Resumen clase 1:

- Ecuaciones de Maxwell:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
&(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
&(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

- En la primera parte del curso se considera que los campos eléctricos y magnéticos no dependen del tiempo ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$). De esta forma, las dos primeras ecuaciones de Maxwell se refieren sólo al campo eléctrico (Electrostática).

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0
\end{aligned}
$$

- Ley de Coulomb

$$|\vec{F}| = K\frac{q_1 q_2}{r^2} \ ,$$

  $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ si se utiliza el sistema internacional de unidades (SI). ϵ_0 es la llamada permitividad del espacio libre o vacío.

- Principio de superposición. Dado un sistema de cargas puntuales, la fuerza eléctrica sobre cada una de ellas es la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las demás cargas.

- Campo eléctrico en la posición $\vec{r}$ de una carga puntual q ubicada en $\vec{r}'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

- Campo eléctrico en $\vec{r}$ de una distribución de carga continua

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \ ,$$

Resumen clase 2:

- En el cálculo del campo eléctrico de una distribución de carga continua

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\ ,$$

  se tiene que

$$\begin{aligned} dq' &= \lambda dl' \quad (\lambda \text{ es la densidad de carga lineal}) \\ dq' &= \sigma dS' \quad (\sigma \text{ es densidad de carga superficial}) \\ dq' &= \rho dV' \quad (\rho \text{ es la densidad de carga volumétrica}) \end{aligned}$$

- Si la distribuciones son uniformes, siendo Q la carga total, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda &= Q/l \\ \sigma &= Q/S \\ \rho &= Q/V \end{aligned}$$

- Visualización del campo eléctrico a través de las líneas de campo:
  - El campo eléctrico $\vec{E}$ es tangente a la línea de campo eléctrico en cada punto.
  - El número de líneas por unidad de área a través de una superficie es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región. De esta forma, las líneas de campo están más cerca donde el campo eléctrico es más intenso y están más separadas donde el campo es más débil.

- El flujo Φ del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ a través de una superficie cerrada S (que encierra un cierto volumen V) es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

  El flujo neto es una cantidad escalar que puede ser positiva, negativa o nulo.

- El flujo del campo eléctrico de una carga puntual a través de una superficie cerrada esférica S de radio r es

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}\ .$$

Resumen clase 3:

- El flujo del campo eléctrico de una carga puntual a través de una superficie cerrada esférica S de radio r es

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \ ,$$

  independiente de la distancia. Notar que este resultado es válido para cualquier superficie cerrada en torno a la carga.

- Si ahora tenemos n cargas, el flujo total en una superficie S que encierra las n cargas es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \vec{E}_i \cdot \vec{dS} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\epsilon_0} \ ,$$

- Con lo anterior se obtiene la Ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} \ ,$$

  donde $Q_{encerrada}$ corresponde a la carga total encerrada por la superficie S.

- La ley de Gauss puede ser utilizada para determinar el campo $\vec{E}$. Esto es aplicable a un número limitado de situaciones muy simétricas (planos infinitos, cilindros, esferas).

Resumen clase 4:

- Si se tiene una distribución continua de cargas:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV \ .$$

  Ocupando el teorema de la divergencia:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV \ ,$$

  se obtiene la primera ecuación de Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$.

- Se tiene una carga en una posición fija del espacio, la cual da origen a un campo $\vec{E}$. Para mover una carga q desde un punto $\vec{r}_a$ a un punto $\vec{r}_b$ se debe aplicar una fuerza externa para vencer la fuerza eléctrica entre ellas. Se debe realizar un trabajo

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{ext}\cdot \vec{dl} = -q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot\vec{dl} \ .$$

- Se considera el campo eléctrico generado por una carga Q, se calcula

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right) \ ,$$

  donde se usó que $\vec{dl} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$. La integral anterior es independiente del camino y en torno a un camino cerrado es cero ($r_a = r_b$).

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0 \Rightarrow \int (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{dS} = 0$$

  Donde se usó el teorema del rotor.

- Con lo anterior se obtiene la segunda ecuación de Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$.

