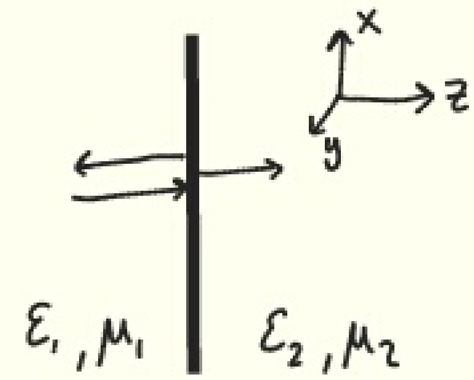
P_1



Las ecuaciones de onda en cada medio son las típicas sin disipación $\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, con lo cual las relaciones de dispersion son $K^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ con $v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$

Como la incidencia es normal podemos tomar el campo electrico en el eje $\hat{x}$, entonces los campos son:

$$\vec{E} = \hat{x} \begin{cases} E_0 e^{i(K_1 z - wt)} + E_R e^{-i(K_1 z + wt)} & z < 0 \\ E_t e^{i(K_2 z - wt)} & z > 0 \end{cases}$$

dependiendo del signo en la onda plana

Luego como $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \pm K E_x = \omega B_y$, $\mp K E_y = \omega B_x$ si $E_z = 0$

y si asumimos que $\vec{B}$ también es una onda plana. Esto es equivalente a:

$\vec{B} = \frac{\vec{K} \times \vec{E}}{\omega}$ } Relación importante para ondas TEM $(\vec{K} \cdot \vec{E} = \vec{K} \cdot \vec{B} = 0)$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\hat{y}}{\omega} \begin{cases} K_1 \left(E_0 e^{i(K_1 z - wt)} - E_R e^{-i(K_1 z + wt)} \right) & z < 0 \\ K_2 E_t e^{i(K_2 z - wt)} & z > 0 \end{cases}$$

Luego las condiciones de borde son las de los campos tangenciales $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ y $H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$ pues no hay corrientes en la superficie

$$\Rightarrow \quad E_0 + E_R = E_t \quad ; \quad \frac{K_1}{\mu_1}(E_0 - E_R) = \frac{K_2}{\mu_2}E_t \quad y \quad K_i = \frac{\omega}{v_i} = \omega\sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \Rightarrow \frac{K_i}{\mu_i} = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}}$$

$$\Rightarrow \quad E_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\right) + E_R\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_R}{E_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} = \frac{K_1\mu_2 - K_2\mu_1}{K_2\mu_1 + K_1\mu_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_t}{E_0} = 1 + \frac{E_R}{E_0} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{2K_1}{K_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2}$$

Donde las versiones con K se deducen si es que no se reemplaza la relación de dispersión. Luego la intensidad $I = \langle \vec{S} \cdot \hat{K} \rangle$ de los campos la calculamos para una onda plana como:

término muy importante si no nada calza

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{K}{\mu\omega}E^2\hat{K} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{K}{2\mu\omega}E^2$$

El 2 sale del promedio temporal de $\cos^2$

$$T = \left|\frac{I_t}{I_0}\right|^2 = \frac{4K_1^2}{(K_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2)^2} \cdot \frac{K_2\mu_1}{K_1\mu_2} \quad ; \quad R = \left|\frac{I_R}{I_0}\right|^2 = \frac{(K_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2)^2}{(K_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad R + T = \frac{4K_2K_1\frac{\mu_1}{\mu_2} + (K_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2)^2}{(K_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}K_2)^2} = 1 \quad //$$

P_2 | Queremos demostrar que al incidir una onda normalmente sobre la superficie de un dielectrico su polarización no cambia, para ello consideraremos el campo electrico incidente en $\hat{x}$ y que las ondas reflejada y transmitida tienen polarizaciones $\hat{n}_R = \cos\theta_R \hat{x} + \sin\theta_R \hat{y}$ y $\hat{n}_t = \cos\theta_t \hat{x} + \sin\theta_t \hat{y}$, y buscaremos demostrar $\theta_t = \theta_R = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{cases} e^{-i\omega t}\left(E_i e^{ik_1 z}\hat{x} + E_R e^{-ik_1 z}\hat{n}_R\right) & z>0 \\ e^{-i\omega t} E_t e^{ik_2 z}\hat{n}_t & z<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{k_1}{\omega} e^{-i\omega t}\left(E_i e^{ik_1 z}\hat{z}\times\hat{x} + E_R e^{-ik_1 z}(-\hat{z}\times\hat{n}_R)\right) & z>0 \\ \frac{k_2}{\omega} e^{-i\omega t} E_t e^{ik_2 z}\hat{z}\times\hat{n}_t & z<0 \end{cases}$$

Ahora esta solución debe satisfacer las condiciones de borde, que para este caso aplican sobre las componentes tangenciales, es decir $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ y $H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$. Claramente como $\hat{x}$ e $\hat{y}$ son tangenciales se deberá conservar por componentes y por lo tanto:

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \begin{cases} \hat{x}: \; E_i + E_R\cos\theta_R = E_t\cos\theta_t & (1) \\ \hat{y}: \; E_R\sin\theta_R = E_t\sin\theta_t & (2) \end{cases}$$

$$H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel} \quad \begin{cases} \hat{x}: & \dfrac{K_1}{\omega} E_R \sin\theta_R = -\dfrac{K_2}{\omega} E_t \sin\theta_t & (3) \\[2ex] \hat{y}: & \dfrac{K_1}{\omega}\left(E_i - E_R \cos\theta_R \right) = \dfrac{K_2}{\omega} E_t \cos\theta_t & (4) \end{cases}$$

