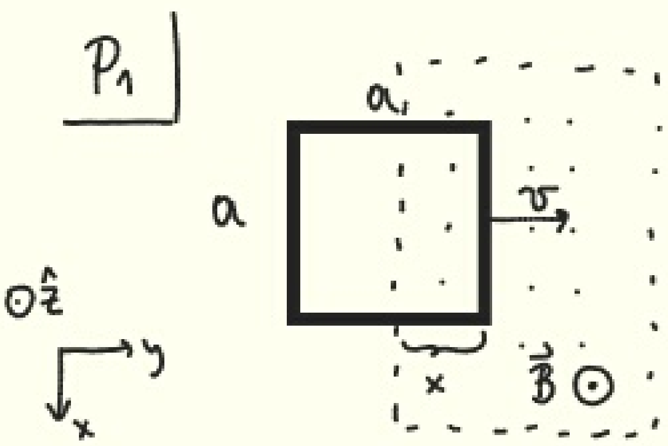
P1

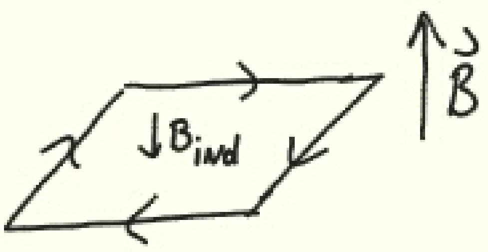


a) Usaremos la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

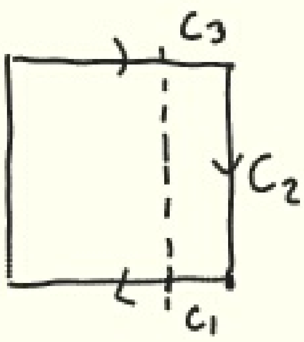
Integrando en el circuito cuadrado en sentido anti-horario, obtenemos:

$$\Delta V = IR = -\frac{\partial}{\partial t}(xaB) = -v_0 a B \Rightarrow I = -\frac{v_0 a B}{R}$$



Respecto al sentido de la corriente, la regla general es que la corriente debe ser tal que el campo magnetico asociado a la corriente inducida se oponga al cambio del flujo magnetico y por lo tanto va en sentido horario.

b) La fuerza la sacamos con $\vec{F} = \int I(\hat{u} \times \vec{B}) dl$ donde $\hat{u}$ apunta en la dirección de la corriente



$$\vec{F} = \cancel{\int_{C_1}} + \int_{C_2} + \cancel{\int_{C_3}} = \int_0^a I \hat{x} \times B\hat{z}\, dl = -IaB\hat{y} = -v_0 \frac{a^2 B^2}{R}\hat{y}$$

donde las integrales en C_1 y C_3 se van pues apuntan en sentidos opuestos

c) $P = IV = I^2 R = \dfrac{v_0^2 a^2 B^2}{R}$

d) $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -v\dfrac{a^2 B^2}{R}\hat{y} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{-a^2 B^2}{mR} dt \,/ \int \Rightarrow \ln\left(\dfrac{v}{v_0}\right) = -\dfrac{a^2 B^2}{mR} t$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 \exp\left(\frac{-a^2B^2}{mR}t\right)$$

LUEGO $P = \frac{v^2(t)a^2B^2}{R} \Rightarrow E = \int_0^T P(t)dt = \frac{v_0^2a^2B^2}{R}\int_0^T \exp\left(\frac{-2a^2B^2}{mR}t\right)$

donde T ES el tiempo PARA el cual el alambre ENTRA completamente EN la REGIÓN con campo magnetico.

$$\Rightarrow a = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T v_0 \exp(-\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) \quad \text{con } \alpha = \frac{a^2B^2}{mR}$$

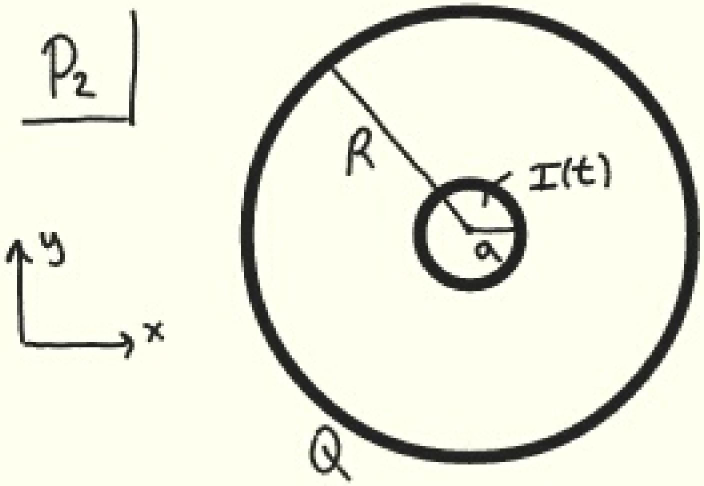
$$\Rightarrow e^{-\alpha T} = 1 - \alpha a \Rightarrow -\alpha T = \ln(1-\alpha a) \Rightarrow T = \frac{-1}{\alpha}\ln(1-\alpha a)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m v_0^2 a^2 B^2}{mR}\int_0^T \exp(-2\alpha t)dt = \frac{m v_0^2 a^2 B^2}{mR}\cdot\frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha T}\right)$$