Resumen clase 5:

- Se define el potencial eléctrico como:

$$V(\vec{r}) = -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- De acuerdo al teorema fundamental del gradiente:

$$V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla} V \cdot dl$$

  Con lo que se obtiene $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

- Reemplazando $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ en la primera ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ se obtiene la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \ .$$

- En una región del espacio libre de cargas, la anterior se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \ .$$

Resumen clase 6:

- El potencial eléctrico en $\vec{r}$ de una carga q ubicada en $\vec{r}'$ es (donde se toma el punto de referencia del potencial en infinito):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \; .$$

- Para una distribución continua de carga:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \; ,$$

  donde $dq' = \lambda dl'$, $dq' = \sigma dS'$ o $dq' = \rho dV'$.

- Se tiene una carga en una posición fija del espacio, la cual da origen a un campo $\vec{E}$. Para mover otra carga q desde un punto $\vec{r}_a$ a un punto $\vec{r}_b$ se debe aplicar una fuerza externa para vencer la repulsión eléctrica entre ellas. Para mover la carga se debe realizar un trabajo

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{ext}\cdot d\vec{l} = -q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\Delta V \; ,$$

  el cual que queda guardado como energía potencial electrostática.

- El incremento de una energía potencial es

$$\Delta U_{\mathrm{e}} = U_{\mathrm{e}}(\vec{r}_b) - U_{\mathrm{e}}(\vec{r}_a) = q\Delta V \; .$$

  Es decir, el potencial eléctrico representa la energía potencial eléctrica por unidad de carga.

- El trabajo necesario para armar una configuración de tres cargas puntuales es

$$W = q_2 V_1(\vec{r}_2) + q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3)$$
$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|}$$

Resumen clase 7:

- El trabajo necesario para armar cualquier configuración de cargas puntuales es

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\right).$$

  El término entre paréntesis es el potencial generado por las cargas q_j (cada una de ellas ubicada en $\vec{r}_j$) en el punto $\vec{r}_i$ (la posición de q_i)

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i) = U_e\ .$$

  Este trabajo representa la cantidad de energía potencial eléctrica almacenada en el sistema.

- Para una distribución de cargas continua, la expresión para la energía potencial eléctrica obtenida en la clase anterior se transforma en

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int dq' V(\vec{r})$$

  con $dq' = \rho dv'$, $dq' = \sigma dS'$ o $dq' = \lambda dl'$.

- A partir de la cual es posible obtener la siguiente expresión

$$U_\mathrm{e} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\oint V\vec{E}\cdot\vec{dS} + \int |\vec{E}|^2\,\mathrm{d}v\right)$$

  Si se integra en todo el espacio finalmente se obtiene

$$U_\mathrm{e} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}(\vec{r}')|^2\,\mathrm{d}v'$$

- Un conductor eléctrico es un sólido que contiene electrones que no se encuentran unidos a ningún átomo y son libres de moverse en el interior del material. Cuando dentro de un conductor no existe un movimiento neto de carga se dice que el conductor está en equilibrio electrostático, en esa situación se tienen las siguientes propiedades:
  - El campo eléctrico en el interior del conductor es cero.
  - El potencial eléctrico en todos los puntos del conductor tiene el mismo valor.
  - Si un conductor aislado tiene carga, ésta reside en su superficie.
  - El campo eléctrico justo fuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y de magnitud σ/ϵ_0.

Resumen clase 8:

- Se tiene un conductor esférico no cargado con una cavidad de forma arbitraria. En algún lugar de la cavidad hay una carga q. ¿Cómo es el campo eléctrico al exterior del conductor? El material conductor tiene una superficie interna y otra externa. Entre ellas (dentro del material conductor) sabemos que el campo es cero. Si dibujamos una superficie Gaussiana completamente dentro del material conductor, hay flujo cero a través de él, por lo que debe encerrar una carga igual a cero. La carga sobre la superficie interior es entonces $-q$. Debido a que el conductor no tiene carga neta, esto deja una carga $+q$ para la superficie exterior, la cual se distribuye de forma homogénea y el campo al exterior del conductor se comporta como la de una partícula puntual.

- Comentarios sobre el potencial eléctrico:
  - Una superficie equipotencial es una superficie tridimensional sobre la que el potencial eléctrico es el mismo en todos los puntos.
  - Las líneas de campo eléctrico siempre apuntan en dirección en que disminuye el potencial eléctrico.
  - Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí.

- Un condensador está formado por dos conductores que llevan carga de igual magnitud y de signo opuesto.

