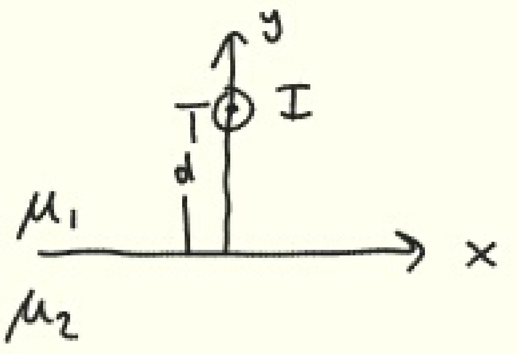
P1



$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{A}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_1}{4\pi}\left[I \ln\left(x^2+(y-d)^2\right) + I' \ln\left(x^2+(y+d)^2\right)\right]\hat{z} & y>0 \\ -\dfrac{\mu_2}{4\pi} I'' \ln\left(x^2+(y-d)^2\right)\hat{z} & y<0 \end{cases}$$

a) OBSERVAMOS QUE $\nabla \cdot \vec{A} = \partial_z A_z = 0$ Y QUE $\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z}$, ENTONCES

$$\nabla^2 \ln\left(x^2+(y\pm d)^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+(y\pm d)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2(y\pm d)}{x^2+(y\pm d)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x^2+(y\pm d)^2} - \frac{4x^2}{(x^2+(y\pm d)^2)^2} + \frac{2}{x^2+(y\pm d)^2} - \frac{4(y\pm d)^2}{(x^2+(y\pm d)^2)^2} = \frac{4-4}{x^2+(y\pm d)^2} = 0$$

b)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \overset{\text{definición del Rotor}}{=} \begin{cases} -\dfrac{\mu_1}{4\pi}\left[I\dfrac{2(y-d)}{x^2+(y-d)^2} + I'\dfrac{2(y+d)}{x^2+(y+d)^2}\right]\hat{x} & \\ +\dfrac{\mu_1}{4\pi}\left[I\dfrac{2x}{x^2+(y-d)^2} + I'\dfrac{2x}{x^2+(y+d)^2}\right]\hat{y} & y>0 \\ -\dfrac{\mu_2}{4\pi} I'' \dfrac{2(y-d)}{x^2+(y-d)^2}\hat{x} + \dfrac{\mu_2}{4\pi} I'' \dfrac{2x}{x^2+(y-d)^2}\hat{y} & y<0 \end{cases}$$

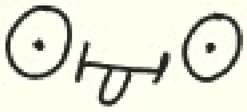
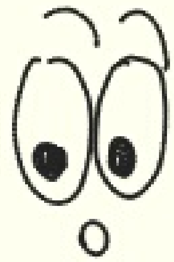
LUEGO LAS CONDICIONES DE BORDE SON $(B_2 - B_1)\cdot \hat{n}_{12} = 0$; $\hat{n}_{12} \times (H_2 - H_1) = 0$

CON $\hat{n}_{12} = \hat{y}$ OBTENEMOS LA CONSERVACIÓN DE B_y Y DE H_x PARA $y=0$

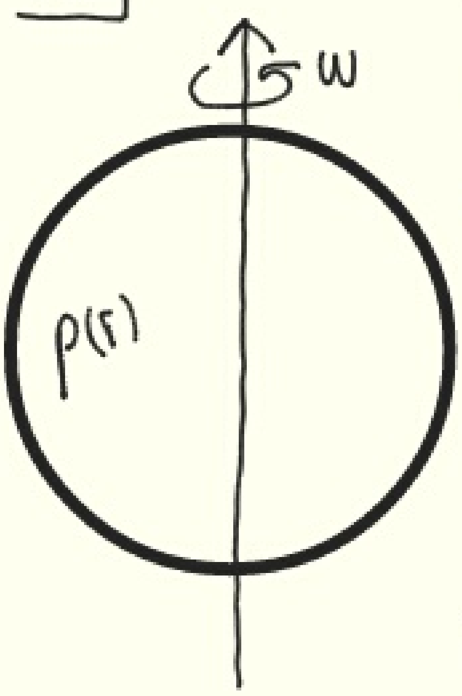
$$\Rightarrow \frac{\mu_1}{4\pi}\left[I\frac{+2x}{x^2+d^2} + I'\frac{2x}{x^2+d^2}\right] = \frac{\mu_2}{4\pi} I'' \frac{2x}{x^2+d^2} \qquad I\frac{-2d}{x^2+d^2} + I'\frac{2d}{x^2+d^2} = I''\frac{-2d}{x^2+d^2}$$

$$\Rightarrow \quad I + I' = \frac{\mu_2}{\mu_1} I'' \quad ; \quad I - I' = I''$$

$$\Rightarrow \quad I'' = I \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad ; \quad I' = I \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

