FI2002-3 Electromagnetismo 2019
Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliares: Guido Escudero - Ariel Tello
Fecha: 9 Agosto 2019

Auxiliar 1: Cálculo de Campo Eléctrico por definición y Ley de Gauss

Objetivos

1. Entender el procedimiento de cálculos de campos eléctricos por definición empleando correctamente y **sin confundir** los valores de $\vec{r}$, $\vec{r'}$, y $d\vec{r'}$. Aplicar correctamente las cotas de las integrales.

2. Dada una configuración de dos cuerpos con distribución de carga continua, comprender que el mejor mecanismo para obtener la fuerza eléctrica entre los cuerpos es primero consiguiendo el campo eléctrico generado por un cuerpo (**victimario**), lo cual permite caracterizar un diferencial de fuerza eléctrica en el segundo cuerpo (**víctima**), posteriormente la fuerza eléctrica total se obtiene integrando dicho diferencial según la distribución de carga del segundo cuerpo.

3. Entender cuando calcular un Campo Eléctrico **Por Definición** o por **Ley de Gauss** y cual es la ventaja de uno por sobre otro.

4. Calcular Campos Eléctricos usando la Ley de Gauss y No equivocarse en el cálculo de la **Carga Encerrada** Q_{enc}
Ojo con los **límites** de las integrales y los **diferenciales**.

Resumen

1. Para la existencia de Fuerza Eléctrica se requiere de por lo menos 2 cuerpos cargados (positiva o negativamente). En caso de haber solo un cuerpo cargado, no existe Fuerza Eléctrica.
Si son solo 2 cargas discretas, la Fuerza Eléctrica se puede calcular como:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{1}$$

El problema aumenta de nivel cuando se desea calcular la Fuerza Eléctrica de sistemas discretos con mas de 2 cuerpos o de distribuciones continuas de carga, esto ya que la resolución del problema se vuelve matemáticamente compleja.
Como mecanismo de ayuda surge el concepto de Campo Eléctrico, el cual equivale a ”como afecta eléctricamente la presencia de **un solo cuerpo** a su entorno”.
Se hace énfasis en que el Campo Eléctrico considera **solo un cuerpo**, no dos como en el caso de la Fuerza Eléctrica.
En caso de que la distribución del primer cuerpo **(victimario)** fuera discreta (Q_1), el Campo Eléctrico generado es:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{2}$$

Asimismo si el segundo cuerpo **(víctima)** es discreto (Q_2) la relación entre Fuerza Eléctrica y Campo Eléctrico es:

$$\vec{F} = Q_2\vec{E} \tag{3}$$

En caso de que alguno de los cuerpos fuera de **(distribución continua)**, las **ecuaciones (3) y (4)** se deben aplicar en **forma diferencial** para posteriormente integrar.
En esta auxiliar no se resolverán problemas de distribuciones discretas ya que son relativamente sencillos, se recomienda hacer el problema 1.6 del libro de Rodrigo Chi para practicar.

2. Existen 2 métodos para el cálculo de Campos Eléctricos en distribuciones continuas de carga, el método por definición y el método de Gauss. En general, dependiendo del tipo de problema, conviene más la resolución con un tipo de método por sobre otro. Para adquirir mayor conocimiento de cual usar se recomienda realizar ejercicios. No obstante a ello el método de Gauss ofrece la ventaja de ser un procedimiento de cálculo más directo y corto, pero por contraparte solo es recomendable cuando la geometría del problema acompaña. En caso de que no existan simetrías, el problema debe ser resuelto por definición.

3. Campo Eléctrico por definición para distribuciones continuas de carga.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\lambda dl' \tag{4}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\sigma ds' \tag{5}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\rho dv' \tag{6}$$

- Identifique un origen de coordenadas que haga lo más simple posible la definición de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r'}$.
- $\vec{r}$ es el vector posición que une el lugar donde usted desea conocer el campo eléctrico y el origen de coordenadas...En algunos problemas resulta conveniente situar el origen de coordenadas en el mismo punto donde se desea conocer el campo eléctrico ya que de dicha manera se tiene $\vec{r} = 0$. En los problemas de ésta auxiliar no se utilizará aquella convención ya que complicaría la definición matemática de $\vec{r'}$.
  (por simplificar un término, el otro nos terminaría saliendo 10 veces más difícil).
- $\vec{r'}$ es el vector que une (parametriza) la distribución de carga con el origen de coordenadas...ojo la parametrización tiene que servir para toda la distribución, estaría mala una parametrización que sirva para un trozo de carga y para otro no..tiene que ser para toda la distribución de carga.
- dl',ds', dv' son diferenciales asociados a las distribuciones de carga.
- Las cotas de la o las integrales están determinadas por la parametrización de $\vec{r'}$.

