Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

~~Auxiliar 19~~

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

P1 El anillo de masa m puede deslizarse sin roce a lo largo del aro de radio R que rota con velocidad angular constante ω_0 en torno de un eje vertical como se indica en la figura.

(a) Determine la ecuación de movimiento del anillo, relativo al aro, expresando su posición en función del ángulo ϕ. El anillo se libera desde la posición donde $\phi = \pi/2$.

(b) Suponga ahora que el anillo se encuentra en reposo en el punto más bajo del aro ($\phi = 0$). Escriba de nuevo la ecuación de movimiento cuando se da un pequeño impulso al anillo (ϕ es pequeño). Bajo que condiciones el anillo oscilará armónicamente? Con qué periodo?

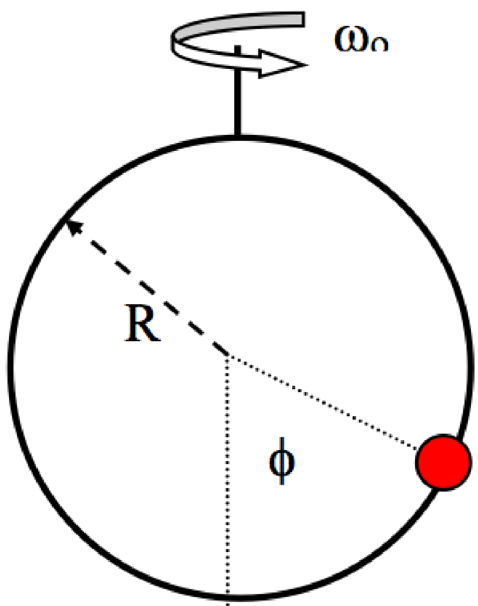

Figure 1: Una masa m está en un anillo de radio R. El anillo gira con velocidad angular constante ω_0.

Desarrollo:

A Para comenzar, escribamos las fuerzas sobre el anillo

$$\vec{F} = -mg\hat{y} + \vec{N} \ , \tag{1}$$

con $\vec{N}$ la normal del aro sobre el anillo.

Sabemos que la fuerza se puede escribir de la siguiente manera

$$\vec{F} = m\vec{a} \ . \tag{2}$$

Dado que queremos la ecuación de movimiento del anillo relativo al aro, entonces debemos cambiarnos a un sistema de referencia solidario al movimiento del aro. Antes de cambiarnos de sistema de referencia, vamos a definir nuestro sistema de referencia inercial S, con origen en el centro del aro, con el eje $\hat{x}$ (o $\hat{i}$) horizontalmente, el eje $\hat{y}$ (o $\hat{j}$) vertical y el eje $\hat{z}$ (o $\hat{k}$)[1] saliendo de la hoja hacia el lector. Ahora vamos a definir el sistema no inercial S' que es solidario con el aro, esto es, que está girando con frecuencia angular ω_0.

Sabemos que la relación entre la aceleración entre un sistema inercial y uno no inercial está dada por (esto está en el apunte del profesor[2])

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a'} + \dot{\vec{\omega_0}} \times \vec{r'} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v'} \ , \tag{3}$$

con $\vec{a}_0$ el vector aceleración del sistema no inercial S', con respecto al sistema inercial S; $\vec{a'}$ el vector aceleración del anillo (en este caso particular es un anillo, pero generalmente es la segunda derivada temporal del vector posición que deseamos encontrar) con respecto al origen en el sistema S'; ω_0 la rotación del sistema S' con respecto al sistema S; $\vec{r'}$ el vector posición del anillo (en este caso particular es un anillo, pero generalmente es el vector posición que deseamos encontrar) con respecto al origen del sistema S'; $\vec{v'}$ la velocidad del anillo (en este caso particular es un anillo, pero generalmente es la primera derivada temporal del vector posición que deseamos encontrar) en el sistema S'. Por lo tanto, vamos a evaluar, sabemos que el sistema S' gira con frecuencia constante y por lo tanto $\dot{\omega}_0 = 0$. Además en ambos sistemas (tanto S como S') el origen está en el mismo lugar, por lo tanto, el sistema S' no está siendo acelerado, de esta forma, $\vec{a}_0 = 0$. Por lo tanto, al evaluar lo anteriormente mencionado en la ecuación (3), tenemos que:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v'} \ . \tag{4}$$

