Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Auxiliar 13 de Dic

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

1 Problema 1

Tenemos dos partículas de masa m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente. Desmuestre que la energía cinética del sistema está dada por

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\nu^2 \ , \tag{1}$$

con $M = m_1 + m_2$, μ la masa reducida, V_{cm} la velocidad del centro de masa, ν la velocidad relativa de una partícula con respecto a la otra.

Desarrollo Vamos a resolver el problema en una dimensión, sin embargo, puede ser resuelto en dos y tres dimensiones también (se recomienda hacerlo para soltar la mano). Primero desarrollemos un poco la expresión a la que queremos llegar, para eso expandamos la velocidad del centro de masa ($\vec{V}_{cm} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/M$).

$$K = \frac{M}{2}\frac{1}{M^2}(m_1v_1 + m_2v_2)^2 + \frac{1}{2}\mu\nu^2 \tag{2}$$

$$\frac{M}{2}\frac{1}{m^2}(m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2) + \frac{1}{2}\mu\nu^2 \ . \tag{3}$$

Ahora que tenemos la expresión a la que queremos llegar ligeramente desarrollada, intentemos llegar a ella. Para comenzar, sabemos que la energía cinética de un sistema de dos partículas, está dado por

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \ , \tag{4}$$

ahora vamos a expandir un uno de la siguiente manera $1 = (m_1 + m_2)/(m_1 + m_2)$, y la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2M}\left(m_1^2v_1^2 + m_1m_2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + m_1m_2v_2^2\right) \ , \end{aligned} \tag{5}$$

si comparamos los términos que tenemos en la ecuación anterior con los términos a los que queremos llegar en la ecuación (3), vemos que nos falta un $2m_1m_2v_1v_2$, entonces lo haremos aparecer como un cero en la ecuación anterior. De esta forma, la ecuación anterior queda

$$K = \frac{1}{2M}\left(m_1^2v_1^2 + m_1m_2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + m_1m_2v_2^2\right) + \frac{1}{2M}\left(2m_1m_2v_1v_2 - 2m_1m_2v_1v_2\right) \ ,$$

y reagrupando los términos

$$K = \frac{1}{2M}\left(m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\right) + \frac{1}{2M}\left(m_1m_2v_1^2 + m_1m_2v_2^2 - 2m_1m_2v_1v_2\right) \ , \tag{6}$$

vemos que el paréntesis de la izquierda es exactamente al que queríamos llegar en la ecuación (3), por lo tanto podemos reescribirlo como la velocidad del centro de masa. Por otra parte, vemos que el paréntesis

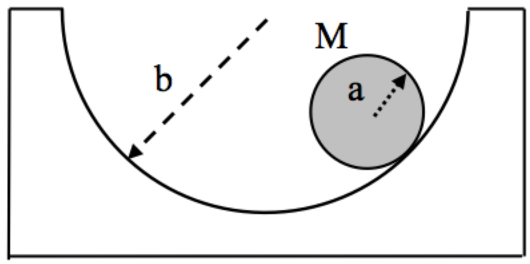

Figure 1: Hay un disco de radio a y masa M sobre una superficie cilíndrica de radio b.

de la derecha tiene un factor común $m_1 m_2$ que podemos factorizar. Al aplicar los cambios anteriormente descritos, obtenemos de la ecuación anterior que

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{m_1 m_2}{2M}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2) \ , \tag{7}$$

vemos que nos ha aparecido la masa reducida, entonces

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2) \ . \tag{8}$$

La velocidad relativa se puede escribir como $\nu = |v_1 - v_2|$, y el cuadrado de la velocidad relativa es $\nu^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2$. Que es exactamente lo que tenemos en la ecuación anterior, y por lo tanto la expresión anterior es

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\nu^2 \ . \tag{9}$$

2 Problema 2

Un disco de radio a y masa M rueda sin resbalar sobre una superficie cilíndrica de eje horizontal y radio b. Tal y como se muestra en la Figura 1

1. Escriba las ecuaciones de movimiento para el disco.
2. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable.

Desarrollo

1. Para comenzar vemos que el disco se mueve en una superficie cilíndrica, por lo tanto, el centro de esa superficie (a partir de donde se considera el radio b) funciona de cierta manera como un pivote para el disco. Con ésto quiero decir que el problema lo podemos trabajar con torque, pensando que el brazo de palanca es la distancia entre el centro de la superficie cilíndrica y el centro del disco. Hay dos fuerzas que vamos a considerar para el torque, la primera de ellas es la gravedad y la segunda es el roce que hace el piso sobre el disco. Vamos a llamar F_c a la fuerza de roce que hace el piso sobre el disco, y de esta manera el torque es