- La capacitancia del sistema se define como $C = Q/V$, donde V es la diferencia de potencial entre los conductores.

- La capacitancia depende sólo de la geometría del condensador, es decir, de sus tamaños, formas y la posición relativa de los conductores.

Resumen clase 9:

- La energía de un condensador formado por conductores de forma arbitraria de cargas Q y $-Q$ y a potenciales V_1 y V_2 es:

$$U = \frac{Q\Delta V}{2} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}\,.$$

- Dos condensadores están en paralelo cuando están conectados por sus dos extremos, de forma que la diferencia de potencial entre las placas es la misma para los dos $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. La carga almacenada en la placa positiva de cada condensador será diferente en cada caso. La asociación es equivalente a un solo condensador de capacidad igual a la suma de las dos individuales $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$.

- Dos condensadores están en serie cuando están conectados por uno de sus extremos. En este caso, la carga en la placa positiva de ambos condensadores es la misma $Q_1 = Q_2 = Q$. La diferencia de potencial en cada uno es diferente. La asociación es equivalente a un solo condensador de capacidad igual a $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

- Cuando un átomo neutro es puesto en un campo eléctrico, el núcleo es empujado en la dirección del campo y el electrón en la dirección opuesta. Se dice que el átomo está polarizado.

- Un dipolo eléctrico está constituido por dos cargas de igual magnitud y de signo opuesto separadas por una distancia d. El momento dipolar es $\vec{p} = q\vec{d}$, donde $\vec{d}$ es el vector desde la carga negativa a la positiva.

Resumen clase 10:

- El potencial en $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ de un dipolo eléctrico cuya carga q está ubicada en $\vec{r}_+ = d/2\hat{z}$ y carga $-q$ está ubicada en $\vec{r}_- = -d/2\hat{z}$ es

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}\right) .$$

Nos interesa calcular el potencial a distancias grandes de las cargas en comparación con su separación ($|\vec{r}| \gg d$). Se obtiene que

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} .$$

Esta expresión nos dice que el potencial de un dipolo, a diferencia del de una carga puntual, depende de la dirección de observación (a través del ángulo θ). Además depende de la distancia como $1/r^2$, mientras que el de una carga puntual va como $1/r$. Esto quiere decir que el potencial (y el campo) de un dipolo disminuyen más rápidamente con la distancia que el de una carga.

- El campo eléctrico en $\vec{r}$ generado por un dipolo es

$$\vec{E}(\hat{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

- Tenemos una distribución de carga que ocupa una pequeña región del espacio y queremos determinar el potencial en puntos alejados ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

La idea del desarrollo multipolar es hacer un cálculo aproximado, más sencillo que la integral exacta. Para ello se aproxima

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + ...$$

Usando lo anterior se obtiene:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- La carga total Q corresponde a:

$$Q = \int dq(\vec{r}') .$$

- El momento dipolar de una distribución continua de cargas es

$$\vec{p} = \int dq(\vec{r}')\vec{r}' ,$$

donde $dq = \rho dV'$, $dq = \sigma dS'$ o $dq = \lambda dl'$.

- En el caso de un conjunto de cargas puntuales, el momento dipolar es

$$\vec{p} = \sum_i q_i\vec{r}_i .$$

Resumen clase 11:

- En contraste a un conductor, donde las cargas son libres de moverse a través del material, en los dieléctricos todas las cargas estás atadas a un átomo o molécula específica. Cuando un material dieléctrico es colocado en un campo eléctrico, éste induce en cada átomo o molécula un pequeño momento dipolar, apuntando en la misma dicrección que el campo, es decir, el material se polariza.

