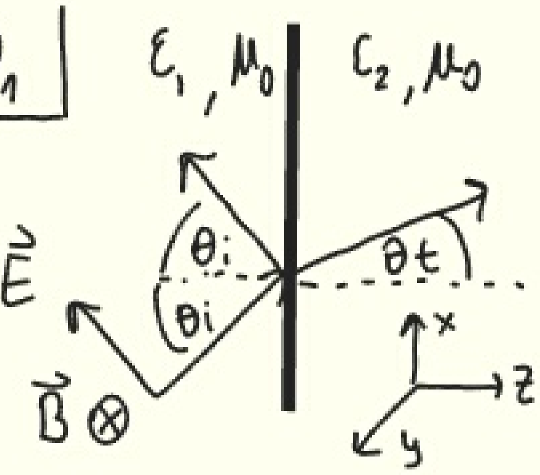
Desarrollo Aux 6

P1



Este problema consiste en aplicar las ecuaciones de Fresnel y la ley de Snell para estudiar la reflexión total interna.

a) De la ley de Snell sabemos que se debe cumplir:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t \quad \text{con} \quad n_j = \frac{c}{v} = c\sqrt{\varepsilon_j \mu_0} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin\theta_i$$

Aquí observamos que como $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, para ciertos valores de θ_i $\operatorname{sen}\theta_t > 1$, lo cual significara que θ_t es complejo. Como un ángulo complejo no es dibujable, o en otras palabras, no lo podemos medir en la realidad con un compás, diremos que no hay onda transmitida. En ángulo crítico θ_i^* se produce cuando $\sin\theta_t = 1 \Rightarrow \sin\theta_i^* = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, entonces para $\theta_i \in [\theta_i^*, \frac{\pi}{2}]$ se observa el fenomeno de reflexión total interna. Matematicamente podemos ver que ocurre con la onda transmitida estudiando su evolución $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ donde $\vec{k} = k_2(\cos\theta_t \hat{z} + \sin\theta_t \hat{x})$ y como $\cos\theta_t = (1-\sin^2\theta_t)^{1/2} = i(\underbrace{\sin^2\theta_t}_{>1} - 1)^{1/2}$, es decir $\cos\theta_t$ es un imaginario puro.

$$\Rightarrow e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{-i\omega t} \cdot e^{i(\sin\theta_t x + i(\sin^2\theta_t - 1)^{1/2} z)} = e^{i\left(\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_i^*} x - \omega t\right) - \left(\frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_i^*} - 1\right)^{1/2} z}$$

Donde reemplace $\sin\theta_t$ con la ley de Snell. Con esto obtenemos que se propaga una onda evanescente, es decir que decae al propagarse.

b) Para $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia se cumple (si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$\frac{E_R}{E_i} = \frac{n_2^2 \cos\theta_i - n_1 \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i\right)^{1/2}}{n_2^2 \cos\theta_i + n_1 \left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i\right)^{1/2}}$$

Entonces notamos que $\left(n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i\right)^{1/2} = n_2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_i\right)^{1/2} = n_2 \left(1 - \sin^2\theta_t\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_R}{E_i} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$ y como $\cos\theta_t$ es imaginario puro esto lo podemos reescribir como:

$$\frac{E_R}{E_i} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \left|\frac{E_R}{E_i}\right| = 1 \quad \text{pues } |z| = |\bar{z}| \ \forall z \in \mathbb{C}$$

c) En general una onda linealmente polarizada $\vec{E}_i = \underbrace{E_i^p \hat{p} + E_i^s \hat{s}}_{E_i^p, E_i^s \in \mathbb{R}}$ donde $\hat{p}$ y $\hat{s}$ son los vectores paralelo y perpendicular al plano de incidencia y que son perpendiculares a la dirección de propagación $\vec{k}$. Luego:

$\vec{E}_R = E_R^p \hat{p} + E_R^s \hat{s}$ con E_R^p y E_R^s cumpliendo las ecuaciones de Fresnel

$$E_R^p = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} E_i^p \quad ; \quad E_R^s = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} E_i^s$$

Luego, como vimos los números complejos que acompañan tienen norma 1 podemos escribir, $E_R^p = e^{i\phi_p} E_i^p$; $E_R^s = e^{i\phi_s} E_i^s$ y entonces si $\phi_s \neq \phi_p + n\pi \ \forall n \in \mathbb{Z}$ la polarización será elíptica.