Ahora, si $\sin\theta_R , \sin\theta_t \neq 0$, podemos dividir las ecuaciones (3) y (2) $\Rightarrow$ $\frac{K_1}{\omega} = \frac{-K_2}{\omega}$ lo cual en general no es cierto, por lo tanto $\sin\theta_R$ o $\sin\theta_t$ valen 0 y si uno vale 0, por (2) sabemos que el otro también. Con esto concluimos que $\hat{n}_t$ y $\hat{n}_R$ son paralelos al eje x y por lo tanto se mantiene la polarización

Desarrollo Aux 5

P3

a) En este conductor se cumple $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ por lo que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Asumimos } \mu \text{ y } \varepsilon \text{ constantes en el conductor)}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\cancelto{0}{\nabla \cdot \vec{E}}) - \nabla^2 E = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{-\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

término asociado a la conducción

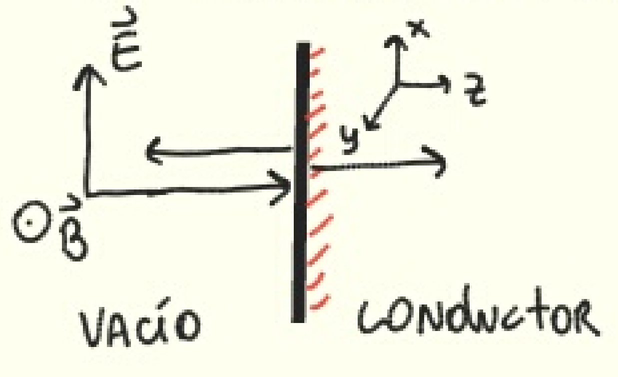
$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Luego, la relación de dispersión $K(\omega)$ la obtenemos trabajando en la base de ondas planas monocromaticas $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, lo cual al reemplazar en la ecuación de ondas resulta en:

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = -K^2 \vec{E} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \quad \Rightarrow \quad K^2 = i\mu\sigma\omega + \mu\varepsilon\omega^2 \Big\} \text{ Relación de dispersión}$$

Para que esto se cumpla $\vec{K}$ es un vector complejo, por lo que las ondas decaeran al propagarse por el conductor

b) Consideramos una solución como la del dibujo analogo al P1



$$\vec{E} = \begin{cases} E_i e^{i(Kz - \omega t)}\hat{x} + E_R e^{-i(kz + \omega t)}\hat{x} & z < 0 \\ E_t e^{i(\underbrace{K'}_{K \text{ del conductor}} z - \omega t)}\hat{x} & z > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega}\begin{cases} k\left(E_i e^{i(kz-\omega t)} - E_R e^{-i(kz+\omega t)}\right)\hat{y} & z<0 \\ k' E_t e^{i(k'z-\omega t)}\hat{y} & z>0 \end{cases}$$

y entonces esta solución debe cumplir las condiciones de borde típicas que en este caso son las tangenciales a la superficie, $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ y $H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$ en $z=0$

$\Rightarrow E_i + E_R = E_t$; $\frac{K}{\mu_0}(E_i - E_R) = \frac{K'}{\mu}E_t$, lo cual despejamos y obtenemos

$$E_i\left(\frac{K'\mu_0 - K\mu}{\mu\mu_0}\right) + E_R\left(\frac{k'\mu_0 + K\mu}{\mu\mu_0}\right) = 0 \Rightarrow \frac{E_R}{E_i} = \frac{K\mu - K'\mu_0}{K\mu + K'\mu_0} \Rightarrow \frac{E_t}{E_i} = \frac{2K\mu}{K\mu + K'\mu_0}$$

El resultado es analogo al P_1 solo que con K' complejo, lo cual se traducira en un cambio de fase en los campos reflejados y transmitidos

De esta forma cuando $\sigma \to \infty$ $|K'| \to \infty$ $\Rightarrow E_R \to -E_i$ y $E_t \to 0$ y así los campos los podemos escribir como:

$\vec{E} = 2iE_i e^{-i\omega t}\sin(kz)$; $\vec{B} = \frac{2E_i K}{\omega} e^{-i\omega t}\cos(kz)$ para $z<0$ y nulos en $z>0$

c) Lo haremos usando el tensor de Maxwell, $\vec{f} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = 0 \quad / \underbrace{\int dV}_{\text{volumen chico}}\Big|_{z=0}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{z}\,ds\Big|_{z=0}$ donde $\vec{S}=0$ pues $\vec{E}=0$ en $z=0$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{F}}{ds} = -\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{z} \Big|_{z=0}$$ y ENTONCES CALCULANDO $\overleftrightarrow{T}_{ij} = w_{em}\delta_{ij} - \left(E_i D_j + B_i H_j\right)$

CON $Re(\vec{E}) = 2E_0 \sin(\omega t)\sin(kz)\,\hat{x}$; $Re(\vec{B}) = \frac{2k}{\omega}\cos(\omega t)\cos(kz)\,\hat{y}$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_0 E_0^2\left(\cos^2\omega t\cos^2 kz - \sin^2\omega t\sin^2 kz\right) & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_0 E_0^2\left(\sin^2\omega t\sin^2 kz - \cos^2\omega t\cos^2 kz\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_0 E_0^2\left(\sin^2\omega t\sin^2 kz + \cos^2\omega t\cos^2 kz\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{z}\Big|_{z=0} = -2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\omega t\,\hat{z} \Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = -\varepsilon_0 E_0^2\,\hat{z}$$