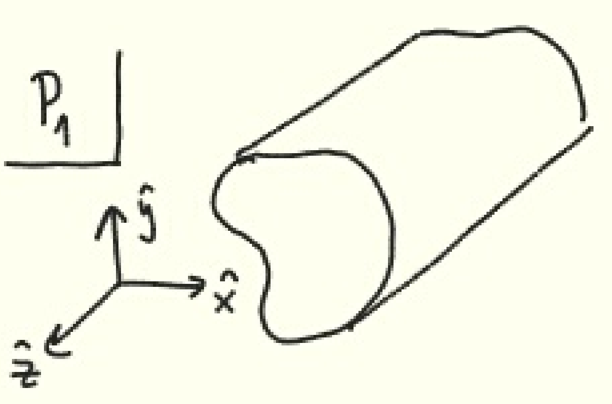
P1



Queremos demostrar que no existen modos TEM en guías de onda con una única superficie conductora arbitraria. Como la onda se propaga en z los campos son de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(x,y)\,e^{i(kz-\omega t)}$$

Donde $\vec{E}(x,y)$ y $\vec{B}(x,y)$ deben depender de x e y para satisfacer las condiciones de borde con el conductor, que son $B^{\perp} = E^{\parallel} = 0$ en la superficie del conductor. No podemos decir lo mismo para $D^{\perp}$ y $H^{\parallel}$ pues habran cargas y corrientes superficiales.

Ahora digamos que $\vec{E}(x,y) = E_x\,\hat{x} + E_y\,\hat{y} + E_z\,\hat{z}$ y $\vec{B}(x,y) = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$ y para que la onda sea TEM, $E_z = B_z = 0$. Luego usando las ecuaciones de Maxwell $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ y $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ podemos llegar a las ecuaciones:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad ; \quad (\nabla\times\vec{E})_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Donde de $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ solo use la componente z. Con esto concluimos que $\vec{E}(x,y)$ es un vector con divergencia y rotor nulos y por lo tanto $\vec{E} = -\nabla\phi$ con $\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi = 0$. Sin embargo, como solo hay una superficie conductora equipotencial, $\phi = C$ con C el valor de ϕ en la superficie conductora es solución y gracias a la unicidad obtenemos $\vec{E} = 0$, es decir que no hay ondas y por lo tanto no se pueden propagar modos TEM.

P2 En una guía de onda hueca cuando $\vec{K} = K\hat{z}$ se cumplen las ecs:

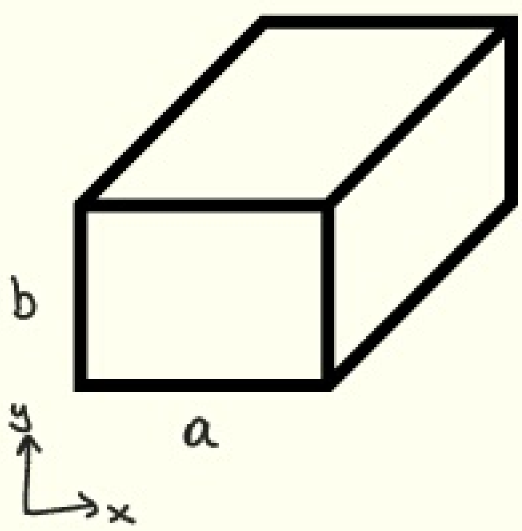
$$E_x = \frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2}\left(K\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) \qquad E_y = \frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2}\left(K\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$

$$B_x = \frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2}\left(K\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \qquad B_y = \frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2}\left(K\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2\right\}E_z = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2\right\}B_z = 0$$

y la solución debe cumplir las condiciones de borde $B^{\perp} = E^{\parallel} = 0$.

En este problema trabajaremos con ondas TE, es decir $E_z = 0$ y además con una guía de onda rectangular de lados a y b.