$\Rightarrow$  >.< 

P_2



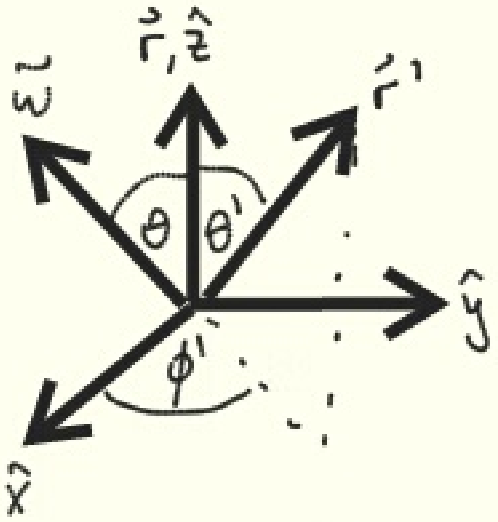
a) Para poder definir $\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Psi$ se requiere $\nabla \times \vec{B} = 0$ pero nosotros sabemos que $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, entonces $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ porque la distribución no depende del tiempo y $\vec{J} = 0$ solo fuera de la esfera, por lo tanto $\nabla \times \vec{B} = 0$ solo fuera de la esfera. Luego de $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi = 0$

Pero la ecuación de Laplace en esfericas ya la sabemos resolver cuando hay simetría azimutal (ver aux 1)

$$\Rightarrow \Psi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Usando la condición de borde $\Psi(r \to \infty) = 0$ obtenemos que $A_\ell = 0$ y luego los B_ℓ los determinaremos con el campo dentro de la esfera al aplicar condiciones de borde.

Ahora para el campo dentro de la esfera consideramos el potencial vector $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r')}{|r - r'|} d^3r'$ y luego $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Aquí $\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{r}$ donde $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ es la velocidad tangencial del diferencial de carga. Esta integral sera dificil de calcular y de hecho usaremos un truquito del Griffiths. Para integrar nos daremos un sistema de referencia en donde $\hat{r}$ apunta en $\hat{z}$



$\vec{\omega} = \omega(\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{x})$

$\vec{r}' = r'(\sin\theta'\cos\phi'\hat{x} + \sin\theta'\sin\phi'\hat{y} + \cos\theta'\hat{z})$

$\vec{r} = r\hat{z}$

$$\Rightarrow J(r') = \rho(r')\omega r'\left[\sin\theta'\cos\phi'\cos\theta\hat{y} - \sin\theta'\sin\phi'\cos\theta\hat{x} + \sin\theta'\sin\phi'\sin\theta\hat{z} - \sin\theta\cos\theta'\hat{y}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^R dr'\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi} d\phi' \frac{J}{|r-r'|}\sin\theta' = -\frac{\mu_0}{2}\int_0^R dr'\int_0^\pi d\theta' \frac{\rho(r')\omega r'}{|r-r'|}\sin\theta\cos\theta'\sin\theta'\hat{y}$$

donde eliminamos los términos con $\cos\phi'$ y $\sin\phi'$ pues integran 0. Ahora para la integral en θ' usamos que $|r-r'| = (r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}$

$$\Rightarrow \int_0^\pi d\theta' \frac{\cos\theta'\sin\theta'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta')^{1/2}} \overset{u=\cos\theta}{=} \int_{-1}^{1} du \frac{u}{(r^2+r'^2-2rr'u)^{1/2}} = -\frac{(r^2+r'^2+rr'u)}{3r^2r'^2}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}\,\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = -\frac{\mu_0}{2}\int_0^R dr' \frac{K\omega r'^{3}}{3\cancel{r'^2}r^2}\left[(r^2-rr'+r'^2)|r+r'| - (r^2+r'^2+rr')|r-r'|\right]\hat{y}\sin\theta$$

Luego, el parentesis cuadrado lo podemos reescribir:

$$|r-r'| = \begin{cases} r-r' & r>r' \\ r'-r & r<r' \end{cases} \Rightarrow [\%] = \begin{cases} -2\cancel{r^2}r' + 2r'(\cancel{r^2}+r'^2) & r>r' \\ 2r(r^2+\cancel{r'^2}) - \cancel{2r'^2}r & r<r' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = -\frac{\mu_0 K\omega}{3}\hat{y}\sin\theta\left\{\int_0^r \frac{r'^6}{r^2}dr' + \int_r^R r'^3 r\,dr'\right\} = -\frac{\mu_0 K\omega}{3}\hat{y}\sin\theta\left(\frac{r^5}{7} + (R^4-r^4)\frac{r}{4}\right)$$