- Una medida conveniente de este efecto es la polarización $\vec{P}$ que representa momento dipolar por unidad de volumen. En un material dieléctrico, en cada elemento de volumen dV' se tiene un elemento de momento dipolar $d\vec{p} = \vec{P}dv'$. El potencial total es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' \ .$$

- El potencial generado por un material polarizado se puede escribir como

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\oint \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\hat{n}dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int \frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\right]$$

  Esta expresión equivale a decir que la polarización corresponde a una superposición de dos distribuciones de carga, una densidad volumétrica $\rho_P \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ y otra densidad superficial $\sigma_P \equiv \vec{P}\cdot\hat{n}$ ($\hat{n}$ es la normal exterior a la superficie del material polarizado). Estas son las llamadas densidades de carga de polarización. Es decir:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\oint \frac{\sigma_P(\vec{r}')dS'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\right]$$

- Las distribuciones de carga de polarización deben su existencia a la presencia de dipolos en la materia. Debido a que los dipolos son objetos de carga total nula, un trozo de materia polarizada tiene que tener carga total nula.

$$\begin{aligned} Q_P &= \oint_S \sigma_P dS + \int_V \rho_P dV \\ &= \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}dS + \int_V -\nabla\cdot\vec{P}dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resumen clase 12:

- La densidad de carga total puede ser escrita como $\rho = \rho_P + \rho_l$ (densidad volumétrica de carga de polarización más la densidad volumétrica de carga libre). Así la primera ecucación de Maxwell se puede escribir como $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_P + \rho_l$. Equivalente a

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_P + Q_l}{\varepsilon_0}$$

  siendo Q_P y Q_l la carga total de polarización y libre, respectivamente, contenidas en el volumen.

- La primera ecuación de Maxwell se puede transformar de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_l.$$

  Se define el vector desplazamiento eléctrico como $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Quedando simplemente $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$, que es equivalente a

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre encerrada}}.$$

- La polarización es tanto causa como efecto del campo eléctrico, es decir, se tiene que $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$. Esta relación depende de cada material. No obstante, en la mayoría de los medios dieléctricos, cuando se aplica un campo electrostático de amplitud pequeña o moderada, la polarización resultante proporcional al campo eléctrico $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$. A un material que verifica esta relación se le denomina dieléctrico lineal. La cantidad adimensional χ_e es la denominada susceptibilidad eléctrica.

- En resumen, en un material dieléctrico lineal se puede escribir

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

  que establece que el desplazamiento eléctrico es proporcional al campo eléctrico. En esta relación aparecen dos nuevas cantidades, ambas denominadas permitividad o constante dieléctrica. Se define la permitividad relativa como $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ y la permitividad absoluta como $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$.

Resumen clase 13:

- En lugar de usar las ecuaciones en términos exclusivos del campo eléctrico o del vector desplazamiento, se pueden escribir las ecuaciones de la electrostática en una forma mixta:

  $$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$

  y en forma integral

  $$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l \qquad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Se tiene una superficie de separación entre dos dieléctricos, siendo el medio (1) el de abajo y el medio (2) el de arriba. A partir de la primera ecuación de Maxwell se obtiene

  $$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l \Rightarrow D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_l$$

  Esta condición indica que el salto en la componente normal de $\vec{D}$ viene dado por las densidades de cargas libres. A partir de la segunda ecuación de Maxwell:

  $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_2^{||} - E_1^{||} = 0$$

  Esta condición indica que la componente tangencial de $\vec{E}$ es continua.

Resumen clase 14:

- La corriente eléctrica es el flujo de una distribución continua de cargas. Se representa por dos cantidades físicas: la densidad de corriente (flujo de cargas en un punto), y la intensidad de corriente (flujo de cargas a través de una superficie).
- La intensidad de corriente proporciona la cantidad de carga ΔQ que atraviesa la sección S en un intervalo de tiempo Δt pequeño $\Delta Q = I\,\Delta t$. De esta forma $I = dQ/dt$.
- Por definición, las densidad de corriente volumétrica es

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{q_i \in \Delta V} q_i \vec{v}_i$$

- La intensidad de corriente es el flujo de carga que atraviesa una determinada sección de un conductor

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

  La intensidad de corriente es una magnitud escalar con signo. El signo de la intensidad de corriente nos dice para donde va la corriente respecto de la orientación de la superficie.

Resumen clase 15:

- Para cualquier volumen la cantidad de carga contenida en su interior sólo puede cambiar porque entre carga desde fuera o porque salga al exterior, es decir, la carga eléctrica es una cantidad conservada.