Se propone $B_z(x,y) = X(x)Y(y)$ lo cual reemplazando en la ecuación para B_z

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2\right]XY = 0 \quad / \cdot \frac{1}{XY}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -K_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -K_y^2 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2 - K_x^2 - K_y^2 = 0$$

y las condiciones de borde son $B_x(x=0) = B_x(x=a) = B_y(y=0) = B_y(y=b) = 0$ lo cual, como se vio en clases da la solución general:

$$B_z^{nm} = B_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad \text{con } n,m = 0,1,2,\ldots \quad \text{y } K_x = \frac{m\pi}{a}, \; K_y = \frac{n\pi}{b}$$

Algo importante es que n y m no pueden ser 0 simultaneamente, porque $K_x = K_y = 0$ y entonces $K^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ y se indeterminan las ecuaciones que plantie al inicio. El resultado corresponde al campo magnetico de los modos TE_{nm}

a) La relación de dispersión $K(\omega)$ la obtenemos de la EDP:

$$K^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \Rightarrow K = \pm \frac{1}{c}\left\{\omega^2 - \left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2\right\}^{1/2} = \pm\frac{1}{c}\left(\omega^2 - \omega_{nm}^2\right)^{1/2}$$

con $\omega_{nm}^2 = \left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2$. Si $\omega^2 < \omega_{nm}^2$ K es imaginario y por lo tanto la onda decae, por lo que ω_{nm} es una especie de frecuencia de corte. Luego v_f y v_g las velocidades de fase y de grupo son:

$$v_f = \frac{\omega}{K} = \frac{c}{\left(1 - (\omega_{nm}/\omega)^2\right)^{1/2}} \quad y \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K} = \left(\frac{\partial K}{\partial \omega}\right)^{-1} = \frac{c}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_{nm}^2\right)^{1/2} = c\left(1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}$$

Notamos que para ω mayor a la frecuencia de corte $v_f > c$ y $v_g < c$ por eso es interesante saber si la energía se transmite con v_f o v_g

b) Para demostrar esto calcularemos la energía por unidad de tiempo y de largo en z y las dividiremos, con lo cual obtenemos:

$$\frac{dU}{dt} \Big/ \frac{dU}{dz} = \frac{dz}{dt} \equiv \text{velocidad de transmisión de la energía}$$

y además del teorema de Poynting $\frac{dU}{dt} = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a}$ y $\frac{dU}{dz} = \int \langle u \rangle dx dy$ donde $\langle S \rangle = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$ y $\langle u \rangle = \frac{1}{4} Re\{\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*\}$. Entonces usando las expresiones para los campos obtenemos:

$$E_x = \frac{-i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2} B_0 \omega K_y \cos(K_x x) \sin(K_y y) \qquad E_y = \frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2} B_0 \omega K_x \sin(K_x x) \cos(K_y y)$$

$$B_x = \frac{-i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2} B_0 K K_x \sin(K_x x) \cos(K_y y) \qquad B_y = \frac{-i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2} B_0 K K_y \cos(K_x x) \sin(K_y y)$$

$$B_z = B_0 \cos(K_x x) \cos(K_y y) \qquad E_z = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \langle S_z \rangle dx dy = \frac{1}{2\mu_0} Re\{E_x B_y^* - E_y B_x^*\}$$
$$= \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{B_0^2 K \omega}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^2} \left(K_y^2 \cos^2(K_x x) \sin^2(K_y y) + K_x^2 \sin^2(K_x x) \cos^2(K_y y)\right) dx dy$$

$$\langle u \rangle dx dy = \frac{1}{4} \left(\varepsilon_0 (|E_x|^2 + |E_y|^2) + \frac{1}{\mu_0} (|B_x|^2 + |B_y|^2 + |B_z|^2) \right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{B_0^2}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^2} \Big(\varepsilon_0 \omega^2 (K_x^2 \cos^2(K_x x) \sin^2(K_y y) + K_y^2 \sin^2(K_x x) \cos^2(K_y y)) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\mu_0} \cos^2(K_x x) \cos^2(K_y y) \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2 \right]^2 + \frac{K^2}{\mu_0} \left(K_x^2 \sin^2(K_x x) \cos^2(K_y y) + K_y^2 \cos^2(K_x x) \sin^2(K_y y) \right) \Big)$$

y ahora integramos en la sección transversal de la guía y lo bueno es que todas estas funciones trigonometricas integran $\frac{ab}{4}$ (se calcula con las identidades $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ y $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$)

$$\Rightarrow \int \langle \vec{s} \rangle \cdot da = \frac{1}{2\mu_0} \frac{B_0^2 K \omega}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^2} \cdot \frac{ab}{4} (K_x^2 + K_y^2)$$