$$\tau = -(b-a)Mg\sin(\theta) + bF_c \ . \tag{10}$$

Con θ el ángulo como se muestra en la Figura 2. Por otra parte, sabemos que el torque es el momento de inercia multiplicado por la aceleración angular, de esta forma, obtenemos

$$I\ddot{\theta} = -(b-a)Mg\sin(\theta) + bF_c \ , \tag{11}$$

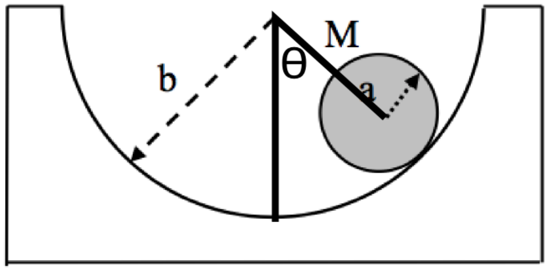

Figure 2: En la imagen se muestra la posición del ángulo θ.

ahora debemos encontrar el momento de inercia que es el momento de inercia de un disco y luego desplazarlo usando Steiner, esto es

$$I = I_{disk} + M(b-a)^2 \ , \tag{12}$$

además sabemos que el momento de inercia de un disco es $I_{disk} = Ma^2/2$ (con a el radio del disco). Y por lo tanto, al reemplazar el momento de inercia en la ecuación de movimiento

$$\left(\frac{1}{2}Ma^2 + M(b-a)^2\right)\ddot{\theta} = -(b-a)Mg\sin(\theta) + bF_c \ . \tag{13}$$

Para encontrar F_c vamos a ver el torque que hace con respecto al centro del disco. El disco está girando sobre si mismo, por lo tanto si definomos ϕ al ángulo con el que gira la rueda (notar que $-a\phi = b\theta$), vemos que

$$I\ddot{\phi} = aF_c \ , \tag{14}$$

usando que $-a\phi = b\theta$ y además $I = Ma^2/2$

$$-\frac{1}{2}Ma^2\frac{b}{a}\ddot{\theta} = aF_c \ , \tag{15}$$

que es

$$-\frac{1}{2}Mab\ddot{\theta} = F_c \ , \tag{16}$$

y reemplazamos en la ecuación de movimiento

$$\left(\frac{1}{2}Ma^2 + M(b-a)^2\right)\ddot{\theta} = -(b-a)Mg\sin(\theta) - \frac{1}{2}\frac{Mab^2}{a}\ddot{\theta} \ , \tag{17}$$

que es

$$\left(\frac{1}{2}Ma^2 + M(b-a)^2 + \frac{1}{2}Mb^2\right)\ddot{\theta} = -(b-a)Mg\sin(\theta) \ , \tag{18}$$

y con un poco de algebra obtenemos

$$\ddot{\theta} = -\frac{(b-a)g}{\frac{1}{2}(a^2+b^2) + (b-a)^2}\sin(\theta) \ . \tag{19}$$

2. Tenemos dos opciones para encontrar el periodo de pequeñas oscilaciones, la primera es encontrar la energía potencial, derivarla dos veces y evaluarla en el punto de equilibrio, dividir esto por la masa y

el radio cuadrado, y finalmente calcular la raiz [1] . Sin embargo, es más sencillo usar una expansión en Taylor sobre la ecuación de movimiento. Dado que nuestra variable es θ, debemos hacer una expansión en Taylor de la parte funcional de la ecuación (13) (con esto quiero decir que debemos expandir en Taylor la parte que tiene una función que depende de θ, que es $\sin(\theta)$). Sabemos que la expansión en serie de Taylor del seno es $\sin(\theta) = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$, con $\mathcal{O}(\theta^3)$ términos de tercer orden en adelante que consideramos despreciables, dado que θ es muy chico y por lo tanto los términos de tercer orden en adelante son muy muy chicos y por lo tanto despreciables. De esta forma, la ecuación (13) queda de la siguiente manera

$$\ddot{\theta} = -\frac{(b-a)g}{\frac{a^2+b^2}{2} + (b-a)^2}\theta \ , \tag{20}$$

y vemos que tiene la forma de un osciolador armónico, por lo tanto, es evidente que la frecuencia de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{(b-a)g}{\frac{a^2+b^2}{2} + (b-a)^2}} \ . \tag{21}$$

[1] La expresión que he visto escrita en los apuntos del profesor es $\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{M}}$. Sin embargo, esto es cuando estamos derivando con respecto a una unidad de distancia, en el caso nuestro, tenemos que derivar con respecto al ángulo y para que haya consistencia de unidades, debemos dividir también por una unidad de distancia, por lo tanto la expresión a usar en este problema es $\omega = \sqrt{\frac{U''(\theta_0)}{r^2 M}}$