

AUXILIAR EXTRA FUNCIONES DE GREEN

BENJANÍN PÉREZ

IDEA: QUEREMOS RESOLVER $\nabla^2 \phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$ PARA LO CUAL NOTAMOS QUE SI

$$\phi(r) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} d\vec{r}' \Rightarrow \nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ ASEGURA LA ECUACIÓN ANTERIOR}$$

DE ESTA FORMA $G(\vec{r}, \vec{r}')$ SERA UNA FUNCIÓN QUE PERMITIRA ENCONTRAR EL POTENCIAL. ESTA FORMA DE PLANTEAR EL PROBLEMA ES ÚTIL PUES NO DEPENDE DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA, LA ÚNICA DIFICULTAD ESTA EN ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN A $\nabla^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ QUE SE AJUSTE A LAS CONDICIONES DE BORDE

ADemás DEPENDIENDO DE LA GEOMETRÍA HABRÁN FORMAS DE SIMPLIFICAR EL PROBLEMA A UNA FUNCIÓN DE GREEN REDUCIDA QUE SOLO DEPENDE DE UNA COORDENADA RELEVANTE

EN LA CLASE VEREMOS COMO SE HACE ESTO PARA ESFERAS Y PLANOS

GREEN EN ESFERICAS: EN ESTE CASO LA COORDENADA RELEVANTE ES r Y PARA LLEGAR A LA FUNCIÓN REDUCIDA NOS APOYAREMOS EN LOS ESFERICOS ARMONICOS. QUEREMOS QUE $\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$ ENTONCES PODEMOS EXPANDIR ES ESFERICOS ARMONICOS A G :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) - l(l+1) Y_{lm}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A_{lm}) Y_{lm} + \frac{A_{lm}}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta Y_{lm}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2 Y_{lm} \right) \right]$$

donde usando la relación de completitud

$$\sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

podemos REESCRIBIR LA EC.

ANTERIOR COMO:

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \left\{ \partial_r (r^2 \partial_r A_{lm}) - l(l+1) A_{lm} + \delta(r - r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') \right\} = 0$$

LUEGO si $A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi')$ ENTONCES PODEMOS FACTORIZAR POR $Y_{lm}^*(\theta', \phi')$ y si $g_{lm}(r, r')$ SATISFACE:

$$\partial_r (r^2 \partial_r g_{lm}) - l(l+1) g_{lm} + \delta(r - r') = 0$$

ENTONCES ESTAMOS LISTOS Y g_{lm} ES LO QUE SE CONOCE COMO FUNCIÓN DE GREEN REDUCIDA.

LUEGO SI $r \neq r'$ OBTENEMOS LA EDO:

$$r^2 \partial_r^2 g_l + 2r \partial_r g_l - l(l+1)g_l = 0 \Rightarrow g_l = A r^l + B r^{-l-1}$$

Y EN $r=r'$ LA SOLUCIÓN DEBERA SER CONTINUA Y ADEMÁS CUMPLIR UN SALTO EN LA DERIVADA QUE SE DEDUCE DE LA EDO COMPLETA

$$\partial_r (r^2 \partial_r g_{lm}) - l(l+1)g_{lm} + \delta(r-r') = 0 \quad / \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr$$

$$\Rightarrow r^2 \partial_r g_l \Big|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} + 1 = 0 \quad \} \text{ SALTO DE LA DERIVADA}$$