$$= \frac{m v_0^2 \cancel{a^2 B^2}}{\cancel{mR}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\alpha}}\left(1 - (1-\alpha a)^2\right) = \frac{m v_0^2}{2}\left(2\alpha a - \alpha^2 a^2\right) = \frac{m v_0^2}{2}\left(\frac{2a^3B^2}{mR} - \frac{a^6B^4}{m^2R^2}\right)$$

Notamos que si $\alpha a \to 1 \Rightarrow T \to \infty$ y $E \to \frac{m v_0^2}{2}$, ES decir se pierde toda la ENERGÍA cinetica

$\underline{P_2}$



PARA RESOLVER El PROBLEMA CALCULAMOS LA INDUCTANCIA MUTUA ENTRE LOS DOS ANILLOS, LO CUAL NOS PERMITIRA OBTENER El FLUJO MAGNETICO COMO FUNCIÓN DE LA CORRIENTE Y ASÍ USAR LAS ECUACIONES DE MAXWELL.

Ahora para calcular la inductancia mutua usaremos el sistema al reves, es decir con una corriente en el círculo grande y luego sabemos que la inductancia se mantiene. El campo magnetico en el centro de la espira lo podemos calcular con Biot-Savart

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I\hat{\phi}\times R\hat{r}}{R^{\cancel{3}\cancel{2}}}\cancel{R}d\phi = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{z} \Rightarrow \Phi_m \approx \frac{\mu_0 I\pi a^2}{2R} \quad \text{pues } a \ll R$$

$$y \quad \Phi_m \equiv MI \Rightarrow M = \frac{\pi\mu_0 a^2}{2R} \quad \text{es la inductancia mutua}$$

Ahora volviendo a nuestro problema, considerando $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ podemos integrar esa ecuación en el circuito de radio R

$$\Rightarrow -\dot{\Phi}_m = -M\dot{I}(t) = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{\text{simetría}}{=} 2\pi R\, E(R,t) \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\cancel{\pi}\mu_0 a^2}{2R}\cdot\frac{\hat{\phi}}{2\cancel{\pi}R}\dot{I}$$

Y entonces podemos sacar la fuerza sobre un diferencial de carga en el circuito del alambre exterior

$$d\vec{F} = dq\cdot\vec{E} = \frac{Q\,dl}{2\pi R}\cdot\vec{E} \Rightarrow d\tau = R\hat{r}\times d\vec{F} = -\frac{\mu_0 a^2 Q}{8\pi R^2}\dot{I}\hat{z}\,dl \Rightarrow \tau = \int d\tau = 2\pi R\, d\tau$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{\mu_0 a^2 Q \dot{I}}{4R}\hat{z} \quad \Big\} \text{ TORQUE NETO SOBRE EL ALAMBRE}$$

$$\Rightarrow MR^2 \frac{dw}{dt} = \tau = -\frac{\mu_0 a^2 Q \dot{I}}{4R}\hat{z} \Rightarrow w(t) = \frac{-\mu_0 a^2 Q}{4mR^3} \cdot \int_0^t \dot{I} dt' = \frac{\mu_0 a^2 Q}{4mR^3}\left[I(0) - I(t)\right]$$

$$\Rightarrow w_f = \frac{\mu_0 a^2 Q}{4mR^3} I(0) \quad y \quad L_f = mR^2 w_f$$

b) Si AGREGAMOS UNA AUTOINDUCTANCIA ENTONCES $\Phi_m = MI(t) + L I_R$ donde I_R ES lA CORRIENTE EN El Anillo GRANDE y por lo tanto

$$I_R = v \cdot \lambda = wR\lambda = \frac{Qw}{2\pi} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -M\dot{I}(t) - L\frac{Q}{2\pi}\frac{dw}{dt}$$