Hagamos un recuento de lo que tenemos y de lo que queremos para saber como proseguir. Lo que queremos es una ecuación de movimiento en el sistema primado, para ello tenemos que escribir correctamente la aceleración en el sistema primado. Por otra parte, lo que tenemos es una ecuación que relaciona mi aceleración en mi sistema primado con mi aceleración en el sistema inercial, todo esto en la ecuación (4). Además, tenemos una ecuación que relaciona la aceleración en el sistema inercial con la fuerza en la ecuación (2), y además tenemos la fuerza en la ecuación (1). Entonces, lo que nos falta es encontrar los términos desconocidos de la ecuación (4) y estaríamos bastante cerca de terminar. A saber, $\vec{\omega}_0 = \omega_0\hat{y}$, además $\vec{r'} = R\sin(\phi)\hat{x} - R\cos(\phi)\hat{y}$. Si derivamos la posición

$$\vec{v'} = R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{x} + R\sin(\phi)\dot{\phi}\hat{y} \ , \tag{5}$$

y de esta forma, podemos hacer los productor cruz sin problema

$$\begin{aligned} \vec{\omega_0} \times \vec{v'} &= (\omega_0\hat{y}) \times (R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{x} + R\sin(\phi)\dot{\phi}\hat{y}) \\ &= -\omega_0 R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{z} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

[1] A partir de ahora se usará la notación $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ por ninguna razón en particular. Usted puede hacer exactamente lo mismo usando notación $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.

[2] Esto lo copié textualmente desde el apunte del profesor, sin embargo, el profesor me recomendó que lo escribiera de la siguiente manera $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a'} - \vec{r'} \times \dot{\vec{\omega_0}} - \vec{\omega}_0 \times (\vec{r'} \times \vec{\omega}_0) - 2\vec{v'} \times \omega_0$. Sin embargo, ambas formas son iguales y equivalentes.

Además

$$\vec{\omega_0} \times (\vec{\omega_0} \times \vec{r'}) = (\omega_0 \hat{y}) \times ((\omega_0 \hat{y}) \times (R\sin(\phi)\hat{x} - R\cos(\phi)\hat{y})) \tag{7}$$
$$= (\omega_0 \hat{y}) \times (-\omega_0 R \sin(\phi)\hat{z}) \tag{8}$$
$$= -\omega_0^2 R \sin(\phi)\hat{x} \; . \tag{9}$$

Y al reemplazar estos resultados en la ecuación (4)

$$\vec{a} = \vec{a'} - \omega_0^2 R \sin(\phi)\hat{x} - 2\omega_0 R \cos(\phi)\dot{\phi}\hat{z} \; . \tag{10}$$

Ahora vamos a reemplazar la aceleración $\vec{a}$ usando la ecuación (2)

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a'} - \omega_0^2 R \sin(\phi)\hat{x} - 2\omega_0 R \cos(\phi)\dot{\phi}\hat{z} \; , \tag{11}$$

y reemplazamos la fuerza con la ecuación (1)

$$\frac{-mg\hat{y} + \vec{N}}{m} = \vec{a'} - \omega_0^2 R \sin(\phi)\hat{x} - 2\omega_0 R \cos(\phi)\dot{\phi}\hat{z} \; . \tag{12}$$

Ahora vamos a cambiar las coordenadas a un sistema cilíndrico. Dada la manera en la que está dispuesto el ángulo ϕ, podemos escribir los vectores unitarios de la siguiente manera

$$\hat{r} = \sin(\phi)\hat{x} - \cos(\phi)\hat{y} \; , \tag{13}$$
$$\hat{\phi} = \cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y} \; . \tag{14}$$