Para tener polarización circular $\phi_s = \phi_p + \frac{\pi}{2}$ y $E_i^s = E_i^p$, lo que corresponde a una relación muy complicada y no creo que valga la pena despejar como una relación entre $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y θ:

d) Ahora volvemos a la polarización con $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia Sabemos que $\vec{K}_2 = k_2(\cos\theta_t \hat{z} + \sin\theta_t \hat{x}) = \left[\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \hat{x} + i\left(\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_i - 1\right)^{1/2}\hat{z}\right]k_2$ y por lo tanto $Re(\vec{K}_2) = k_2\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\hat{x}$, $Im(\vec{K}_2) = K_2\left(\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_i - 1\right)^{1/2}$ tal y como desarrolle en la parte a)

$$\Rightarrow e^{i(\vec{K}_2\cdot\vec{r} - \omega t)} = e^{i\left(K_2\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i x - \omega t\right) - \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_i - 1\right]^{1/2} z K_2}$$

y por lo tanto la onda se propaga en x y se atenúa en z con una longitud típica de atenuación:

$$\delta = \frac{1}{K_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_i - 1\right]^{-1/2}$$

e) El ángulo de Brewster cumple $E_R = 0$ lo cual de la fórmula de Fresnel es equivalente a $n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t = 0$

$$\Rightarrow \cos\theta_i = \frac{n_1}{n_2}\cos\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\left(1 - \sin^2\theta_t\right)^{1/2} = \frac{n_1}{n_2}\left(1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_i\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos^2\theta_i = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_i$ y ahora usamos $\cos^2 = \frac{1}{1+tg^2}$ $\sin^2 = \frac{tg^2}{1+tg^2}$

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{1+tg^2} = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{tg^2}{1+tg^2} \quad / \cdot\, 1+tg^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1 = tg^2\left(1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right)$$

sin - pues $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ ↗ ángulo de Brewster

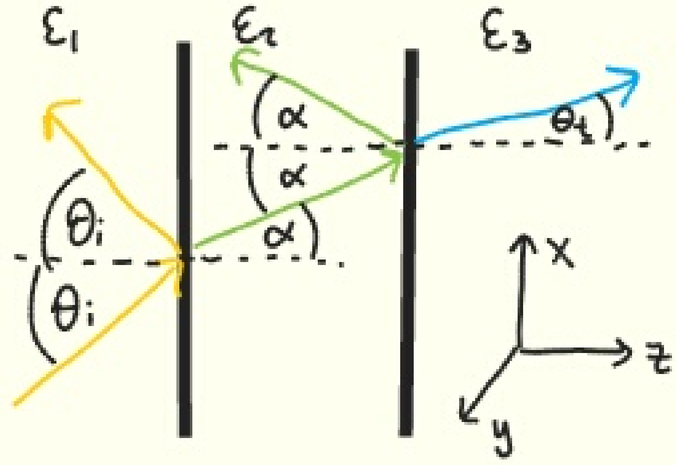
$$\Rightarrow tg^2 = \frac{\cancel{n_2^2 - n_1^2}}{n_1^2} \cdot \frac{n_2^2}{\cancel{n_2^2 - n_1^2}} \quad \Rightarrow \quad tg\,\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

ley de Snell

Notamos que $tg\,\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 \cos\theta_i = n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \sin\theta_t \Rightarrow \cos\theta_i = \sin\theta_t$

y entonces como $\sin\theta_t > 1$ para el caso de reflexión total interna, sabemos que no se pueden cumplir ambas condiciones simultaneamente porque si no θ_i sería imaginario $(\cos\theta_i > 1)$ y entonces no habría onda incidente