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$
$$\Rightarrow - \oint \vec{J} \cdot \vec{dS} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

  La ecuación de continuidad de la carga es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \ .$$

- En el estado estacionario ($\partial \rho / \partial t = 0$), la carga contenida en un volumen no cambia, por lo que la ley de conservación de la carga se reduce a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \oint \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \ .$$

  Primera ley de Kirchhoff: la suma algebraica de todas las intensidades que confluyen en un nodo tiene que ser nula, donde el signo de la corriente depende de si llega o sale del nodo.

$$\sum_i I_i = 0$$

- Al aplicar un campo $\vec{E}$ a un conductor surge un campo vectorial $\vec{J}$. Experimentalmente, se encontró que en muchos materiales existe una proporcionalidad simple entre $\vec{J}$ y $\vec{E}$, la cual es llamada Ley de Ohm $\vec{J} = g\vec{E}$ donde g es característico del medio conductor y recibe el nombre de conductividad. Su inverso $\eta = 1/g$ es la llamada resistividad eléctrica.

- Se define la resistencia eléctrica R de un conductor a través de la relación $V = IR$. Esta cantidad es función de la geometría del sistema y de la conductividad. De manera general, la resistencia es

$$R = \frac{\int \vec{E} \cdot \vec{dr}}{g \int \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$

Resumen clase 16:

- Adicionalmente a la densidad de corriente volumétrica, existe la densidad superficial de corriente definida como

$$\vec{K} = \frac{1}{\Delta S} \sum_{q_i \in \Delta S} q_i \vec{v}_i \ .$$

- La intensidad de corriente es el flujo de carga que atraviesa una determinada sección de un conductor

$$I = \int_\Gamma \vec{K} \cdot \hat{n} dl \ ,$$

  donde $\hat{n}$ es normal a la curva Γ.

- Se considera un tubo de longitud dr y de sección dS. En un intervalo de tiempo dt entra por el extremo A, una carga total $dq = \vec{J} \cdot \vec{dS} dt$ y sale por el extremo B una cantidad igual. Para que esto ocurra, es necesario que exista entre A y B una diferencia de potencial, que supone una pérdida de energía eléctrica, dada por

$$dU = (V_A - V_B) dq = (V_A - V_B) \vec{J} \cdot \vec{dS} dt = (\vec{E} \cdot \vec{dr})(\vec{J} \cdot \vec{dS}) dt = (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV dt.$$

  La potencia ($P = dU/dt$), es la energía perdida por unidad de tiempo, de forma que

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J} dV \Rightarrow P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

- Para un material óhmico, $\vec{J} = g\vec{E}$, la energía total disipada en todo el volumen por unidad de tiempo, que es necesaria para mantener la corriente eléctrica es

$$P = \int g E^2 dV$$

  este resultado es conocido como efecto de Joule. Como la densidad de corriente a la salida es la misma que a la entrada, la energía eléctrica consumida no se ha invertido en un incremento de energía cinética, esto es, la energía se ha perdido de forma irreversible en forma de calor.

Resumen clase 17:

- Para mantener una corriente en régimen permanente, es necesario disponer de una fuente de energía externa (fuerza electromotriz o f.e.m.). Para que las cargas se muevan, sentirán un campo efectivo $\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}'$, donde $\vec{E}$ es el campo electrostático, y $\vec{E}'$ un campo no electrostático. Se define la f.e.m. en un circuito cerrado como $\varepsilon = \oint \vec{E}' \cdot \vec{dl}$.

- Segunda ley de Kirchhoff: en un circuito cerrado, la suma de todas las caídas de potencial en las resistencias es igual a la suma de los potenciales de las baterías (o generadores).

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j \Delta V_j$$

- La segunda ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ nos permite deducir la condición de borde para la componente tangencial del campo eléctrico $E_1^{||} = E_2^{||} \Rightarrow g_2 J_1^{||} = g_1 J_2^{||}$.

- Para estudiar la componente normal se considera la ecuación de continuidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial\rho/\partial t$ la cual implica $J_2^{\perp} - J_1^{\perp} = -d\sigma/dt$. La cual puede ser complementada con la primera ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, que implica $D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma$.

Resumen clase 18:

- Para un instante t, la densidad de carga para un punto dentro de un conductor homogéneo de conductividad g y permitividad ϵ es ρ. Se tienen las ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial \rho / \partial t$$

Equivalentes a

$$\partial \rho / \partial t + g/\epsilon \rho = 0,$$

cuya solución es $\rho = \rho_0 e^{-gt/\epsilon}$. El cociente $\tau = \epsilon/g$ recibe el nombre de tiempo de relajación y es una medida del tiempo que tarda en desaparecer una densidad de carga situada inicialmente dentro de un conductor.