¿Cuál de las 3 ecuaciones de campo eléctrico usar? Depende de la cantidad de dimensiones que tenga la distribucion de carga...o más astutamente, dependiendo del dato otorgado en el enunciado λ, ρ, σ.
Dentro de los problemas clásicos de Campo Eléctrico por definición se recomienda hacer los ejercicios 6 y 8 de la primera unidad del Benguria (página 8 y 12 respectivamente) para complementar lo que se verá en la aux de hoy.

4. Integrales de utilidad para cálculo de campos eléctricos por definición:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx = log(\sqrt{x^2+a^2}+x) \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}dx = \sqrt{x^2+a^2} \qquad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

5. Ley de Gauss establece que $\oiint_s \vec{E}\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$
   Con **ds** el diferencial de área de la superficie Gaussiana, ojo como es un diferencial de área... es 2D razón por la cual $\vec{ds}$ es igual a algo con dos diferenciales (no tres).
   Dependiendo de la cantidad de dimensiones de la distribución de carga, Q_{enc} está dado por:
   - 1D $\int_l \lambda dl$
   - 2D $\int\int_a \sigma da$
   - 3D $\int\int\int_v \rho dv$

   No siempre λ, σ y ρ son constantes que salen de la integral.

6. Superficie Gaussiana: Superficie cerrada totalmente imaginaria que sirve para calcular el campo eléctrico de una distribución a través de la Ley de Gauss.
   Diferenciales de área más usados según el tipo de superficie Gaussiana
   - Superficie Gaussiana Esférica para un radio fijo: $\vec{ds} = r^2 sen(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$
     Con θ ángulo de colatitud (0 a 180°) y ϕ el azimutal (0 a 360°)
   - Superficie Gaussiana cilindriva: Se divide en un manto y dos tapas.
     $\vec{ds}_{manto} = rd\theta dz\,\hat{r}$
     $\vec{ds}_{tapa} = \pm rdrd\theta\,\hat{z}$

P1. Encuentre el Campo Eléctrico $\vec{E}$ generado por un anillo de radio R y densidad de carga lineal λ.

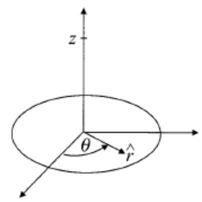

Figura 1: Anillo

P2. Determine el Campo Eléctrico $\vec{E}$ generado por un disco de radio R y densidad de carga superficial σ.

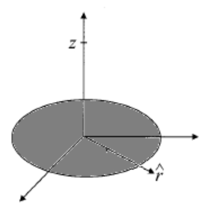

Figura 2: Disco

P3. Determine la fuerza electrostática entre el disco de radio R del problema anterior y una varilla de largo L colocada en el eje del disco a una distancia **b** de él, con densidad de carga lineal λ.

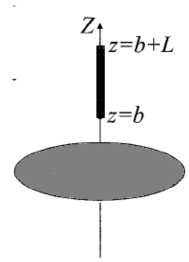

Figura 3: Disco y Varilla

P4. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio generado por una esfera de radio B y densidad de carga constante ρ

P5. Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio generado por una esfera de radio B y densidad de carga:

- $\rho = \frac{5Qr(B-r)}{\pi B^5}$ $\quad r \leq B$
- $\rho = 0$ $\quad r > B$

P6. Considere un cable coaxial infinito y rectilineo, el cual está compuesto por un cilindro central y diferentes casquetes cilindricos de radios R_1, R_2, R_3 y R_4 en donde cada material tiene una densidad ρ_1, ρ_2, ρ_3 y ρ_4 respectivamente. Encuentre el Campo Eléctrico en todo el espacio considerando $\rho_3 = 0$

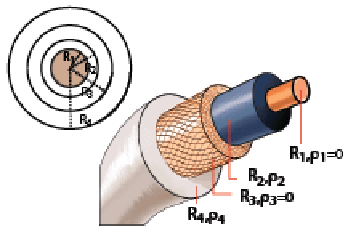

Figura 4: Cable coaxial infinito

P7. Calcule el campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga superficial σ usando la Ley de Gauss.