PARA TERMINAR EL CAMPO EN $\vec{r}$ GENERADO POR UNA CARGA PUNTUAL EN $\vec{r}'$ ESTA DADO POR

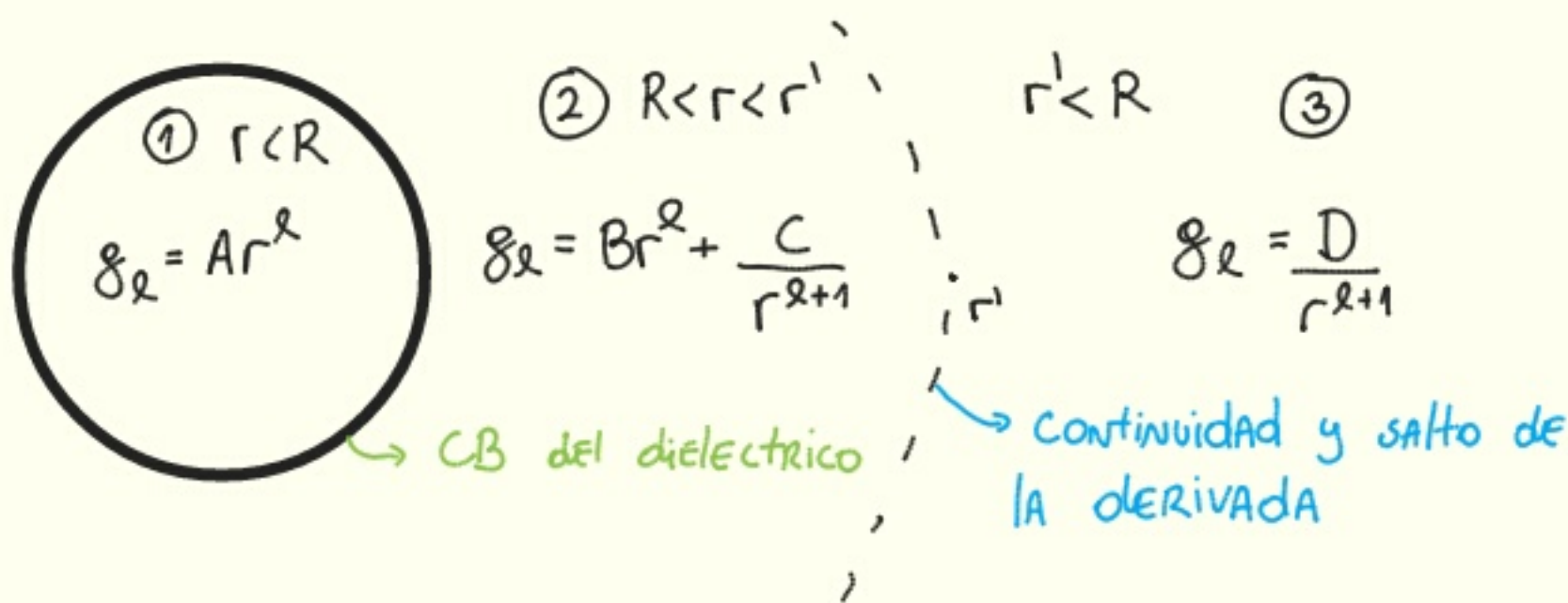
$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Y ADEMÁS $\phi = \int G(\vec{r}, \vec{r}') q \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') d^3 r'' = q G(r, r')$ DE LO CUAL SACAMOS FACILMENTE LA FUNCIÓN DE GREEN PARA UNA CARGA PUNTUAL

$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Aplicación de lo ANTERIOR: CARGA PUNTUAL FRENTE A UNA ESFERA dieléctrica con constante dieléctrica ϵ

YA CONOCEMOS LA SOLUCIÓN POR LO QUE SOLO DEBEMOS DIVIDIR LA SOLUCIÓN EN PARTES E IMPONER LAS CONDICIONES DE BORDE



LAS CONDICIONES DE BORDE SE TRASPASAN A g_l COMO:

$$\epsilon \left. \frac{\partial g_l}{\partial r} \right|_{r=R^-} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial g_l}{\partial r} \right|_{r=R^+} \Leftrightarrow D_{out}^+ - D_{in}^+ = \nabla \cdot \vec{r}^0$$

$$g_l(R^-, r') = g_l(R^+, r') \Leftrightarrow E_{out}'' - E_{in}'' = 0$$

$$g_l(r'_-, r') = g_l(r'_+, r') \quad ; \quad \left. \frac{\partial g_l}{\partial r} \right|_{r'_-}^{r'_+} = -\frac{1}{r'^2}$$