$$\int \langle u \rangle da = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 B_0^2}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^2} \frac{ab}{4} \left(\omega^2 (K_x^2 + K_y^2) + c^2 \left(\left[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2 \right]^2 + K^2 (K_x^2 + K_y^2) \right) \right]$$

y ahora como $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2 = K_x^2 + K_y^2$, podemos simplificar:

$$\int \langle u \rangle da = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 B_0^2}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^{\cancel{2}}} \frac{ab}{4} (\cancel{K_x^2 + K_y^2}) \left[\omega^2 + c^2 \left(\overbrace{K_x^2 + K_y^2 + K^2}^{(\omega/c)^2} \right) \right]$$

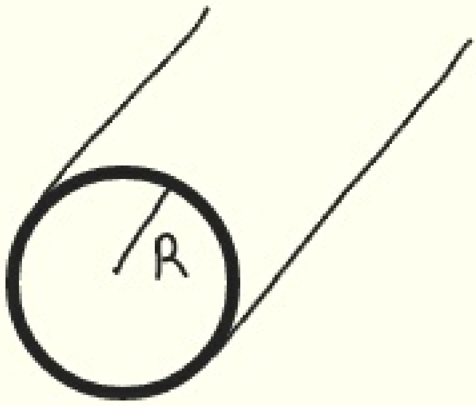
$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 B_0^2}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]} \frac{ab}{4} \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dt} \Big/ \frac{dU}{dz} = \frac{dz}{dt} = \frac{\int \langle \vec{S} \rangle \cdot da}{\int \langle u \rangle da} = \frac{\omega K}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2} = \frac{Kc^2}{\omega} = c^2 \left(\frac{c}{\left(1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}} \right)^{-1}$$

$$= c \left(1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2 \right)^{1/2} = v_g$$

Con lo cual concluimos que la velocidad con la que se desplaza la energía corresponde a la velocidad de grupo y por lo tanto es menor que c y entonces todo esta en orden :)

P3



a) Para estudiar la atenuación de la energía transmitida por la onda calcularé la disipación debido al efecto Joule.

$$P = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV \; \Big\} \text{ potencia disipada}$$

En este caso integraremos solo dentro del conductor pues es donde hay corrientes y por lo tanto necesitamos calcular $\vec{E}_c$ el campo dentro del conductor. Si despreciamos la corriente de desplazamiento en la ecuación para el rotor de $\vec{H}$ y además asumimos una cierta frecuencia las ecs de Maxwell dentro del conductor son:

$$\nabla\times\vec{H}_c = g\,\vec{E}_c \qquad ; \qquad \nabla\times\vec{E}_c = -\frac{\partial\vec{B}_c}{\partial t} = i\omega\mu_c\vec{H}_c$$

μ_c: permeabilidad magética del conductor

$$\Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{H}_c) = g\,\nabla\times\vec{E}_c = i\omega\mu_c g\,\vec{H}_c \Rightarrow \nabla^2\vec{H}_c + \frac{2i}{\delta^2}\vec{H}_c = 0 \qquad \delta = \left(\frac{2}{\mu_c\omega g}\right)^{1/2}$$

Ecuación que asumiendo que $\vec{H}_c$ solo depende de la coordenada normal a la superficie (ξ) se puede resolver (Tarea 6, también lo pueden ver en el capitulo 8.1 del Jacksón). Esto corresponde a reemplazar ∇ por $-\hat{n}\frac{\partial}{\partial\xi}$ y entonces:

$$\begin{aligned}\vec{E}_c &\simeq -\frac{1}{g}\hat{n}\times\frac{\partial\vec{H}_c}{\partial\xi}\\ \vec{H}_c &= \frac{i}{\mu_c\omega}\hat{n}\times\frac{\partial\vec{E}_c}{\partial\xi}\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&n\cdot\vec{H}_c = 0\\ &\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\hat{n}\times\vec{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2}(\hat{n}\times\vec{H}_c) = 0\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$\vec{H}_c = \vec{H}_{\parallel} e^{\frac{(i-1)}{\delta}\xi - i\omega t} \Rightarrow \vec{E}_c \approx -\frac{1}{\sigma\delta}(i-1)(\hat{n}\times\vec{H}_{\parallel})\, e^{\frac{i-1}{\delta}\xi - i\omega t}$$

