

①

• El origen lo ponemos en el centro del disco

• $\vec{r} = z \hat{z}$

(Se nos complica mucho el cálculo en cuando conoces el campo eléctrico en otra posición que no sea el eje de simetría)

• $\vec{r} = R \hat{r}$

• $d\vec{l} = R d\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - R \hat{r}$

$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2} = (z^2 + R^2)^{1/2}$

$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(z \hat{z} - R \hat{r}) R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{z} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{r}$

$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) \hat{z} - 0$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi \hat{z}$

$\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$

$\int_0^{2\pi} \hat{r} d\theta = 0$

(2)

• ORIGEN: Centro del disco

• $\vec{r} = z \hat{z}$

• $\vec{r}' = r \hat{r}$

• $ds' = r dr d\theta$ con $r \in (0, R)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}') = (z \hat{z} - r \hat{r})$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2} = (z^2 + r^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (z^2 + r^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma ds' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(z \hat{z} - r \hat{r})}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sigma r dr d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma z r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right) \hat{z} + 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right) \hat{z} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right) \Big|_0^R \cdot 2\pi \hat{z} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \hat{z}$$

$$\text{OJO } \sqrt{z^2} = |z| = \begin{cases} z & \text{si } z > 0; \text{ arriba del disco} \\ -z & \text{si } z < 0; \text{ abajo del disco} \end{cases}$$

Si Hacemos tender $R \rightarrow \infty$ se generaría un plano infinito

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{|z|} \right] = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 |z|} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

P3

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{|z|} \right]$$

en este caso $z > 0 \Rightarrow |z| = z$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{-z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 1 \right] \hat{z}$$

En Cargas puntuales

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q$$

$$d\vec{F} = \vec{E} \cdot dQ$$

$$F = \int_Q \vec{E} \cdot dQ$$

$\swarrow$ $\searrow$
 VECTORIZADO Eclíptica

$$\text{Con } dQ = \lambda dz$$

$$z \in [B, B+L]$$

$$\vec{F} = \int_B^{B+L} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{-z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 1 \right] \lambda dz \hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda \sigma}{2\epsilon_0} \left[L + \sqrt{R^2 + B^2} - \sqrt{(B+L)^2 + R^2} \right] \hat{z}$$

[P4]

Campo eléctrico en todo el espacio generado por una esfera de radio R y densidad de carga ρ

Integral de flujo = Cuántos líneas de campo cruzan una determinada sección de área

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad d\vec{s} = \hat{n} dA$$

POR SIMETRÍA SUPONEMOS QUE $\vec{E} = E(r) \hat{r}$
El diferencial de área de una superficie gaussiana esférica es

$$d\vec{s} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (E(r) \hat{r}) (r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}) = \left(E(r) \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\phi \right) \hat{r}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Para ver el lado derecho "Qenc" hay que distinguir en que región nos encontramos

Para $r < R$

$$Q_{enc} = \iiint \rho dV$$

$$\text{Con } dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$r: [0: R]$$

$$\theta: [0: \pi]$$

$$\phi: [0: 2\pi]$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R q \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q_{enc} = q \left(\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \cdot \left(\int_0^R r^2 \, dr \right)$$

$$Q_{enc} = q \cdot 4\pi \cdot \frac{R^3}{3}$$

por Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q \cdot \frac{4\pi R^3}{3}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{qR}{3\epsilon_0} \quad \text{para } r < R$$

Como $r \geq R$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R q \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$Q_{enc} = q \frac{4\pi R^3}{3}$$

por Ley de Gauss

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q \cdot \frac{4\pi R^3}{3}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{qR^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad \text{para } r \geq R$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{qR}{3\epsilon_0} \hat{r} & ; r < R \\ \frac{qR^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & ; r \geq R \end{cases}$$

[P5]

POR LCO DE GAUSS $\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{m} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

POR SIMETRIA $\vec{E} = E(r) \hat{r}$

$\Rightarrow ds = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$; $\hat{m} = \hat{r}$; Com $\theta \in (0, \pi)$; $\phi \in [0, 2\pi)$

$\Rightarrow \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r) \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r} = 4\pi r^2 E(r)$

La Q_{enc} depende de r

• Para $r < B$

$Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{5Qr(B-r)}{\pi B^5} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$

$Q_{enc} = (4\pi) \cdot \int_0^r \frac{5Qr(B-r)}{\pi B^5} r^2 dr = (4\pi) \cdot \left(\frac{5Qr^4}{4\pi B^4} - \frac{Qr^5}{\pi B^5} \right) = \frac{5Qr^4}{B^4} - \frac{4Qr^5}{B^5}$

$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{\frac{5Qr^4}{B^4} - \frac{4Qr^5}{B^5}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\frac{5Qr^4}{B^4} - \frac{4Qr^5}{B^5}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{5QB^2r^2 - 4Qr^3}{4\pi \epsilon_0 B^5}$

• Para $r \geq B$

$Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^B \rho r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^B \frac{5Qr(B-r)}{\pi B^5} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$

$Q_{enc} = (4\pi) \cdot \int_0^B \frac{5Qr(B-r)}{\pi B^5} r^2 dr = (4\pi) \cdot \left(\frac{5Q}{4\pi} - \frac{Q}{\pi} \right) = (4\pi) \cdot \frac{Q}{4\pi} = Q$