P2



a) Consideraremos primero $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia y entonces la solución para todos los tramos es:

$$\vec{E} = \begin{cases} \hat{y}\left(E_i e^{i(K_1\cos\theta_i z + K_1\sin\theta_i x - wt)} + E_R e^{i(-K_1\cos\theta_i z + K_1 \sin\theta_i x - wt)}\right) & z<0 \\ \hat{y}\left(C e^{i(K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)} + D e^{i(-K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)}\right) & 0<z<d \\ \hat{y} E_t e^{i(K_3\cos\theta_t (z-d) + K_3\sin\theta_t x - wt)} & d<z \end{cases}$$

Luego, podemos calcular los campos magneticos usando $\vec{B} = \frac{\vec{K}}{w}\times\vec{E}$ (Aux 5)

$$\vec{B} = \frac{1}{w}\begin{cases} \sin\theta_i \hat{z}\left(E_i e^{i(K_1\cos\theta_i z + K_1\sin\theta_i x - wt)} + E_R e^{i(-K_1\cos\theta_i z + K_1\sin\theta_i x - wt)}\right) K_1 \\ + \cos\theta_i \hat{x}\left(-E_i e^{i(K_1\cos\theta_i z + K_1\sin\theta_i x - wt)} + E_R e^{i(-K_1\cos\theta_i z + K_1\sin\theta_i x - wt)}\right) K_1 \\ \\ \sin\alpha \hat{z}\left(C e^{i(K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)} + D e^{i(-K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)}\right) K_2 \\ + \cos\alpha \hat{x}\left(-C e^{i(K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)} + D e^{i(-K_2\cos\alpha z + K_2\sin\alpha x - wt)}\right) K_2 \\ \\ \left(\sin\theta_t \hat{z} - \cos\theta_t \hat{x}\right) E_t e^{i(K_3\cos\theta_t (z-d) + K_3\sin\theta_t x - wt)} \cdot K_3 \end{cases}$$

Para que las condiciones de borde se cumplan $\forall x$ se debe cumplir $K_1\sin\theta_i = K_2\sin\alpha = K_3\sin\theta_t$, lo cual corresponde a la ley de Snell

Para que se cumplan $\forall t$ la frecuencia w se debe mantener. Ahora las condiciones de borde son $E_i^{\parallel} = E_j^{\parallel}$, $H_i^{\parallel} = H_j^{\parallel}$ y $B_i^{\perp} = B_j^{\perp}$

	Interfaz 1-2	Interfaz 2-3
$E_i^{\parallel} = E_j^{\parallel} \Rightarrow$	$E_i + E_R = C + D$	$Ce^{iK_2\cos\alpha d} + De^{-iK_2\cos\alpha d} = E_t$
$B_i^{\perp} = B_j^{\perp} \Rightarrow$	$K_1 \sin\theta_i (E_i + E_R) = K_2 \sin\alpha (C + D)$	$K_2 \sin\alpha \left(Ce^{iK_2\cos\alpha d} + De^{-iK_2\cos\alpha d}\right) = K_3 \sin\theta_t E_t$
$H_i^{\parallel} = H_j^{\parallel} \Rightarrow$	$K_1 \cos\theta_i (E_i - E_R) = K_2 \cos\alpha (C - D)$	$K_2 \cos\alpha \left(Ce^{iK_2\cos\alpha d} - De^{-iK_2\cos\alpha d}\right) = K_3 \cos\theta_t E_t$

Vemos que la condición $B_i^{\perp} = B_j^{\perp}$ es redundante con la ley de Snell. Ahora tenemos 4 ecuaciones y 4 incognitas por lo que podemos despejar

$$\Rightarrow \quad 2De^{-2iK_2\cos\alpha d} = E_t e^{-idK_2\cos\alpha}\left(1 - \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2Ce^{2iK_2\cos\alpha d} = E_t e^{idK_2\cos\alpha}\left(1 + \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_i + E_R = \tfrac{1}{2}E_t\left[\left(1 + \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)e^{-iK_2\cos\alpha d} + \left(1 - \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)e^{iK_2\cos\alpha d}\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_i - E_R = \frac{K_2\cos\alpha}{2K_1\cos\theta_i}E_t\left[\left(1 + \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)e^{-iK_2\cos\alpha d} - \left(1 - \frac{K_3\cos\theta_t}{K_2\cos\alpha}\right)e^{iK_2\cos\alpha d}\right]$$