- La fuerza que experimenta una carga eléctrica puntual q que se encuentra en movimiento con velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})\right).$$

Esta expresión se denomina Ley de Lorentz. Siendo $\vec{E}$ el campo eléctrico y $\vec{B}$ el campo magnético.

- La fuerza magnética neta sobre una distribución de corriente de volumen $\vec{J}$, en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, será

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \, \mathrm{d}V'$$

En el caso de una distribución de corriente superficial se obtiene

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = \int_S \vec{K}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \, \mathrm{d}S'$$

Si se tiene una corriente I circulando a lo largo de una curva (abierta o cerrada) la fuerza magnética sobre el sistema es

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = \int_\Gamma I \mathrm{d}\vec{r'} \times \vec{B}(\vec{r}')$$

Resumen clase 19:

- El campo magnético producido por una corriente de volumen, superficial o lineal es

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$
$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{K}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}S'$$
$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\mathrm{d}\vec{r}'\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

  μ_0 es una constante denominada permeabilidad del vacío. A todas estas expresiones se denominan indistintamente Ley de Biot-Savart.

- El campo magnético se puede escribir como el rotor de un cierto potencial vector:

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'\right) = \nabla\times\vec{A}$$

- De lo anterior es inmediato que $\nabla\cdot\vec{B}=0$, la cual corresponde a la tercera ecuación de Maxwell. Por analogía con el campo eléctrico, se observa que no existen las cargas magnéticas (conocidas como monopolos).

- Por otro lado, se puede demostrar que $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$, la cual corresponde a la cuarta ecuación de Maxwell, también llamada Ley de Ampère. Este resultado es válido sólo para corrientes estacionarias ($\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$).

- La tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell, para corrientes estacionarias, en su forma diferencial e integral son:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\Rightarrow\oint_\Gamma\vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=\mu_0 I_{\text{encerrada}}$$

- Equivalen a decir que el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es nulo, y que la circulación de $\vec{B}$ a lo largo de una curva cerrada arbitraria es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa la superficie S (determinada por Γ) y orientada según la regla de la mano derecha.

Resumen clase 20:

- En resumen, el campo magnético puede ser calculado de tres formas:
  - Por integración directa
$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$
  - A partir del potencial vector magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, con
$$\vec{A}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$
  - Usando la ley de Ampere (problemas que tienen simetría)
$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{encerrada}}$$
- El potencial vector para el caso de una espira es
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
Nos interesa calcular el potencial vector en zonas alejadas de la espira, es decir, en la zona donde $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}$$
Con lo que queda
$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\vec{r}} + \oint \frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'}{r^3}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'}{r^3}$$
- A partir de
$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint (\vec{r}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'$$
Se obtiene
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \qquad \text{con} \qquad \vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{r}'\times \mathrm{d}\vec{r}'$$
A una distribución de corriente que produce este potencial vector (y el campo magnético resultante) se le denomina dipolo magnético. Podemos imaginar un dipolo magnético como una pequeña espira de corriente. La extensión al caso de una distribución de corriente volumétrica o superficial puede obtenerse siguiendo las reglas usuales de transformación
$$\int_\Gamma (\ldots) I\mathrm{d}\vec{r}' \to \int_S (\ldots)\vec{K}\mathrm{d}S' \to \int_V (\ldots)\vec{J}\mathrm{d}V'$$
- El campo magnético se puede obtener a partir del potencial vector
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

Resumen clase 21:

- Los medios materiales perciben y producen campos magnéticos debido a la presencia de dipolos magnéticos en su interior. Cada átomo y cada partícula subatómica poseen un pequeño momento magnético dipolar. Para caracterizar estos momentos magnéticos se define la magnetización:

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\vec{m}_i \in \Delta V} \vec{m}_i$$

- El potencial vector magnético debido a una magnetización es

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}V'$$

  Una vez que se tiene el potencial vector, puede encontrarse el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

- Lo anterior puede reescribirse en la forma

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}S'$$

  con

$$\vec{J}_m(\vec{r}') = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$
$$\vec{K}_m(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}$$

  siendo $\vec{n}$ la normal exterior al volumen magnetizado. De esta manera el potencial vector equivale a la superposición del potencial vector de una corriente volumétrica y de una superficial, siendo $\vec{J}_m$ y $\vec{K}_m$ las densidades de corriente de magnetización.