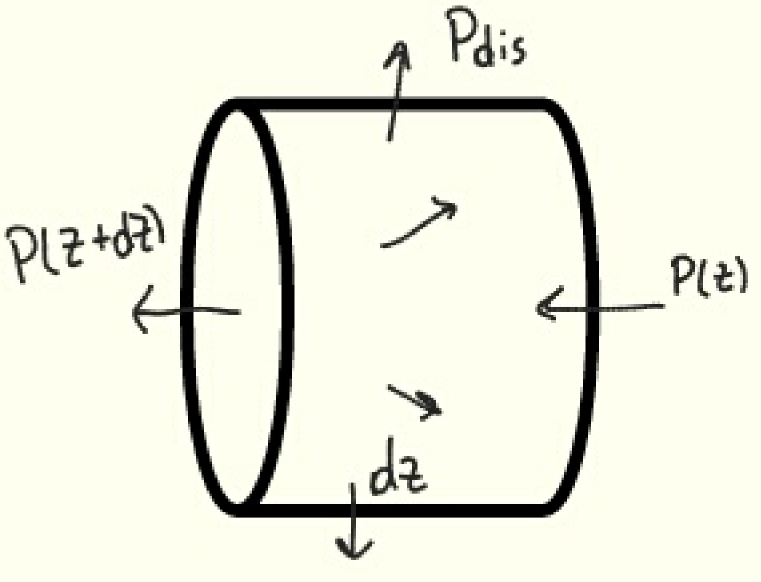
Donde $\vec{H}_{\parallel}$ es el valor de $\vec{H}$ tangencial en la superficie, pero fuera del conductor. Además las evoluciones temporales fueron agregadas

Con esto podemos calcular la media temporal de la potencia disipada con la fórmula $\langle Re(\vec{J})\cdot Re(\vec{E})\rangle = \frac{1}{2} Re(\vec{J}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\sigma|\vec{E}_c|^2$

$$\Rightarrow \langle P_{dis}\rangle = \int\langle p\rangle dV = \int da \int_0^\infty d\xi \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sigma}\cdot\frac{1}{\sigma^{\cancel{2}}\delta^2}\cdot\cancel{2}\,|\hat{n}\times\vec{H}_{\parallel}|^2 e^{-2\xi/\delta}$$

$$= \int da \frac{1}{\sigma\delta^2}|\vec{H}_{\parallel}|^2 \cdot -\frac{\delta}{2} e^{-\frac{2\xi}{\delta}}\Big|_0^\infty = \int da \frac{1}{2\sigma\delta}|H_{\parallel}|^2$$

Es decir en nuestra aproximación la potencia total disipada solo del campo en la superficie. Además notamos que $\langle P_{dis}\rangle \sim \sigma^{-1/2}$ por lo que para un conductor ideal recuperamos el hecho de que la onda se transmite sin atenuarse. Bueno hasta aquí, poco es nuevo, pero ahora podemos usar la conservación de la energía en un cilindro de alto dz



$$\Rightarrow P(z+dz) - P(z) = -dz\int J\cdot E\, ds$$

integral en la superficie de la guía

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\int J\cdot E\, ds = \frac{-1}{2\sigma\delta}\oint_C |H_{\parallel}|^2 dl$$

Por último si supones que esa integral es proporcional a la potencia de la onda se llega a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte de proporcionalidad}}}{\beta} P \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\beta z}$$

Hasta aquí se es posible llegar de forma general aunque en el capítulo 8.5 del Jackson hacen un par de aproximaciones adicionales para encontrar una expresión para β de cada modo.

