FI4004-1 Electrodinámica
Profesora: Daniela Mancilla
Auxiliar: Benjamín Pérez **Ayudante:** Lucas González

Guía Control #2

P1. Este problema es una extensión de la P2 de la Tarea #5. Se tiene un solenoide, de radio R y de n vueltas por unidad de largo, que conduce una corriente I. Coaxiales al solenoide, hay dos casquetes cilíndricos de radios a y b ($a < R < b$). El cilindro interno tiene una carga $+Q$ mientras que el externo tiene carga $-Q$. Ambos cilindros tienen largo l. La corriente comienza a reducirse gradualmente y producto del campo eléctrico inducido por esta disminución, lo cilindros comienzan a moverse. Se concluyó que el momentum angular estaba almacenado en el campo electromagnético pero no se consideró que queda un residuo de momento angular en los campos, asociado al campo magnético que generan las cargas de los cilindros al girar. Calculemos esta corrección.

a) Calcule el momento angular final almacenado en el campo electromagnético, en términos de ω_a y ω_b, las velocidades angulares de los cilindros.

b) En cuanto los cilindros comienzan a girar, el cambio en el campo magnético induce un campo eléctrico azimutal extra que tendrá una contribución en el torque que sienten los cilindros. Calcule la variación del momento angular asociada, y compare con el resultado obtenido en *a*).

P2. Calcule la fuerza de atracción entre el hemisferio norte y el hemisferio sur de un cascarón esférico uniformemente cargado con radio R, velocidad angular ω y densidad σ. Este cálculo se puede hacer usando el tensor de Maxwell o bien usando explíicitamente la fuerza de Lorentz, intente hacerlo de ambas formas. Ojo que al hacer el cálculo con el tensor de Maxwell hay dos superficies convenientes que se pueden tomar para llevar a cabo la integración de la fuerza.

P3. Encuentre todos los elementos del tensor de Maxwell T_{ij} para una onda plana monocromática viajando en la dirección $\hat{z}$ y linealmente polarizada con el campo eléctrico apuntando en $\hat{x}$. Interprete el resultado recordando que $\mathbf{T}$ puede entenderse como un flujo de densidad de momento lineal.

P4. Una onda plana $\vec{E} = \vec{E}_i e^{i(kx-\omega t)}$ incide normalmente en la superficie de un buen conductor ($g \gg \omega\epsilon_0$) con grosor D. Asumiendo que en el espacio vacío y el conductor $\mu/\mu_0 = \epsilon/\epsilon_0 = 1$, discuta la reflexión y transmisión de ondas.

a) Muestre que las amplitudes (complejas) de los campos eléctricos reflejados y transmitidos vienen dados por

$$E_t = \frac{2\gamma e^{-\lambda}}{(1-e^{-2\lambda}) + \gamma(1+e^{-2\lambda})} E_i,$$

$$E_r = \frac{-(1-e^{-2\lambda})}{(1-e^{-2\lambda}) + \gamma(1+e^{-2\lambda})} E_i.$$

Con $\gamma = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{g}}(1-i) = \frac{\omega\delta}{c}(1-i)$, $\lambda = (1-i)D/\delta$, y $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu g)}$ la longitud de penetración.

b) Verifique lo que sucede si el grosor tiende a cero o a infinito.

c) Muestre que el coeficiente de transmisión para un grosor muy pequeño es:

$$T = \frac{8(\operatorname{Re}\gamma)^2 e^{-2D/\delta}}{1 - 2e^{-2D/\delta}\cos(2D/\delta) + e^{-4D/\delta}}.$$

P5. *a*) Calcule la densidad de carga inducida σ_{TM} y la densidad de corriente longitudinal inducida $\vec{K}_{TM}$ asociados a la propagación del modo TM en una guía de ondas de sección transversal uniforme. Muestre que $\hat{K}_{TM} = v_p \sigma_{TM} \hat{z}$, donde v_p es la velocidad de fase de la onda propagándose en la dirección $\hat{z}$.

b) Calcule la densidad de carga inducida σ_{TE} y la densidad de corriente inducida $\vec{K}_{TE}$ asociados a la propagación del modo TE en una guía de ondas de sección transversal uniforme. Muestre que $\hat{z} \cdot K_{TE} = v_g \sigma_{TE}$, donde v_g es la velocidad de grupo de la onda.

c) Muestre que en el caso TE, aparece una componente de la corriente en la dirección transversal ($\hat{\tau} = \hat{n} \times \hat{z}$).

d) Muestre que la corriente superficial y la carga superficial satisfacen la ecuación de continuidad para ambos modos, TE y TM.

P6. Estudie los modos de propagación de una guía de ondas de sección circular de radio R. Determine:

a) Los campos para todos los modos TE y TM.

b) Las frecuencias de corte, las velocidades de fase y de grupo. ¿Cuáles son los tres modos más bajos?

c) Teniendo en cuenta que la sección de la guía tiene simetría azimutal, ¿cómo puede ser que existan modos sin esta simetría?

d) Considere ahora que la guía de ondas se cierra con paredes conductoras en $z = 0$ y $z = L$, es decir, considere una cavidad resonante cilíndrica. Encuentre el modo de resonancia fundamental TM y TE.