Ahora definimos $\gamma = K_2 \cos\alpha\, d$ y $\beta = \frac{K_3 \cos\theta_t}{K_2 \cos\alpha}$ $\quad \eta = \frac{K_2 \cos\alpha}{K_1 \cos\theta_i}$

$$E_i + E_R = \frac{1}{2} E_t \left[(1+\beta) e^{-i\gamma} + (1-\beta) e^{i\gamma} \right]$$

$\Rightarrow$

$$E_i - E_R = \frac{1}{2} \eta E_t \left[(1+\beta) e^{-i\gamma} - (1-\beta) e^{i\gamma} \right]$$

$$\Rightarrow \quad 2E_i = \frac{1}{2} E_t \left[(1+\eta)(1+\beta) e^{-i\gamma} + (1-\eta)(1-\beta) e^{i\gamma} \right]$$

$$\Rightarrow \quad 4E_i = E_t (1+\eta)(1+\beta) e^{-i\gamma} \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]$$

$$\Rightarrow \quad E_t = \frac{4 e^{i\gamma}}{(1+\eta)(1+\beta)} \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]^{-1} E_i$$

$$\Rightarrow \quad E_R = E_i \left\{ \frac{2 e^{i\gamma}}{(1+\eta)(1+\beta)} \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]^{-1} \left((1+\beta) e^{-i\gamma} + (1-\beta) e^{i\gamma} \right) - 1 \right\}$$

$$= E_i \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]^{-1} \left\{ \frac{2}{1+\eta} \left(1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right) - 1 - \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right\}$$

$$= E_i \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]^{-1} \left\{ \frac{2}{1+\eta} - 1 + \frac{e^{2i\gamma}}{1+\eta} \cdot \frac{1-\beta}{1+\beta} \left(2 - (1-\eta) \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad E_R = E_i \left[1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right]^{-1} \left\{ \frac{1-\eta}{1+\eta} + \frac{1-\beta}{1+\beta} e^{2i\gamma} \right\}$$

Y ahora para $\vec{E}$ polarizado perpendicular, los coeficientes de Fresnel de transmisión y reflexión son para $\mu_i = \mu_j$

$$T_{ij} = \frac{2K_i\cos\theta_i}{K_i\cos\theta_i + K_j\cos\theta_j} = \frac{2}{1+\frac{K_j\cos\theta_j}{K_i\cos\theta_i}} \Rightarrow T_{12} = \frac{2}{1+\eta} \quad ; \quad T_{23} = \frac{2}{1+\beta}$$