CON LOS CUA TENEMOS 4 ECUACIONES Y 4 INCOGNITAS ASÍ QUE ESTAMOS LISTOS

$$\Rightarrow \epsilon A R^{l-1} = \epsilon_0 (B R^{l-1} - C(l+1) R^{-(l+2)})$$

$$A R^l = B R^l + C R^{-l-1}$$

$$B r^{l-1} + C r^{-l-1} = D r^{-l-1}$$

$$-D(l+1) r^{-l-2} - B l r^{l-1} + C(l+1) r^{-l-2} = -4\pi r^{-2}$$

$$\Rightarrow A = B + C R^{-2l-1} \Rightarrow \epsilon (B + C R^{-2l-1}) = \epsilon_0 (B - C \frac{(l+1)}{l} R^{-2l-1})$$

$$\Rightarrow B l (\epsilon_0 - \epsilon) = C R^{-2l-1} (\epsilon l + \epsilon_0 (l+1))$$

$$\Rightarrow D = C + B r^{2l+1} \Rightarrow -(l+1) (C + B r^{2l+1}) - B l r^{2l+1} + C(l+1) = -4\pi r^l$$

$$\Rightarrow B r^{2l+1} (2l+1) = 4\pi r^l \Rightarrow B = \frac{4\pi}{2l+1} r^{-l-1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{4\pi}{2l+1} r^{-l-1} \cdot R^{2l+1} \frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon l + \epsilon_0 (l+1)}$$

$$\Rightarrow D = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon l + \epsilon_0 (l+1)} \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} + r^l \right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{4\pi}{2l+1} \left[1 - \frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon l + \epsilon_0 (l+1)} \right] \frac{r^l}{r^{l+1}}$$

Con lo cual:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} \frac{4\pi}{2l+1} \left[1 - \frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon l + \epsilon_0 (l+1)} \right] \frac{r^l}{r^{l+1}} & r < R \\ \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\epsilon l + \epsilon_0 (l+1)} \frac{R^{2l+1}}{(r r')^{l+1}} + \frac{r^l}{r^{l+1}} \right] & r > R \end{cases}$$

↖ coef que dependen de l !

con $r_<(r_>)$ el MENOR (MAYOR) ENTRE r y r' . OBSERVAMOS QUE SI $\epsilon = \epsilon_0$ RECUPERAMOS LA FUNCIÓN DE GREEN REDUCIDA DE UNA CARGA LIBRE EN EL VACÍO. OCURRE LO MISMO CUANDO $R \rightarrow 0$

Ahora podemos hacer un truguito, PARA LA ZONA $r > R$, podemos escribir el RESULTADO ANTERIOR EN UN SOLO TRAMO.

$$g_l(r, r') = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\underbrace{\frac{-l(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon l + \epsilon_0(l+1)} \frac{R}{r'} \left(\frac{R^2}{r'} \right)^l}_{\text{TÉRMINO ASOCIADO AL dieléctrico}} + \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{función de GREEN de la} \\ \text{CARGA} \end{array}$$

y este término dentro de la SUMATORIA lo podemos REESCRIBIR como

$$\frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{l(\epsilon + \epsilon_0) + \epsilon_0} = \frac{l(\epsilon_0 - \epsilon)}{\left(l + \frac{\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right)} \frac{1}{\epsilon + \epsilon_0} = \frac{\Delta l}{l + \eta} \quad \text{con } \Delta = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon + \epsilon_0}; \quad \eta = \frac{\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l}{l + \eta} \frac{R^{2l+1}}{(rr')^l} = \Delta \left[1 - \frac{\eta}{l + \eta} \right] \frac{R^{2l+1}}{(rr')^{l+1}}$$

$$= \Delta \frac{R}{r'} \frac{\left(\frac{R^2}{r'}\right)^l}{r^{l+1}} - \frac{\Delta \eta}{l + \eta} \left(\frac{R^2}{r'}\right)^{1-\eta} \frac{1}{R r^{l+1}} \left(\frac{R^2}{r'}\right)^{l+\eta}$$

y el SEGUNDO TÉRMINO de esta igualdad se puede REESCRIBIR como

$$\frac{-\Delta \eta}{l + \eta} \left(\frac{R^2}{r'}\right)^{1-\eta} \frac{1}{R r^{l+1}} x^{l+\eta} \bigg|_0^{\frac{R^2}{r'}} = -\frac{\Delta \eta}{R} \left(\frac{R^2}{r'}\right)^{1-\eta} \int_0^{\frac{R^2}{r'}} \frac{x^{l+\eta-1}}{r^{l+1}} dx$$

y si definimos $\lambda(x) = -\frac{\Delta q}{R} \left(\frac{R}{r'}\right)^{1-\eta} \cdot x^{\eta-1}$ podremos escribir la función de GREEN como:

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} + \sum_l P_l(\cos \gamma) \left[\frac{\Delta R}{r'} \frac{\left(\frac{R}{r'}\right)^l}{r^{l+1}} - \int_0^{\frac{R^2}{r'}} \frac{\lambda(x) \cdot x^l}{r^{l+1}} dx \right]$$

y si la integral la cambiamos con la sumatoria:

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} + \frac{\Delta R}{r'} \frac{1}{\left|r - \left(\frac{R}{r'}\right)^2 r'\right|} - \int_0^{\frac{R^2}{r'}} \frac{\lambda(x)}{|r - x|} dx$$

Las 2 últimas expresiones corresponden a las funciones de GREEN de una carga puntual y de un alambre con densidad $\lambda(x)$



• q
EN r'

Con esto podremos determinar la fuerza que experimenta la carga q como la suma de las fuerza que ejerce cada una de estas cargas imágenes

$$\Rightarrow F = \left[q^2 \frac{\Delta R}{r'} \frac{1}{\left(r' - \frac{R^2}{r'}\right)^2} + q^2 \int_0^{\frac{R^2}{r'}} \frac{\lambda(x)}{(r' - x)^2} dx \right]$$

Aunque esa integral no se puede hacer numericamente jeje

GREEN PARA PLANOS: CONSIDERAREMOS QUE z ES LA COORDENADA RELEVANTE, ES DECIR QUE LOS PLANOS SON PARALELOS AL PLANO $x-y$. ENTONCES TRABAJEREMOS CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER, PARA SEPARAR A LA COORDENADA z .

G LA PODEMOS ESCRIBIR COMO SU TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$G(r, r') = \int d\vec{k} g(k) e^{-i\vec{k}(r-r')} \Rightarrow -4\pi\delta(r-r') = \nabla^2 G = -\int d\vec{k} g(k) \cdot k^2 e^{-i\vec{k}(r-r')}$$

Y LA TRANSFORMADA DE LA δ ES $\frac{e^{-i\vec{k}(r-r')}}{(2\pi)^3} \Rightarrow g(k) \cdot k^2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \Rightarrow g(k) = \frac{1}{2\pi^2 k}$

LUEGO PODEMOS REEMPLAZAR $g(k)$ EN $G(r, r')$ E INTEGRAR EN LA COMPONENTE EN z (k_z)

$$\Rightarrow G(r, r') = \int d\vec{k}_\perp dk_z \frac{e^{-i\vec{k}_\perp(r-r')_\perp}}{2\pi^2(k_\perp^2 + k_z^2)} \cdot e^{-ik_z(z-z')} = \int d\vec{k}_\perp \frac{g(z, z' | k_\perp)}{\pi} e^{-i\vec{k}_\perp(r-r')_\perp}$$

con $g(z, z' | k_\perp) = \int dk_z \frac{e^{-ik_z(z-z')}}{2\pi(k_\perp^2 + k_z^2)} = \frac{e^{-k_\perp ||z-z'||}}{k_\perp}$ ↑
integral con polos

Ahora podemos determinar $\nabla^2 G = \nabla^2 \int d\vec{k}_\perp \frac{g(z, z' | k_\perp)}{\pi} e^{-i\vec{k}_\perp(r-r')_\perp}$

$$\Rightarrow \nabla^2 G = -4\pi\delta(r-r') = -\int \frac{d\vec{k}_\perp}{\pi} \left(k_\perp^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) g(z, z' | k_\perp) e^{-i\vec{k}_\perp(r-r')_\perp}$$

y si $(k_{\perp}^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2})g(z, z') = \delta(z - z')$ obtenemos:

$$\nabla^2 G = - \int \frac{d\vec{k}_{\perp}}{\pi} \delta(z - z') e^{-i\vec{k}_{\perp}(\vec{r} - \vec{r}')_{\perp}} = - \delta\left(\frac{z - z'}{\pi}\right) \cdot (2\pi)^2 \delta(x - x') \delta(y - y') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Entonces la condición anterior es suficiente para que $G(\vec{r}, \vec{r}')$ cumpla $\nabla^2 G = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. La solución para $z \neq z'$ es $g(z, z') = A e^{-k_{\perp} z} + B e^{k_{\perp} z}$. Solo queda que $g(z, z')$ cumpla las condiciones de borde.