$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

$\vec{E} = \begin{cases} \frac{5QB^2r^2 - 4Qr^3}{4\pi \epsilon_0 B^5} \hat{r} & ; r < B \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} & ; r \geq B \end{cases}$

[PL]

Por simetría $\vec{E} = E(r) \hat{r}$

(Ejo ahora es el $\hat{r}$ en cilíndricos, que es muy diferente a $\hat{r}$ en esféricas)

Por ley de GAUSS $\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$ Usamos una superficie GAUSSIANA cilíndrica

Primero calculando la integral de flujo

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \iint_{\text{TAPA INFERIOR}} E(r) \hat{r} \cdot n d\phi d\vec{r} (-\hat{z}) + \iint_{\text{TAPA SUPERIOR}} E(r) \hat{r} \cdot n d\phi d\vec{r} \hat{z} + \iint_{\text{MANTO}} E(r) \hat{r} \cdot n d\phi dz \hat{r}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) r d\phi dz = E(r) \cdot r \cdot 2\pi \cdot L$$

Por GAUSS $E(r) \cdot r \cdot 2\pi L = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_{enc}}{2\pi \epsilon_0 r L}$ (1)

Para identificar la Q_{enc} depende del radio

• Para $r < R_1$

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r q_1 r' dr' d\phi dz = q_1 \pi r^2 L \Rightarrow E(r) = q_1 \pi r^2 L \cdot \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r L} = \frac{q_1 r}{2\epsilon_0}$$

• Para $R_1 \leq r < R_2$

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} q_1 r' dr' d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^r q_2 r' dr' d\phi dz = q_1 L \pi R_1^2 + q_2 L \pi (r^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q_1 R_1^2 + q_2 (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$$

• Para $R_2 \leq r < R_3$

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} q_1 r' dr' d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} q_2 r' dr' d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^r q_3 r' dr' d\phi dz = q_1 L \pi R_1^2 + q_2 L \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q_1 R_1^2 + q_2 (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$$

• Case $R_3 < n < R_4$

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \rho_1 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho_2 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \rho_3 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_3}^n \rho_4 r dr d\phi dz$$

$$Q_{enc} = \rho_1 L \pi R_1^2 + \rho_2 L \pi (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 L \pi (n^2 - R_3^2)$$

$$\Rightarrow E(n) = \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 (n^2 - R_3^2)}{2 \epsilon_0 n}$$

• Case $n > R_4$

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \rho_1 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho_2 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \rho_3 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_3}^{R_4} \rho_4 r dr d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_4}^n \rho_4 r dr d\phi dz$$

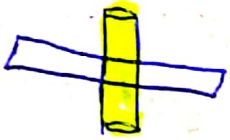
$$Q_{enc} = \rho_1 L \pi R_1^2 + \rho_2 L \pi (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 L \pi (R_4^2 - R_3^2)$$

$$\Rightarrow E(n) = \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 (R_4^2 - R_3^2)}{2 \epsilon_0 n}$$

$$\vec{E}(n) = \begin{cases} \frac{\rho_1 n}{2 \epsilon_0} \hat{n} & ; \text{Case } n < R_1 \\ \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (n^2 - R_1^2)}{2 \epsilon_0 n} \hat{n} & ; \text{Case } R_1 \leq n < R_2 \\ \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R_2^2 - R_1^2)}{2 \epsilon_0 n} \hat{n} & ; \text{Case } R_2 \leq n < R_3 \\ \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 (n^2 - R_3^2)}{2 \epsilon_0 n} \hat{n} & ; \text{Case } R_3 \leq n < R_4 \\ \frac{\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R_2^2 - R_1^2) + \rho_4 (R_4^2 - R_3^2)}{2 \epsilon_0 n} \hat{n} & ; \text{Case } R_4 \leq n \end{cases}$$

[P7]

$\vec{E} = E(z) \hat{z}$ si el punto de análisis está arriba del plano infinito.
 $\vec{E} = E(z) (-\hat{z})$ si el punto de análisis está **abajo** del plano infinito.
 USAMOS una superficie gaussiana cilíndrica



Calculando la integral de flujo

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \underbrace{\iint E(z) (-\hat{z}) \cdot n d\theta dz (-\hat{z})}_{\text{TAPA INFERIOR}} + \underbrace{\iint E(z) \hat{z} \cdot n d\theta dz \hat{z}}_{\text{TAPA SUPERIOR}} + \underbrace{\iint E(z) \cdot \hat{z} \cdot n d\theta dz}_{\text{Manto}} \hat{n}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \int_0^{2\pi} \int_0^R E(z) n d\theta dz + \int_0^{2\pi} \int_0^R E(z) n d\theta dz = 2 E(z) \pi R^2$$

Ahora se procede a calcular la carga encerrada POR la superficie GAUSSIANA

OSO AHORA estoy ATRAPANDO la carga distribuida en el plano (Z=0),
 es decir, uso $Q_{enc} = \iint \sigma dA$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma n d\theta dz = \sigma \pi R^2$$

$$\Rightarrow 2 E(z) \pi R^2 = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \hat{n} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{Para } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{z}) & \text{Para } z < 0 \end{cases}$$