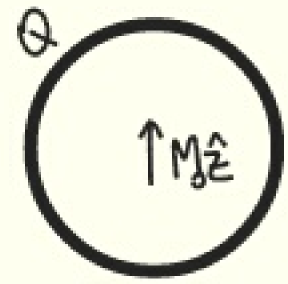
P1

a) Partimos por calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$ porque $\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{G}$



$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \text{ para } r > R, \text{ y para } r < R \ \vec{E} = 0$$

pues el material es de hierro es decir un conductor

Por otro lado, el campo magnetico lo podemos encontrar a partir del potencial magnetico escalar usando que $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = M\cos\theta$, $\rho_M = \nabla \cdot \vec{M} = 0$

$$\Rightarrow \Psi_M(\vec{r}) = \frac{M_0 R^2}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{|r - r'|} \quad y \quad \frac{1}{|r-r'|} = \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi') \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1}$$

$$= \sum_{l,m} \frac{M_0 R^2}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int d\Omega \, 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{10}(\theta',\phi') Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi) = \frac{M_0 R^2}{3} \frac{r_<}{r_>^2} \cos\theta$$

donde use la ortogonalidad de los Y_{lm} para calcular la integral, lo cual da unas deltas que eliminan las sumatorias. Luego si $r > R$ $r_< = R$, $r_> = r$ y entonces:

$$\vec{H} = -\nabla \Psi_M \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 M R^3}{3r^3}\left(2\cos\theta \, \hat{r} + \sin\theta \, \hat{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{G} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \cancel{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi \cancel{\varepsilon_0} r^2} \frac{\mu_0 M_0 R^3}{3r^3} \sin\theta \, \hat{r} \times \hat{\theta} = \frac{-\mu_0 Q M_0 R^3}{12\pi r^5} \sin\theta \, \hat{\phi}$$

$\vec{\ell}_{em} = \vec{r} \times \vec{G} = \frac{-\mu_0 Q M_0 R^3}{12\pi r^4} \sin\theta \hat{\theta}$ PARA $r > R$ y 0 EN $r < R$ PUES $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{G} = 0$ dENTRO de lA ESFERA

$$\Rightarrow \vec{L}_{em} = \int dV \vec{\ell}_{em} = \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \sin\theta \cdot \frac{-\mu_0 Q M_0 R^3}{12\pi r^4} \sin\theta \hat{\theta}$$

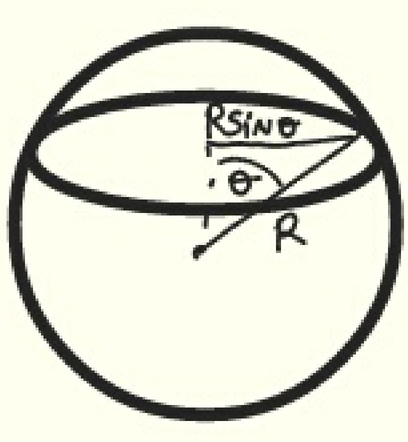
y AhORA como $\hat{\theta} = \cos\theta(\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) - \sin\theta \hat{z}$, lA integral EN ϕ VALE 0 PARA $\hat{x}$ E $\hat{y}$ y solo sobREVIVE $\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 Q M_0 R^3}{6} \hat{z} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{2}{9} \mu_0 Q M_0 R^2 \hat{z}$$

b) PARA ESTA PARTE NECESITAREMOS El CAMPO MAGNETICO dENTRO dE lA ESFERA, ES dECIR $r_< = r$ y $r_> = R$ $\Rightarrow \Psi_M = \frac{M_0}{3} r\cos\theta \Rightarrow \vec{H}_{IN} = -\frac{1}{3} M_0 (\underbrace{\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta}_{\hat{z}})$

$$\Rightarrow \vec{B}_{IN} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \frac{2\mu_0 M_0}{3} \hat{z}$$

LuEGO, lA ley dE AmpERE AplicAdA sobRE UN ciRcuito EN lA ESFERA, como SE MUESTRA EN El dibujo implica QUE:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \overset{\vec{E} = E\hat{\phi}}{=} 2\cancel{\pi} R \sin\cancel{\theta}\, E(\theta) = -\cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \sin^{\cancel{2}}\theta \cdot \frac{2\mu_0}{3} \dot{M} = -\int \dot{\vec{B}}_{IN} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\mu_0 \dot{M}}{3} \sin\theta \hat{\phi} \Rightarrow \vec{f} = \sigma \vec{E} \quad \text{CON } \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = -R \cdot \frac{\mu_0 \dot{M}}{3} \sin\theta \cdot \frac{Q}{4\pi R^{\cancel{2}}} \overbrace{\hat{r} \times \hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = \frac{-\mu_0 \dot{M} Q}{12\pi R} \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \tau_{total} = \int d\Omega\, \tau = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta d\phi \frac{-\mu_0 \dot{M} R Q}{12\pi} \sin^2\theta\, \hat{\theta} = -\frac{2\mu_0 \dot{M} R Q}{9}\hat{z}$$