Por mi cuenta he comprobado que $\hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0$, y que $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}$, además que $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, recomiendo que usted lo demuestre también como ejercitación. Esto se puede escribir matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \; , \tag{15}$$

por lo tanto al multiplicar esto por la matriz inversa, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) & \sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \; , \tag{16}$$

y de esto vemos que

$$\hat{x} = \sin(\phi)\hat{r} + \cos(\phi)\hat{\phi} \tag{17}$$
$$\hat{y} = -\cos(\phi)\hat{r} + \sin(\phi)\hat{\phi} \tag{18}$$

Podemos obtener exactamente el mismo resultado si despejamos los vectores unitarios $\hat{x}$ e $\hat{y}$ de las ecuaciones (13) y (14). Sin embargo este método es más simple de escribir desde mi punto de vista. Por lo tanto, la ecuación (12) se puede reescribir de la siguiente manera

$$-g(-\cos(\phi)\hat{r} + \sin(\phi)\hat{\phi}) + \frac{\vec{N}}{m} = \vec{a'} - \omega_0^2 R \sin(\phi)(\sin(\phi)\hat{r} + \cos(\phi)\hat{\phi}) - 2\omega_0 R \cos(\phi)\dot{\phi}\hat{z} \; . \tag{19}$$

Dado que el anillo se mueve sobre el aro, entonces no puede tener aceleración en $\hat{z}$, por lo tanto, todas los términos de la ecuación que tienen componente en $\hat{z}$ se anulan con la normal. Además nos enfocaremos en los términos $\hat{\phi}$ porque el anillo se mueve en ϕ

$$-g\sin(\phi) = a'_\phi - \omega_0^2 R \sin(\phi)\cos(\phi)\ , \tag{20}$$

y esto lo podemos reordenar de la siguiente manera

$$a'_\phi = -g\sin(\phi) + \omega_0^2 R \sin(\phi)\cos(\phi)\ . \tag{21}$$

Reemplazamos ahora con la componente angular de la aceleración en coordenadas polares, que es $a'_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}$, pero dado que $\dot{r} = 0$, entonces $a'_\phi = R\ddot{\phi}$. De esta forma

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\sin(\phi) + \omega^2 \sin(\phi)\cos(\phi)\ . \tag{22}$$

Que es la ecuación de movimiento del anillo, relativo al aro, expresando su posición en función del ángulo ϕ.

B Si el anillo se encuentra en su punto más bajo entonces podemos hacer una expansión en serie de McLaurin de la ecuación (22), de la siguiente manera

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\left(\phi - \frac{\phi^3}{6}\right) + \omega_0^2\left(\phi - \frac{\phi^3}{6}\right)\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \tag{23}$$

$$\approx -(\frac{g}{R} - \omega_0^2)\phi + \mathcal{O}(\phi^3)\ , \tag{24}$$

despreciando los términos de tercer orden, tenemos que

$$\ddot{\phi} \approx -\left(\frac{g}{R} - \omega_0^2\right)\phi\ , \tag{25}$$

vemos que si $g/R > \omega_0^2$, entonces tenemos la ecuación de un oscilador armónico (recordemos que la ecuación de un oscilador armónico tiene la forma $\ddot{x} = -\omega^2 x$, con $\omega > 0$) y efectivamente el anillo oscilará armónicamente. En el caso contrario, tenemos que el punto $\phi = 0$ es un punto de equilibrio inestable y cualquier perturbación lo sacaría de su posición de equilibrio (esto lo podemos ver dado que en el caso de que $g/R < \omega_0^2$ tenemos que la ecuación diferencial tiene como solución exponenciales que divergen). Para $g/r > \omega_0^2$, tenemos que la frecuencia de oscilación es $\omega = \sqrt{g/R - \omega_0^2}$, por lo que el periodo es $T = 2\pi/\sqrt{g/R - \omega_0^2}$.