Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Universidad de Chile
FI4001-1 Mecánica Cuántica

Profesor: Alvaro Nuñez
Auxiliar: Rodrigo Jaeschke

Tarea 1

Fecha de entrega: Jueves 9 de agosto.

P1. Suponga una matriz X de 2 x 2, que se escribe como:

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

Donde a_0 y a_k, con $k = 1, 2, 3$ son escalares y $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\mathbf{x}} + \sigma_y \hat{\mathbf{y}} + \sigma_z \hat{\mathbf{z}}$$

a) ¿Como están relacionados a_0 y a_k $(k = 1, 2, 3)$ con $Tr(X)$ y con $Tr(\sigma_k X)$?

b) Obtenga a_0 y a_k en terminos de los elementos de matriz de X.

P2. Sea $\hat{A}(x)$ una matriz que depende de una variable x. (En este curso llamaremos *operadores* a estos objetos). Definimos su derivada como:

$$\frac{d\hat{A}}{dx} \equiv \hat{A}' = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{A}(x+\epsilon) - \hat{A}(x)}{\epsilon}$$

Si $\hat{A}$ tiene inversa, muestre que:

$$\frac{d\hat{A}^{-1}}{dx} = -\hat{A}^{-1}\hat{A}'\hat{A}^{-1}$$

Finalmente, si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son dos operadores que dependen de x, muestre que:

$$\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dx} = \hat{A}'\hat{B} + \hat{A}\hat{B}'$$

P3. El objetivo de este problema es practicar la notación de Dirac para representar elementos de un espacio vectorial (en mecánica cuántica será usual que estos vectores se llamen *estados*). Usando como base ortonormal a dos estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$. muestre que:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$$

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

Donde $\{A, B\} = AB + BA$ es el annticonmutador y:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$$

$$S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right)$$

P4. Un haz de atomos de spin 1/2 pasa por una serie de aparatos de Stern-Gerlach, como se indica a continuación:

- La primera medición deja pasar atomos con $s_z = \hbar/2$ y descarta atomos con $s_z = -\hbar/2$
- La segunda medición deja pasar atomos con $s_n = \hbar/2$ y descarta atomos con $s_n = -\hbar/2$. Con s_n el autovalor del operador $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$, y $\mathbf{n}$ un vector unitario que forma un ángulo β con el eje z en el plano xz.
- La tercera medición acepta atomos con $s_z = -\hbar/2$ y descarta atomos con $s_z = \hbar/2$

¿Cual es la intensidad del último haz $s_z = -\hbar/2$, cuando el haz $s_z = \hbar/2$ que sobrevive la primera medición está normalizado a la unidad? Como debería orientarse el segundo aparato de medición si queremos maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$.