- En el caso general, cuando existen, a la vez, materiales magnetizados y corrientes libres, las propiedades aditivas del potencial vector permiten escribir:

$$\vec{A}_{\text{total}} = \vec{A}_l + \vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{K}_l + \vec{K}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_l + \vec{J}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

- Empleando las densidades de corriente de magnetización, las ecuaciones para el campo magnético quedan como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_l + \vec{J}_m)$. Si se reemplaza $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ y se define el campo auxiliar $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$, se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}}$$

Resumen clase 22:

- Empleando las densidades de corriente de magnetización, las ecuaciones para el campo magnético quedan como $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_l + \vec{J}_m)$. Si se reemplaza $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$ y se define el campo auxiliar $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$, se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{\text{libre}}$$

- En términos de $\vec{H}$ y $\vec{B}$ las ecuaciones de la magnetostática se expresan $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l$. Las condiciones de borde corresponden a:
  - La componente normal del campo $\vec{B}$ es continua: $B_1^n = B_2^n$.
  - La componente tangencial del campo $\vec{H}$ es discontinua si existen densidades de corrientes superficiales en la interfaz entre los dos materiales $H_2^t - H_1^t = K_l$.

- Las ecuaciones anteriores no son completas, y deben complementarse con una relación entre $\vec{M}$ y $\vec{B}$. En términos generales, se tienen materiales lineales isótropos (diamagnéticos y paramagnéticos) y materiales ferromagnéticos.

- Para los medios lineales isótropos, la magnetización es colineal al campo magnético $\vec{H}$, por lo que $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$ siendo χ_m la susceptibilidad magnética.

  El campo magnético $\vec{B}$ es también proporcional al campo magnético $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

  La cantidad $\mu_r = 1 + \chi_m$ es la denominada permeabilidad relativa del medio, mientras que $\mu = \mu_0\mu_r$ es la permeabilidad absoluta.

  Dependiendo del signo de χ_m, los materiales lineales se dividen en dos grupos: diamagnéticos ($\chi_m < 0$) y paramagnéticos ($\chi_m > 0$).

  Los materiales superconductores se caracterizan porque el campo magnético en su interior es nulo (se inducen corrientes en la superficie de los superconductores que provocan que $\vec{B} = 0$). Alternativamente, puede decirse que un superconductor es un diamagnético perfecto ($\chi_m = -1$, $\mu = 0$).

- Los materiales ferromagnéticos se caracterizan por ser capaces de presentar una magnetización en ausencia de campo externo y cuando se les aplica un campo externo presentan lo que se denomina ciclo de histéresis

Resumen clase 23:

- En 1831, Faraday y Henry realizaron de manera independiente importantes descubrimientos que probaban que un campo magnético puede producir una corriente eléctrica, pero siempre que algo estuviera variando en el tiempo. Existen dos causas fundamentales:

  1) El movimiento relativo del circuito.

  2) La existencia de un campo magnético externo variable con el tiempo.

- Si se tiene una espira determinada por Γ y de superficie S, que se mueve en un campo magnético que no depende del tiempo pero que es no uniforme. La fuerza electromotriz en el loop por definición es

$$\varepsilon = \oint_\Gamma \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl} = \oint_\Gamma (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

  Por otro lado, considerando que el flujo magnético a través de una superficie abierta es $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \neq 0$ y cerrada $\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$. Se puede demostrar que

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{con} \quad \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

  donde S es la superficie de la espira, y la dirección de $\vec{dS}$ es de acuerdo a la regla de la mano derecha (de acuerdo al sentido en que se escoge la corriente inducida). Si la espira tiene una resistencia R entonces $\varepsilon = IR$.

Resumen clase 24:

- De acuerdo a la experiencia, como consecuencia a la variación de $\vec{B}$ con el tiempo aparece un campo eléctrico inducido, dado por la expresión:

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot dl = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

  que corresponde a la ley de Faraday en forma integral. En virtud del teorema del rotor:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{dS} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

  que se conoce como ley de Maxwell-Faraday o simplemente ley de Faraday.