CON lo CUAl El NUEVO TORQUE SERÁ:

$$mR^2 \frac{dw}{dt} = \tau = -\hat{z}\frac{Q}{R}\left(M\dot{I} + L\frac{Q}{2\pi}\frac{dw}{dt}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dw}{dt}\left(mR^2 + L\frac{Q^2}{2\pi R}\right) = \tau_{ANTERIOR}$$

Concluimos que ESTA inductancia GENERA UN EFECTO ANALOGO A UN INCREMENTO EN lA INERCIA DEl Anillo

P3 | a) Si $\rho=0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=0$ y además $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Este par de ecuaciones son análogas a $\nabla\cdot\vec{B}=0$ y $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ de magnetostática. Como sabemos que estas dos últimas dan origen a la ley de Biot-Savart es esperable obtener la ley descrita en el enunciado.

Para deducir esta ecuación usamos que $\nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=\nabla\times\vec{F}$ con $\vec{F}$ un potencial vector eléctrico. Además al igual que con el potencial vector $\vec{A}$ tenemos la libertad de escoger $\nabla\cdot\vec{F}$. Esto se debe a que si le sumamos un gradiente $\vec{F}'=\vec{F}+\nabla\Psi \Rightarrow \nabla\times\vec{F}'=\nabla\times\vec{F}=\vec{E}$ pues $\nabla\times(\nabla\Psi)=0$, luego si queremos $\nabla\vec{F}'=0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{F}+\nabla^2\Psi=0$, lo cual da una ecuación de Poisson para Ψ. Bueno, volviendo al problema, tomamos $\nabla\cdot\vec{F}=0$ y entonces:

$$\nabla\times\vec{E}=\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\cancel{\nabla\vec{F}})^{0}-\nabla^2\vec{F}=-\dot{\vec{B}} \Rightarrow \nabla^2\vec{F}=\dot{\vec{B}}$$

Luego, si no hay condiciones de borde, conocemos la solución

$$\vec{F}=\frac{-1}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{B}}(r')\,d^3r'}{|r-r'|} \Rightarrow \vec{E}=\frac{-1}{4\pi}\int\nabla\times\left(\frac{\dot{\vec{B}}}{|r-r'|}\right)d^3r' \overset{\text{identidad}}{=} \frac{-1}{4\pi}\int\nabla\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)\times\dot{\vec{B}}+\cancel{\frac{\nabla\times\dot{\vec{B}}(r')}{|r-r'|}}^{0}\,d^3r'$$

Donde $\nabla\times\dot{\vec{B}}(r')$ es 0 porque $\dot{\vec{B}}(r')$ no depende de las coordenadas $\vec{r}$ y $\nabla\times$ deriva respecto a estas. Entonces como $\nabla\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)=\frac{-(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{-1}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{B}}\times(\vec{r}-\vec{r}')\,d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$ con lo cual obtenemos lo pedido

b) $\dot{\vec{B}} = \dot{B}(\rho, z)\hat{z}$ y ENTONCES USANDO lo deducido EN a)

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{\dot{B}(\rho', z')\hat{z}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3} \propto \hat{\phi}$$ Al igual que cuando son corrientes sabemos que es azimutal

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\rho, z)\hat{\phi} \Rightarrow \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec{s} \Rightarrow 2\pi\rho\, E(\rho, z) = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho, z, \phi) = \frac{-1}{2\pi\rho}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\hat{\phi}$$

c) Sabemos que $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = q\left(\frac{-1}{2\pi a}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\hat{\phi} + vB\,\hat{\phi}\times\hat{z}\right)$

y entonces como $\dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$, a lo que imponemos que $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ y $r = a$ y reemplazamos con $r\dot{\phi} = v$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = -\frac{mv^2}{a}\hat{r} + m\dot{v}\hat{\phi} = q\left(\frac{-1}{2\pi a}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\hat{\phi} + vB\hat{r}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{mv^{\cancel{2}}}{a} = q\cancel{v}B \;;\quad m\dot{v} = \frac{-q}{2\pi a}\dot{\Phi}_m$$

$$\Rightarrow v = \frac{-qBa}{m} \Rightarrow \dot{v} = -\frac{q\dot{B}a}{m} \Rightarrow -q\dot{B}a = \frac{-q}{2\pi a}\dot{\Phi}_m \Rightarrow \dot{\Phi}_m = 2\pi a^2\dot{B}$$

Observamos que $\dot{B}$ es la magnitud del campo en $r = a$, por lo que la ecuación relaciona el tamaño de $\dot{B}$ en el perímetro con el cambio de flujo magnético en el círculo. Por último el momentum angular es:

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = ma\hat{r}\times v\hat{\phi} = mav\hat{z} = -qa^2B\hat{z}$$