$\Rightarrow \vec{A} = \frac{-\mu_0 \omega K}{3} \hat{y} \sin\theta \left(\frac{R^4 r}{4} - \frac{3r^5}{28} \right)$ y si volvemos al sistema donde $\omega = \omega\hat{z}$ podemos hacer la identificación $-\hat{y} = \hat{\phi}$

y ahora $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta A_\phi) \hat{r} - \frac{1}{r} \partial_r (r A_\phi) \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \omega K \left\{ \hat{r} \left(\frac{R^4}{6} - \frac{r^4}{14} \right) \cos\theta - \hat{\theta} \left(\frac{R^4}{6} - \frac{3r^4}{14} \right) \sin\theta \right\} \quad \text{para } |\vec{r}| < R$$

Por último como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ la componente radial se conserva en la superficie de la esfera.

$\Rightarrow -\mu_0 \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=R} = \mu_0 \omega K \cos\theta \cdot \frac{2}{21} R^4$ y como $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ solo $B_1 \neq 0$

con $\frac{2\mu_0 B_1}{R^3} = \frac{2\mu_0 \omega K R^4}{21} \Rightarrow B_1 = \frac{\omega K R^7}{21} \Rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{\omega K R^7}{21 r^2} \cos\theta$

$$\Rightarrow \vec{B}(r,\theta) = \frac{\mu_0 \omega K R^7}{21} \left(\frac{2}{r^3} \cos\theta \hat{r} + \frac{1}{r^3} \sin\theta \hat{\theta} \right) \quad \text{para } r > R$$

con lo cual encontramos el campo magnetico en todo el espacio

P3 $\quad \rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta$

Para resolver este problema haremos una expansión multipolar y nos quedaremos con el primer término distinto de 0. Primero un repaso para que les sirva esta pauta como estudio :)

Todo comienza con $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{d^3r'\,\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ donde nos enfocamos en $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} = \frac{1}{r\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\cos\gamma\left(\frac{r'}{r}\right)\right)^{1/2}}$$

γ: Angulo entre los vectores

y ahora usamos $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ para $t\leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r'}{r}\right)^l$ para $r>r'$. Si $r<r'$ debimos sacar a r' de la raíz para obtener lo mismo con los roles de r y r' cambiados. En general escribimos:

$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)$ donde $r_>, r_<$ son el mayor y el menor entre r y r'. Por último usamos el teorema de la adición

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\phi')\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\left[\int Y_{lm}^*(\theta',\phi')\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\rho(r')\,d^3r'\right]Y_{lm}(\theta,\phi)\Big\}\ \text{Expansión Multipolar!!}$$

Ahora solo debemos hacer cada una de las integrales hasta llegar a las distintas de 0 considerando $r > r'$ pues queremos V lejos

$$\ell = m = 0 \Rightarrow Y^*_{\ell m}(\theta', \phi') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad \text{pero} \quad \int \rho(r') d^3r' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} KR\left(\frac{R}{r'^2} - \frac{2}{r'}\right) r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' = 0$$

porque la integral en r' es $\int_0^R (R - 2r') dr' = R^2 - R^2 = 0$

$\ell = 1,\ m = 0 \Rightarrow Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$, entonces la integral en θ' es

$$\int_0^{\pi} \cos\theta' \sin^2\theta' d\theta' = \left.\frac{\sin^3\theta'}{3}\right|_0^{\pi} = 0$$

$\ell = 1,\ m = \pm 1$ como $Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{(2\ell + 1)\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$

$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} = 0 \Rightarrow$ con lo cual también se anula esta integral, lo mismo ocurre para $\ell = 2,\ m = \pm 1, \pm 2$. Sin embargo para $\ell = 2, m = 0$, $Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta' - 1)$

$$\Rightarrow \int Y^*_{\ell m}(\theta', \phi') r'^2 \rho(r') d^3r' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \int_0^{\pi}\int_0^{R} KR r'^2 (R - 2r') \sin^2\theta' (3\cos^2\theta' - 1) dr' d\theta'$$

$$\int_0^R r'^2 (R - 2r') dr' = \frac{R^4}{3} - 2\frac{R^4}{4} = \frac{-R^4}{6}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta' (3\cos^2\theta' - 1) = \left.\frac{7\tan^3(\theta') + \tan(\theta')}{8\tan^4(\theta') + 16\tan^2(\theta') + 8} - \frac{\theta'}{8}\right|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow V(\theta, \phi) \approx \frac{1}{4\varepsilon_0}(3\cos^2\theta - 1)\frac{\pi R^4 K}{48 r^3}$$