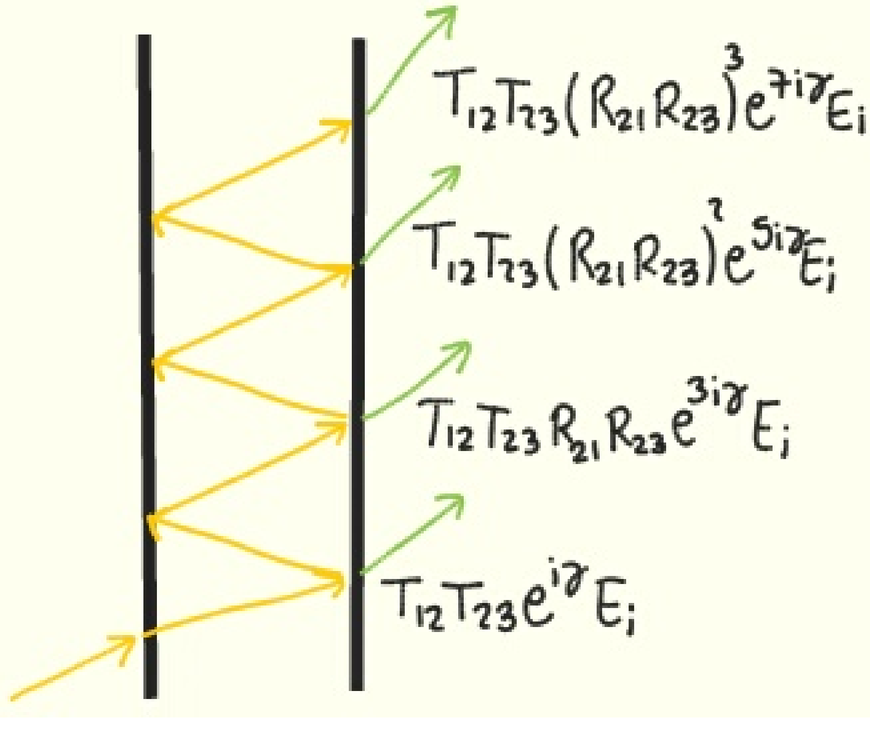
$$R_{ij} = \frac{K_i\cos\theta_i - K_j\cos\theta_j}{K_i\cos\theta_i + K_j\cos\theta_j} = \frac{1+\frac{K_j\cos\theta_j}{K_i\cos\theta_i}}{1+\frac{K_j\cos\theta_j}{K_i\cos\theta_i}} \Rightarrow R_{12} = \frac{1-\eta}{1+\eta} \quad ; \quad R_{23} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{R_{12}+R_{23}e^{2i\gamma}}{1+R_{12}R_{23}e^{2i\gamma}}E_i \quad ; \quad E_t = \frac{T_{12}T_{23}e^{i\gamma}}{1+R_{12}R_{23}e^{2i\gamma}}E_i$$

$$\Rightarrow \left|\frac{E_R}{E_i}\right|^2 = \frac{(R_{12}+R_{23}e^{2i\gamma})(R_{12}+R_{23}e^{-2i\gamma})}{(1+R_{12}R_{23}e^{2i\gamma})(1+R_{12}R_{23}e^{-2i\gamma})} = \frac{R_{12}^2+R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{T_{12}^2T_{23}^2}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}$$

Para la otra polarización, $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia, el desarrollo es analogo, solo que ahora usaremos $D_i^\perp = D_j^\perp$ en vez de $B_i^\perp = B_j^\perp$, pero también cambian los coeficientes de Fresnel, de forma de que el resultado sera el mismo. Lo importante es que esto se puede interpretar como una onda que rebota consecutivamente y se desfasa en γ cada vez que recorre al ancho d



$$\Rightarrow E_t = E_iT_{12}T_{23}e^{i\gamma}\left(1+R_{21}R_{23}e^{2i\gamma}+(R_{21}R_{23}e^{2i\gamma})^2+\dots\right)$$
$$= E_iT_{12}T_{23}e^{i\gamma}\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}(R_{21}R_{23}e^{2i\gamma})^K}_{\text{SERIE GEOMETRICA}}$$

$$\Rightarrow E_t = E_i\frac{T_{12}T_{23}e^{i\gamma}}{1-R_{21}R_{23}e^{2i\gamma}} = \frac{T_{12}T_{23}e^{i\gamma}}{1+R_{12}R_{23}e^{2i\gamma}}$$

Que es lo mismo que obtuvimos antes!

c) Para $\theta_i = 0$ se cumple que $\sin\theta_i = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \sin\theta_t = 0$ por la ley de Snell y entonces $\cos\theta_i = \cos\alpha = \cos\theta_t = 1$ con lo cual los campos nos quedan

$$\vec{E} = \begin{cases} \hat{y}\left(E_i e^{i(K_1 z - \omega t)} + E_R e^{-i(K_1 z + \omega t)}\right) & z<0 \\ \hat{y}\left(C e^{i(K_2 z - \omega t)} + D e^{-i(K_2 z + \omega t)}\right) & 0<z<d \\ \hat{y}\, E_t\, e^{i(K_3 (z-d) - \omega t)} & d<z \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \hat{x}\left(-E_i e^{i(K_1 z - \omega t)} + E_R e^{-i(K_1 z + \omega t)}\right)\frac{K_1}{\omega} & z<0 \\ \hat{x}\left(-C e^{i(K_2 z - \omega t)} + D e^{-i(K_2 z + \omega t)}\right)\frac{K_2}{\omega} & 0<z<d \\ -\hat{x}\, E_t\, e^{i(K_3 z - \omega t)}\frac{K_3}{\omega} & d<z \end{cases}$$

