RESUMEN AUX 1

EN EL VACÍO | EN LA MATERIA

• Ecs de Maxwell:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

• Ecuaciones constitutivas:

$$\vec{J}=\sigma\vec{E} \qquad \vec{M}=\mu_0\chi_m\vec{H}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

Estas ecuaciones son válidas para medios lineales e isotropos. Hay que tener en cuenta que pueden existir medios con relaciones más complicadas.

• Condiciones de borde: Estas condiciones se deducen directamente de la integración de las ecuaciones de Maxwell en una interfaz.

$$n_{12}\times(E_2-E_1)=0$$

$$(D_2-D_1)\cdot n_{12}=\sigma$$

$$(B_2-B_1)\cdot n_{12}=0$$

$$n_{12}\times(H_2-H_1)=K$$

n_{12}: vector normal que apunta del medio 1 al 2

σ: Densidad de carga superficial libre en la interfaz

K: Densidad de corriente superficial

• Polinomios de Legendre: P_ℓ^m es solución de la siguiente EDO

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}f\right) = 0$$

Propiedades que usaremos:

- $P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell$
- $\int_{-1}^{1} P_k^m P_\ell^m dx = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} \delta_{k\ell}$
- $\int_{-1}^{1} \frac{P_\ell^m P_\ell^n}{1-x^2} dx = \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} \delta_{mn}$

$\Big\}$ ortogonalidad

Algunos polinomios de Legendre:

$P_0^0(x) = 1 \quad P_1^0(x) = x \quad P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_3^0(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2} \quad P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2} \quad P_3^1(x) = -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$

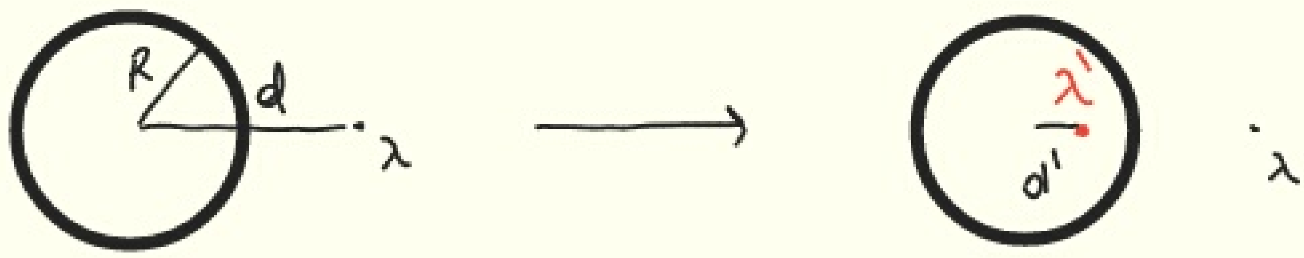
$P_\ell^m(x)$ es un polinomio de grado ℓ y si $|m|>\ell$ $P_\ell^m \equiv 0$. Además se puede expesar la base usual de los polinomios como función de los polinomios de Legendre

$$x = P_1^0(x) \quad x^2 = (P_0^0 + 2P_2^0)/3 \quad x^3 = (3P_1^0 + 2P_3^0)/5$$

Lo cual resulta útil para integrar cosas del estilo $\int_{-1}^{1} x^m P_\ell dx$

Desarrollo Auxiliar 1

P1

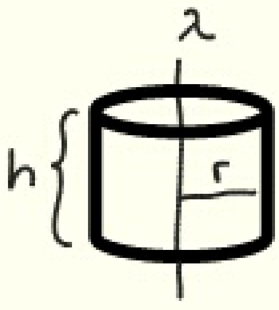


En el método de imagenes se busca plantear una distribución de carga que satisfaga las condiciones de borde del problema. Para ello se escoge una forma para la distribución (suele ser identica a la original) y se determina la posición y carga de esta mediante las condiciones de borde.

Para este problema usaremos un cable con densidad de carga λ' y a una distancia d' del centro. Es importante considerar que esta distribución imagen debe estar ubicada entre el centro y el cable original pues de lo contrario no habra simetría y no se podra resolver el problema.

El campo generado por un cable infinito lo calculamos con la ley de Gauss

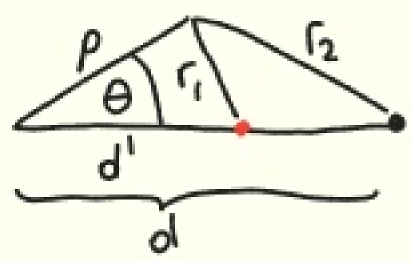
$\vec{E} = E(r)\hat{r}$: Ansatz



$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} \Rightarrow 2\pi r \cancel{h} E(r) = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + C$$

Luego podemos escribir el potencial total como la suma de los 2 cables, reemplazando r por la distancia del cable a un punto cualquiera



por teorema del coseno
$$r_1 = \left(\rho^2 + d'^2 - 2\rho d' \cos\theta\right)^{1/2}$$
$$r_2 = \left(\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow V(\rho,\theta) = \frac{-1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda \ln(r_1) + \lambda' \ln(r_2)\right)$$