- En consecuencia, todas las observaciones de Faraday se resumen en la expresión matemática:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}.$$

- Ley de Lenz: la f.e.m. inducida engendra en el circuido corrientes inducidas, cuyos efectos tratan de oponerse a cualquier cambio en el flujo magnético presente.

Resumen clase 25:

- Si tenemos una espira por la cual circula una corriente variable en el tiempo, se genera un campo magnético también variable, que induce una fuerza electromotriz sobre la propia espira. Éste es el efecto de la autoinducción.

- El campo magnético debido a una corriente eléctrica, según la ley de Biot y Savart es proporcional a la intensidad de corriente que lo causa. Al ser el campo proporcional a la intensidad de corriente, también lo será su flujo
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = LI$$
siendo L el denominado coeficiente de autoinducción. Este coeficiente depende exclusivamente de la geometría del circuito.

  Si el circuito es rígido, el coeficiente de autoinducción es constante. De esta forma
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Si en lugar de una sola espira tenemos un conjunto de ellas, por las cuales circulan corrientes I_k, el flujo a través de una superficie S_i apoyada en la espira i tendrá una contribución por cada una de las espiras
$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_i + \int_{S_i} \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_i + \cdots = \sum_k L_{ki} I_k$$
Las cantidades L_{ki} para $i \neq k$ se denominan coeficientes de inducción mutua.

Resumen clase 26:

- La fuerza electromotriz en un circuito es proporcional a la corriente, pues la densidad de corriente que aparece en él es proporcional a la fuerza ejercida sobre las partículas ($\vec{J} = g\vec{F}/q$). En términos generales

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl} = \int \vec{J} \cdot \vec{dl} = \int \frac{I}{S} dl = IR$$

- Se tiene una espira rígida que se caracteriza por una resistencia eléctrica R y un coeficiente de autoinducción L. Si esta espira se encuentra sometida a una fuera electromotriz externa ($\mathcal{E}_{ext}$), la ecuación para la corriente que pasa por el circuito es

$$IR = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{ext} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = \mathcal{E}_{ext}$$

- En un circuito que posea una autoinducción L, se necesita de una fuente externa para establecer una corriente estacionaria I_0. Si luego la fuente externa se desconecta, la corriente disminuirá según:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

  En consecuencia, la energía que se disipará por efecto Joule será:

$$U = \int_0^t I^2 R \, dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

  Este término es energía almacenada en el sistema. Esta energía magnética puede considerarse asociada a las corrientes estacionarias.

- La energía almacenada por n circuitos por los que circulan corrientes I_1... I_n es,

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} L_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} L_{ij} I_i\right) I_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Phi_j I_j$$

- El flujo es

$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{dS_i} = \int_{S_i} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{dS_i} = \oint_{\Gamma_i} \vec{A} \cdot \vec{dl_i}$$

- La energía se puede escribir $U = \frac{1}{2}\oint \vec{A} \cdot \vec{I} dl$. La expresión anterior puede extenderse a una densidad de corriente de volumen como $U = \frac{1}{2}\int \vec{J} \cdot \vec{A} dV$.

- Podemos escribir $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ y usamos que $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})$

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{H} \cdot \vec{B} dV - \frac{1}{2}\oint (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \vec{dS}$$

  Integrando en todo el espacio, finalmente

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

Resumen clase 27:

- En magnetostática se dedujo que $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$. Si se toma la divergencia a ambos lados, se obtiene que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, que en general no es cierto. Una de las contribuciones cruciales que Maxwell hizo a la comprensión de la electrodinámica fue darse cuenta de la forma de resolver este problema. A partir de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- En resumen, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Se consideran campos eléctricos y magnéticos, en ausencia de cargas y corrientes ($\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$), y en el vacío (permitividad ϵ_0 y permeabilidad μ_0). Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

  Al aplicar el rotor a la segunda ec. de Maxwell (ley de Faraday) se obtiene

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

  Análogamente para el campo magnético

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

  Estas ecuaciones muestran que los campos satisfacen la ecuación de ondas. Cuando Maxwell derivó este resultado, encontró que la velocidad en el vacío es igual que la velocidad de la luz $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8$m/s. Por esta teoría matemática Maxwell descubrió que la luz es un fenómeno de onda electromagnética.