PARECIDA A
LA INTEGRAL DE
ANTES

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \tau_{total} \Rightarrow \vec{L}_f = \int_0^{t_f} \tau_{total}\, dt = \frac{2\mu_0 R M_0 Q}{9}\hat{z} \Bigg\}$$ EL MOMENTUM SE CONSERVA

c) PRIMERO DETERMINAMOS $\vec{K}$ A TRAVES DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

$$\nabla\cdot\vec{K} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$ y si supongo $\vec{K} = K(\theta)\hat{\theta} \Rightarrow \frac{1}{R\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta K) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$

$$\Rightarrow \sin\theta K = -\int d\theta \frac{\partial\sigma}{\partial t} R\sin\theta = R\cos\theta\frac{\partial\sigma}{\partial t} \Rightarrow K(\theta) = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot \cot\theta R$$

LUEGO LA FUERZA SOBRE ESTA CORRIENTE ES $\vec{f} = \vec{K}\times\vec{B} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\cot\theta R\cdot\frac{2\mu_0 M}{3}\cos\theta(-\hat{\theta}\times\hat{r})$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = R\hat{r}\times\vec{f} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\frac{2\mu_0 M R^2}{3}\cot\theta\cos\theta\,(\hat{r}\times\hat{\phi}) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\frac{2\mu_0 M R^2}{3}\cdot\hat{\theta}\cot\theta\cos\theta$$

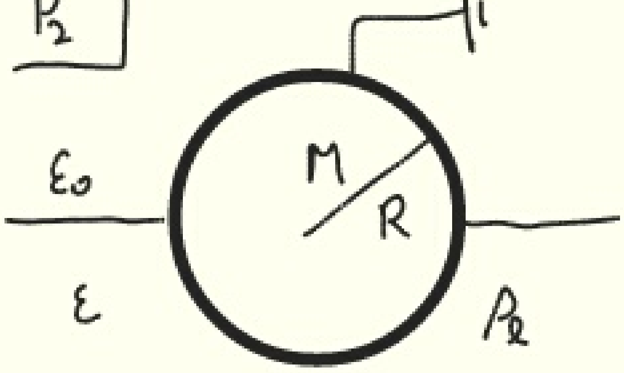
INTEGRAL EN $\hat{\phi}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{total} = \int ds\,\vec{\tau} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\frac{2\mu_0 M R^2}{3}\cdot 2\pi\hat{z}\int_0^{\pi}\cot\theta\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{8\pi\mu_0 M R^2}{9}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f = \int_0^{t_f} -\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\frac{8\pi\mu_0 M R^2}{9}\hat{z} = \frac{8\pi\mu_0 M R^2}{9}\hat{z}\cdot\sigma_0 = \frac{2\mu_0 M Q}{9}\hat{z}\Bigg\}$$ TAMBIÉN SE CONSERVA

$$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

P_2



$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{em} + M\vec{g} - \rho_\ell \frac{2\pi}{3} R^3 \vec{g}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{em} = -g\left(\frac{2\rho_\ell \pi R^3}{3} - M\right)\hat{z}$$

Ahora solo queda calcular $\vec{F}_{em}$ a partir de ϕ_0 el potencial al que se coloca la esfera, usando $\overleftrightarrow{T}$

Entonces, usando $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_F \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc} \Rightarrow 2\pi r^2 \left(D_{AIRE}(r) + D_{\ell íquido}(r) \right) = Q$ y como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ podemos despejar:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon + \varepsilon_0)}\hat{r} \; ; \; y \text{ como } -\nabla\phi = \vec{E} \Rightarrow \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \phi(R) - \cancel{\phi(\infty)}^{0}$$

$$\Rightarrow \int_R^\infty \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon + \varepsilon_0)} dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \cdot \frac{1}{R} = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 R = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\phi_0 R}{r^2}\hat{r}$$

Luego $\overleftrightarrow{T}_{ij} = w_{em}\delta_{ij} - (E_i D_j + B_i H_j)$ y por lo tanto si tomo i,j como las coordenadas esfericas, con $1 = r$, $2 = \phi$, $3 = \theta$, considerando $\vec{B} = \vec{H} = 0$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{T} = \varepsilon' \begin{pmatrix} -\frac{\phi_0^2 R^2}{2r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi_0^2 R^2}{2r^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi_0^2 R^2}{2r^4} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{en aire} \\ \varepsilon & \text{en líquido} \end{cases}$$