Luego nuestras condiciones de borde son $V(\rho=R,\theta) \overset{\text{cte}}{=} V_0$, $V(\rho=\infty,\theta)=0$ y entonces como $r_1 = r_2$ para $\rho \to \infty$ la segunda condición sería:

$$V(\rho=\infty,\theta) = \frac{-\ln(r_1)}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda+\lambda') = 0 \Rightarrow \lambda' = -\lambda$$

$$\Rightarrow V_0 = V(\rho=R,\theta) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}{R^2+d'^2-2Rd'\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \overbrace{e^{\frac{-4\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}}}^{C_0^2}\left(R^2+d'^2-2Rd'\cos\theta\right) = R^2+d^2-2Rd\cos\theta \Rightarrow R^2(C_0^2-1)+C_0^2 d'^2 - d^2 = 2R(C_0^2 d' - d)\cos\theta$$

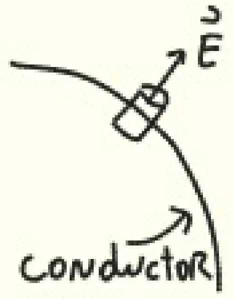
La única forma de resolver esta ecuación para todo θ es que ambos lados de la ecuación sean nulos

$$\Rightarrow C_0^2 d' = d \quad ; \quad R^2(C_0^2-1)+C_0^2 d'^2 - d^2 = 0 \Rightarrow R^2(C_0^2-1) + d^2\left(\frac{1}{C_0^2}-1\right) = 0$$
$$\Rightarrow C_0^2 = \frac{d^2}{R^2} \Rightarrow V_0 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{R}\right) \quad y \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

Con esto ya estamos listos para determinar todo lo demás. El potencial en todo el espacio es:

$$V(\rho,\theta,z) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho^2+d^2-2\rho d\cos\theta}{\rho^2+\frac{R^4}{d^2}-2\rho\frac{R^2}{d}\cos\theta}\right)$$

La carga inducida en la superficie la sacamos de la ley de Gauss



$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R} dS = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dS$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\lambda}{4\pi}\left(\frac{2R-2d\cos\theta}{R^2+d^2-2Rd\cos\theta} - \frac{2\left(R-\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)}{R^2+\frac{R^4}{d^2}-\frac{2R^3}{d}\cos\theta}\right)$$

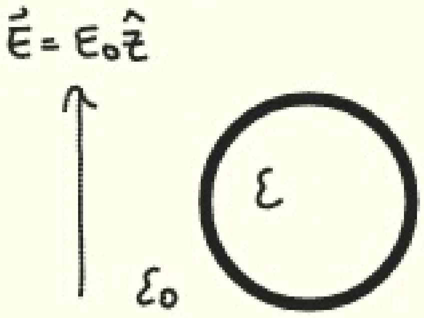
Por último para la fuerza usamos el campo electrico generado por el cable imagen, que es equivalente al producido por el conductor

$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{E}\cdot\lambda dl \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dl} = \lambda\vec{E} \quad \text{con} \quad E = -\nabla V_{imagen}\bigg|_{\substack{\rho=d\\ \theta=0}}$$

$$= \frac{-\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2d-2\frac{R^2}{d}}{d^2+\frac{R^4}{d^2}-2\frac{R^3}{d}}\hat{\rho} + \frac{2R^2\cancelto{0}{\sin\theta}}{d^2+\frac{R^4}{d^2}-2\frac{R^3}{d}}\hat{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dl} = \frac{-\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\cdot\frac{d^2-R^2}{d^2+\frac{R^4}{d^2}-\frac{2R^3}{d}}\hat{\rho}$$

P2



Debido a que no hay carga libre $\nabla\cdot\vec{D}=0$ y como $\varepsilon(\vec{r})=\begin{cases}\varepsilon_0 & r>R\\ \varepsilon & r<R\end{cases}$, sabemos que $\vec{D}$ es una cte por $\vec{E}$ y $\vec{E}=-\nabla\phi \Rightarrow \nabla^2\phi=0$, tanto dentro como fuera de la esfera. Dicha ecuación a derivadas parciales la resolvemos con separación de variables. Partimos proponiendo:

$\phi(r,\theta,\varphi)=R(r)T(\theta)P(\varphi)$ donde, debido a la simetría azimutal del problema podemos tomar $P(\varphi)=1$. Luego reemplazando obtenemos:

$$\nabla^2\phi=0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2R')T+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta T')R=0 \quad /\cdot\frac{r^2}{RT}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\partial_r(r^2R')+\frac{1}{T\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta T')=0$$

Ahora, viene la gracia de separación de variables. Como dividimos la ecuación en un término que solo depende de r y otro que solo depende de θ, ambos términos deben ser iguales a una constante. Para este problema esa cte sera $\ell(\ell+1)$ con $\ell\in\mathbb{N}$ para así llegar a EDOs conocidas.