b) Ahora, calcularemos $\frac{\partial P}{\partial z}$ y $\beta = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$ para el modo TE_{11}. Por lo tanto partimos por calcular todos los modos. Las ecuaciones para los campos de un modo que se propaga en z que escribí en la pregunta anterior se pueden generalizar a cualquier coordenada (Jackson cap 8.2)

$$\vec{E}_t = \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2}\left[K\nabla_t \vec{E}_t - \omega \hat{z} \times \nabla_t B_z\right] \qquad \vec{B}_t = \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2}\left[K\nabla_t B_z + \frac{\omega}{c^2}\hat{z} \times \nabla_t E_z\right]$$

$$\left(\nabla_t^2 + \overbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - K^2}^{K_c^2}\right)\begin{Bmatrix} E_z \\ B_z \end{Bmatrix} = 0,$$

donde el sub-índice t indica cualquier sistema de coordenadas 2D perpendicular a z. Para este problema ese sistema será polar debido a que trabajamos en un círculo. Ahora para modos TE, $E_z = 0$ y usando el método de separación de variables, $B_z = R(r)P(\phi)$

$$\Rightarrow \quad R''P + \frac{1}{r}R'P + \frac{1}{r^2}RP'' + K_c^2 RP = 0 \quad / \cdot \frac{r^2}{RP}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} + r^2 K_c^2}_{n^2} + \underbrace{\frac{P''}{P}}_{-n^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R(r) &= C J_n(K_c r) + D N_n(K_c r) \\ P(\phi) &= A\cos(n\phi) + B\sin(n\phi) \end{aligned}$$

Donde J_n y N_n son las funciones de Bessel y de Neumann. La segunda diverge en $r=0$ por lo que $D=0$. Además se debe cumplir $E_\phi = 0$, porque estamos calculando los modos de cuando el conductor es perfecto. Eso es equivalente, según $E_\phi = \frac{-i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2} \omega \frac{\partial B_z}{\partial r}$ a que $\frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$ en la superficie $r = R$ y entonces:

$$J_n'(K_c R) = 0 \Rightarrow K_c = \frac{x_{nm}}{R} \qquad m = 1, 2 \ldots$$

con x_{nm} el m-ésimo cero de la derivada de J_n. Luego los modos TE_{nm} están dados por:

$$B_z = J_n\left(x_{nm}\frac{r}{R}\right)\left[A\cos n\phi + B\sin n\phi\right]$$

Nosotros estamos interesados en $TE_{11} \Rightarrow B_z = J_1\left(x_{11}\frac{r}{R}\right)\left[A\cos(\phi) + B\sin\phi\right]$ con lo cual $B_\phi = J_1\left(x_{11}\frac{r}{R}\right)\left(-A\sin\phi + B\cos\phi\right)\frac{i}{(\frac{\omega}{c})^2 - K^2}\frac{K}{r}$. Con esto estamos listos, solo debemos calcular $\frac{\partial P}{\partial z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-1}{2g\delta_{11}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0^2}\left(B_\phi^2 + B_z^2\right) R\, d\phi$$

otros términos que integran 0

$$= \frac{-J_1^2(x_{11})}{2g\delta_{11}\mu_0^2} \cdot R\int_0^{2\pi} d\phi\left[\cos^2\phi\left(A^2 + \frac{B^2K^2}{R^2((\frac{\omega}{c})^2 - K^2)^2}\right) + \sin^2\phi\left(B^2 + \frac{A^2K^2}{R^2((\frac{\omega}{c})^2 - K^2)^2}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{-J_1^2(x_{11})}{2g\delta_{11}\mu_0^2} R\pi\left(A^2 + B^2\right)\left(1 + \frac{K^2}{R^2((\frac{\omega}{c})^2 - K^2)^2}\right)$$

Por último $\beta = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$ y calculamos P a partir de la ecuación 8.50 del Jackson

$$\Rightarrow P = \frac{\omega K \mu_0}{2} \frac{1}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]^2} \cdot -\int H_z \cdot \nabla_t^2 H_z \, da = \frac{\omega K}{2\mu_0} \frac{1}{[(\frac{\omega}{c})^2 - K^2]} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(x_{11}\frac{r}{R}) r \left(A^2\cos^2\phi + B^2\sin^2\phi\right)$$

$$= \frac{\omega K}{2\mu_0} \frac{\pi (A^2+B^2)}{((\frac{\omega}{c})^2 - K^2)} \int_0^R r\,dr\, J_1^2(x_{11}\frac{r}{R})$$

donde use $\nabla_t^2 H_z = \left[K^2 - (\frac{\omega}{c})^2\right] H_z$. Esta integral es conocida y su primitiva es:

$$\int x J_1^2(x)\,dx = \frac{x}{2}\left[x J_0^2(x) + x J_1^2(x) - 2 J_0(x) J_1(x)\right]$$

con lo cual ya calculamos β