Entonces de la ecuación $\vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} + \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 0$ como $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{S} = 0$ y entonces $\vec{F}_{em} = \int \vec{f} dV = -\int \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} dV = -\oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{s}$ donde debemos integrar en toda la esfera y $d\vec{s} = ds\,\hat{r} \Rightarrow \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{s} = -\frac{\phi_0^2 R^2}{2r^4}\hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{em} = \oint \varepsilon' \frac{\phi_0^2 R^2}{2r^4}\hat{r}\,ds = \frac{\phi_0^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta\, d\phi\, \frac{\varepsilon' \cancel{R^2}}{\cancel{R^4}} \cancel{R^2} \sin\theta\, \hat{r}$$

y como $\hat{r} = \sin\theta(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}) + \cos\theta\,\hat{z}$, al integrar en ϕ se nos van $\hat{x}$ e $\hat{y}$ y nos queda

$$\vec{F}_{em} = \phi_0^2\pi \left\{ \int_0^{\pi/2} \varepsilon_0 \sin\theta\cos\theta\,\hat{z} + \int_{\pi/2}^{\pi} \varepsilon \sin\theta\cos\theta\,\hat{z} \right\}$$

donde use la definición de ε' para dividir la integral

$$\Rightarrow \vec{F}_{em} = \frac{\phi_0^2\pi}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\hat{z} = -g\left(\frac{2\rho_\ell \pi R^3}{3} - M\right)\hat{z} \Rightarrow \phi_0 = \left[\frac{2g}{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)}\left(\frac{2\rho_\ell \pi R^3}{3} - M\right)\right]^{1/2}$$

Resumen C1: $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$ } Ecs de Maxwell, literalmente contienen toda la física

Ecs complementarias: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ } Ley de Ohm $\quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ } conservación de la carga

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \quad M = \mu_0\chi_m\vec{H}$ } Ecs. constitutivas para medios lineales e isotropos

Condiciones de borde (C.B): Se deducen integrando las ecuaciones de Maxwell en la interfaz entre 2 medios

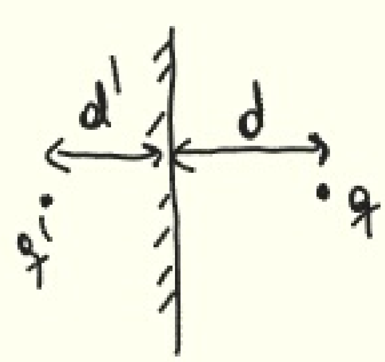
$n_{12}\times(E_2 - E_1) = 0$ $\quad$ n_{12}: vector normal que apunta del medio 1 al 2

$n_{12}\cdot(D_2 - D_1) = \sigma$ $\quad$ σ: Densidad superficial de carga libre

$n_{12}\cdot(B_2 - B_1) = 0$ $\quad$ K: " " de corriente

$n_{12}\times(H_2 - H_1) = K$

Método de imagenes: Para problemas con una distribución de carga frente a un dielectrico o conductor, puede servir buscar una distribución analoga a la original cuya magnitud y posición son incognitas y deben ser tal que se cumplan las condiciones de borde. Ej sencillo carga frente a un plano conductor.



$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{q}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(x^2+y^2+(z+d')^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow q' = -q \,, \quad d' = d$$

Notas: • La distribución imagen siempre va dentro del medio

• Para distribuciones complicadas se puede usar superposición, o sea calcular la carga imagen de un diferencial de carga es suficiente

• Para dielectricos es más complicado porque la solución dentro del medio no es de esta forma y lo que hay que hacer es proponer una distribución "apantallada" o de menor magnitud como hicimos en el aux 2

Separación de variables: Como ya saben en electro si es que se cumple $\nabla \times \vec{E} = 0$ o $\nabla \times \vec{H} = 0$ se pueden definir potenciales escalares que cumplen $E = -\nabla \phi$; $\vec{H} = -\nabla \Psi_m$ y usando las otras ecuaciones de Maxwell se llegan a ecuaciones de Poisson para los potenciales. Lo mismo aplica para $\vec{A}$

Para resolver escogemos un sistema de coordenadas adecuado a las condiciones de borde y proponemos una solución que sea multiplicación de 3 funciones que solo dependan de una coordenada. Esto al reemplazar en la EDP se llega a términos que solo dependen de una variable y por lo tanto son ctes. Luego, podemos escribir la solución general como una combinación de las soluciones anteriores donde se varía la constante

Notas: • Las constantes que se eligen dependen de las coordenadas que se usan

- Es muy importante recordar que la solución general es una combinación de las soluciones separadas, sino sera imposible satisfacer las C.B.
- En general se resuelve Laplace y se divide la solución en zonas sin distribución y del mismo medio.
- Si sabemos encontrar la solución general, los problemas solo consisten en ajustar la solución a las condiciones de borde