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\partial_r(r^2R')=\ell(\ell+1) \quad ; \quad \frac{1}{T\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta T')=-\ell(\ell+1)$$

$$\Rightarrow r^2R''+2rR'-\ell(\ell+1)R=0 \quad ; \quad T''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}T'+\ell(\ell+1)T=0$$

La solución para R es r^ℓ o $r^{-\ell-1}$. Para T hacemos el cambio:

$$T(\theta) = F(\cos\theta) \Rightarrow T' = F' \cdot (-\sin\theta) \Rightarrow T'' = -\cos\theta F' + F'' \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow (1-\cos^2\theta) F'' - 2F'\cos\theta + \ell(\ell+1) F = 0 \Rightarrow F = P_\ell \Rightarrow T(\theta) = P_\ell(\cos\theta)$$

Luego, podemos escribir la solución a $\nabla^2\phi = 0$ de forma general

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

Donde sumamos sobre todos los ℓ porque así escribimos la solución en una base que es solución de la ecuación de Laplace. Ahora solo debemos considerar un potencial dentro de la esfera y otro fuera y usar las condiciones de borde para encontrar la solución.

0 para que no diverga

$$\Rightarrow \phi_{out}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}\right) P_\ell(\cos\theta) \; ; \; \phi_{in}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(C_\ell r^\ell + \cancel{D_\ell} r^{-\ell-1}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

La primera condición es $\vec{E}(r=\infty) = -\nabla\phi\Big|_{r=\infty} = E_0\hat{z} \Rightarrow \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$

$$\Rightarrow A_\ell = 0 \text{ si } \ell \neq 1 \text{ y } A_1 = -E_0 \Rightarrow \phi_{out} = -E_0 r\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell P_\ell(\cos\theta)\, r^{-\ell-1}$$

Las otras dos condiciones de borde se deducen de $\nabla\cdot\vec{D} = 0$ y $\nabla\times\vec{E} = 0$ e implican la conservación de la componente radial de $\vec{D}$ y tangencial de $\vec{E}$.

$$\Rightarrow \hat{r}\Big] \; \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\left(-E_0 + B_1\cdot(-2)R^{-3}\right) = C_1 \; (\ell=1) \; ; \; \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(-\ell-1) B_\ell R^{-\ell-2} = C_\ell \cdot \ell R^{\ell-1} \quad (\ell \neq 1)$$

$\hat{\theta}\Big|\quad -E_0R + \dfrac{B_1}{R^2} = C_1R \quad (\ell=1) \quad ; \qquad B_\ell R^{-\ell-1} = C_\ell R^\ell \quad (\ell\neq 1)$

Donde use la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y el hecho de que $\dfrac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta \dfrac{dP_\ell}{d\theta}(\cos\theta) = -(1-\cos^2\theta)^{1/2}\dfrac{dP_\ell}{d\theta}(\cos\theta) = P_\ell^1(\cos\theta)$, donde P_ℓ^K es el polinomio asociado de Legendre, que también satisfacen ser ortogonales para distinto ℓ. Usando las ecuaciones para $\ell\neq 1$:

$$B_\ell = C_\ell R^{2\ell+1} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(-\ell-1)C_\ell = C_\ell\cdot\ell \Rightarrow C_\ell = 0 \Rightarrow B_\ell = 0$$

y para $\ell=1$: $\begin{array}{l}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1 + 2B_1R^{-3} = -E_0 \\ C_1 - B_1R^{-3} = -E_0\end{array} \Rightarrow C_1\left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = 3B_1R^{-3} \Rightarrow \frac{C_1}{3}\,\frac{\varepsilon+2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -E_0$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{-3E_0}{2+\varepsilon_r} \quad ; \quad B_1 = -R^3E_0\frac{1-\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r} \qquad \left(\varepsilon_r \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{-3E_0}{2+\varepsilon_r}\,r\cos\theta & r\leq R \\[2ex] -E_0\left(\dfrac{R^3}{r^2}\,\dfrac{1-\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r} + r\right)\cos\theta & r\geq R \end{cases}$$

Debido a que el potencial decae como $\frac{1}{r^2}$ fuera de la esfera podemos establecer un analogo con el potencial generado por un dipolo $\phi_{dipolo} = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ y si $\vec{p} = p\hat{z} \Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{r} = pr\cos\theta$ y obtenemos que el momento dipolar de la esfera es: $-\dfrac{E_0R^3}{\cancel{r^2}}\,\dfrac{1-\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r}\cancel{\cos\theta} = \dfrac{p\cancel{r}\cancel{\cos\theta}}{4\pi\varepsilon_0\cancel{r^3}} \Rightarrow p = -4\pi\varepsilon_0E_0R^3\,\dfrac{1-\varepsilon_r}{2+\varepsilon_r}$