Luego el promedio del vector de Poynting lo calculamos con la ecuación $\langle \vec{S} \rangle = \langle Re(\vec{E}) \times Re(\vec{H}) \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$

$$z<0: \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\left\{ -\hat{z}\frac{K_1}{\mu_0 \omega}\left(E_i e^{i(K_1 z - \omega t)} + E_R e^{-i(K_1 z + \omega t)}\right)\cdot\left(-E_i^* e^{-i(K_1 z - \omega t)} + E_R^* e^{i(K_1 z + \omega t)}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\hat{z}\frac{K_1}{\mu_0 \omega} Re\left\{-|E_i|^2 + |E_R|^2 + 2 E_i E_R i \sin(K_1 z - \omega t)\right\} = \frac{K_1}{2\mu_0\omega}\hat{z}\left(|E_i|^2 - |E_R|^2\right)$$

$$0<z<d: \langle \vec{S} \rangle = \frac{K_2 \hat{z}}{2\mu_0\omega}\left(|C|^2 - |D|^2\right)$$ } por analogía al cálculo anterior

$d<z$: $\quad \langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\hat{z}\frac{k_3}{\mu_0\omega}|E_t|^2\right) = \frac{k_3\hat{z}}{2\mu_0\omega}|E_t|^2$

Luego usando las expresiones de la parte c)

$$\langle\vec{S}\rangle_{z<0} = \frac{k_1\hat{z}}{2\mu_0\omega}|E_i|^2\left(1-\left|\frac{E_R}{E_i}\right|^2\right) = \frac{k_1}{2\mu_0\omega}|E_i|^2\left(1-\frac{R_{12}^2+R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}\right)$$

$$= \frac{k_1|E_i|^2\hat{z}}{2\mu_0\omega}\left(\frac{1+R_{12}^2R_{23}^2-R_{12}^2-R_{23}^2}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}\right) = \frac{k_1|E_i|^2\hat{z}}{2\mu_0\omega}\,\frac{(1-R_{12}^2)(1-R_{23}^2)}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}$$

propiedad del enunciado

$$= \frac{k_1\hat{z}}{2\mu_0\omega}\,\frac{|E_i|^2T_{12}T_{21}T_{23}T_{32}}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}$$

y ahora usamos la propiedad $T_{ij} = \frac{k_j}{k_i}T_{ji}$

$$\Rightarrow \langle\vec{S}\rangle_{z<0} = \frac{k_3\hat{z}}{2\mu_0\omega}|E_i|^2\underbrace{\frac{T_{12}^2T_{23}^2}{1+R_{12}^2R_{23}^2+2R_{12}R_{23}\cos(2\gamma)}}_{\left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2} = \langle\vec{S}\rangle_{z>d}$$

Queda propuesto demostrar que valen lo mismo que $\langle\vec{S}\rangle_{0<z<d}$, lo importante es que esta propiedad viene de la conservación de la componentes tangencial de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ y por lo tanto para $\theta_i \neq 0$ esto ya no basta pues habrá una componente perpendicular al plano, entonces se conservará $D^\perp$ o $B^\perp$ y por lo tanto $\vec{S}$ no valdrá lo mismo en los 3 medios

d) Se debe cumplir $E_R = 0 \Rightarrow R_{12} + R_{23}e^{2i\gamma} = 0$ lo cual para $\theta_i = \theta_t = \alpha = 0$ se traduce en:

$$\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1} = \frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}e^{2ik_2d} \quad \overset{k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}+\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_2}+\sqrt{\varepsilon_3}}e^{2i\omega d\sqrt{\varepsilon_2\mu}}$$