\sin\theta' = k\sin\theta''$ y todo bien. Que $\sin\theta' > 1$ y por lo tanto $\cos\theta'$ sea imaginario no cambia nada.

b) PARA ESTO, LOS CAMPOS DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES DE BORDE $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$, $B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$ y $H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$ EN LAS DOS SUPERFICIES. LA CONDICIÓN SOBRE $B^{\perp}$ ES REDUNDANTE CON LA LEY DE SNELL (AUXILIAR 6). LAS OTRAS CONDICIONES SON:

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \Rightarrow E_i + E_R = A + B \quad ; \quad A e^{ik'\cos\theta' d} + B e^{-ik'\cos\theta' d} = E_t$$

$$H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel} \Rightarrow K\cos\theta\,(E_i - E_R) = K'\cos\theta'\,(A - B) \quad ; \quad K'\cos\theta'\left(A e^{ik'\cos\theta' d} - B e^{-ik'\cos\theta' d}\right) = K\cos\theta\, E_t$$

$$\text{y si } \eta = \frac{K\cos\theta}{K'\cos\theta'} \Rightarrow 2A e^{ik'\cos\theta' d} = E_t(1+\eta) \quad ; \quad 2B e^{-ik'\cos\theta' d} = E_t(1-\eta)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E_i + E_R &= \frac{E_t}{2}\left[(1+\eta)e^{-ik'\cos\theta' d} + (1-\eta)e^{ik'\cos\theta' d}\right] \\ \eta(E_i - E_R) &= \frac{E_t}{2}\left[(1+\eta)e^{-ik'\cos\theta' d} - (1-\eta)e^{ik'\cos\theta' d}\right] \end{aligned}$$

$$E_i = \frac{E_t}{4}\left[e^{-ik'\cos\theta' d}\left(1+\eta+\frac{1}{\eta}+1\right) + e^{ik'\cos\theta' d}\left(1-\eta-\frac{1}{\eta}+1\right)\right]$$

$$E_R = \frac{E_t}{4}\left[e^{-ik'\cos\theta' d}\left(\cancel{1}+\eta-\frac{1}{\eta}-\cancel{1}\right) + e^{ik'\cos\theta' d}\left(\cancel{1}-\eta+\frac{1}{\eta}-\cancel{1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E_R}{E_i} = \frac{\left[e^{-ik'\cos\theta' d}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right) + e^{ik'\cos\theta' d}\left(-\eta+\frac{1}{\eta}\right)\right]}{\left[e^{-ik'\cos\theta' d}\left(1+\eta+\frac{1}{\eta}+1\right) + e^{ik'\cos\theta' d}\left(1-\eta-\frac{1}{\eta}+1\right)\right]}$$

PORQUE $\cos\theta'$ ES IMAGINARIO

NOTAMOS QUE PARA $d \to 0 \to E_R = 0$ y QUE PARA $d \to \infty$, $E_t = 0$ LO CUAL CORRESPONDE CON LO QUE PODRÍAMOS ESPERAR.