Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta P2 c-d, Auxiliar 14

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

P2 Una partícula de masa m está sometida a una fuerza de atracción definida como:

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r}\hat{r} \ . \tag{1}$$

(a) Encuentre una expresión para el potencial efectivo asociado a esa fuerza. Grafíquelo.
(b) Discuta los posibles movimientos de la partícula.
(c) Encuentre el radio y la rapidez correspondiente a la órbita circular.
(d) Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones radiales en torno a la órbita circular.

Desarrollo c) Para tener una órbita circular se debe cumplir la siguiente relación entre la fuerza y la velocidad v en un radio particular r, que es

$$\vec{F}(r) = -\frac{mv^2}{r}\hat{r} \ . \tag{2}$$

Dicho de otra forma, si se cumple la relación anterior entre la fuerza, la velocidad y el radio, entonces tenemos un movimiento de órbita circular. Esto viene dado porque la fuerza sobre la partícula es exactamente igual a la fuerza centrípeta y por lo tanto el movimiento debe ser circular.

Ahora vamos a reemplazar la fuerza con la ecuación (1) en la ecuación (2), obteniendo

$$\frac{k}{r} = \frac{mv^2}{r} \ , \tag{3}$$

y por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \tag{4}$$

De esta forma, hay una condición sobre la velocidad pero no sobre el radio. Esto quiere decir que para cualquier radio, si la velocidad cumple con la relación en la ecuación (4), entonces tenemos movimiento circular.

Desarrollo d Vamos a agregar una pequeña oscilación radial del estilo $r \to r + \delta r$ (podemos usar la notación δr ó δ_r, ambas son correctas y significan lo mismo, en este caso particular usaré δr).

Sabemos que la única fuerza actuando sobre la partícula es la fuerza descrita en la ecuación (1). Por lo tanto, podemos escribir

$$m\vec{a} = -\frac{k}{r}\hat{r} \ , \tag{5}$$

vamos a separar por coordenadas, comenzando con $\hat{r}$, y obtenemos que

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -\frac{k}{r} \ , \tag{6}$$

la coordenada en $\hat{\theta}$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) = 0 \ , \tag{7}$$

y en la coordenada $\hat{\phi}$

$$m(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) = 0 \ . \tag{8}$$

Para simplificar el algebra, vamos a usar el hecho de que la partícula se mueve en una órbita circular. Por lo tanto, podemos decir que la partícula está girando en un θ fijo, particularmente escogemos $\theta = \pi/2$, de esta forma $\sin\theta = 1$ y $\cos\theta = 0$. Además $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$ (pues es un θ fijo). Por lo tanto, las 3 ecuaciones anteriores se reescriben de la siguiente manera

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{k}{mr} \ , \tag{9}$$

$$0 = 0 \ , \tag{10}$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \ . \tag{11}$$

Vemos que la segunda ecuación no aporta información relevante dado que todos los términos se eliminan y llegamos a 0=0. Vamos a ignorar esta ecuación dado que la perturbación es en r y por lo tanto sólo r y ϕ se verán afectados. Por lo tanto, las ecuaciones con las que vamos a trabajar son

$$r\ddot{r} - r^2\dot{\phi}^2 = -\frac{k}{m} \ , \tag{12}$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \ . \tag{13}$$

Ahora vamos a agregar la perturbación $r \to r + \delta r$. Además $\ddot{r} \to \ddot{r} + \delta\ddot{r}$, esto es porque la segunda derivada sobre el radio también se ve afectado por la perturbación, de hecho todas las variables se ven afectadas, de esta forma, $\dot{\phi} \to \dot{\phi} + \delta\dot{\phi}$, $\ddot{\phi} \to \ddot{\phi} + \delta\ddot{\phi}$, $\dot{r} \to \dot{r} + \delta\dot{r}$. Reemplazamos todo esto en las ecuaciones anteriores

$$(r + \delta r)(\ddot{r} + \delta\ddot{r}) - (r + \delta r)^2(\dot{\phi} + \delta\dot{\phi})^2 = -\frac{k}{m} \ , \tag{14}$$

$$(r + \delta r)(\ddot{\phi} + \delta\ddot{\phi}) + 2(\dot{r} + \delta\dot{r})(\dot{\phi} + \delta\dot{\phi}) = 0 \ . \tag{15}$$

Despreciando términos de segundo orden

$$r\ddot{r} + \delta r\ddot{r} + r\delta\ddot{r} - (r^2 + 2r\delta r)(\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\delta\dot{\phi}) = -\frac{k}{m} \ , \tag{16}$$

$$(r\ddot{\phi} + \delta r\ddot{\phi} + r\delta\ddot{\phi}) + 2(\dot{r}\dot{\phi} + \delta\dot{r}\dot{\phi} + \dot{r}\delta\dot{\phi}) = 0 \ , \tag{17}$$

trabajando un poco más la expresión

$$r\ddot{r} + \delta r\ddot{r} + r\delta\ddot{r} - (r^2\dot{\phi}^2 + r^2 2\dot{\phi}\delta\dot{\phi} + 2r\delta r\dot{\phi}^2) = -\frac{k}{m} \ , \tag{18}$$

$$(r\ddot{\phi} + \delta r\ddot{\phi} + r\delta\ddot{\phi}) + 2(\dot{r}\dot{\phi} + \delta\dot{r}\dot{\phi} + \dot{r}\delta\dot{\phi}) = 0 \ , \tag{19}$$

y ahora vamos a usar el hecho de que estamos haciendo las oscilaciones en torno al punto en el que tenemos un movimiento circular. Por lo tanto, las variables sin perturbar pueden escribirse de la siguiente manera: $\dot{\phi} = \omega_c$ (este ω_c es la frecuencia de oscilación para el movimiento circular, no para la perturbación), $\dot{r} = \ddot{r} = \ddot{\phi} = 0$. Y de esta forma, las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas de la siguiente manera

$$r\delta\ddot{r} - (r^2\omega_c^2 + 2r^2\omega_c\delta\dot{\phi} + 2r\delta r\omega_c^2) = -\frac{k}{m} \ , \tag{20}$$

$$r\delta\ddot{\phi} + 2\omega_c\delta\dot{r} = 0 \ . \tag{21}$$

De la ecuación (12), si imponemos que es un movimiento circular $\ddot{r} = 0$, entonces obtenemos que $r\omega_c^2 = k/(mr)$, reemplazando esto en la ecuación (20), tenemos que

$$r\delta\ddot{r} - (2r^2\omega_c\delta\dot{\phi} + 2r\delta r\omega_c^2) = 0 \ , \tag{22}$$

$$r\delta\ddot{\phi} + 2\omega_c\delta\dot{r} = 0 \ . \tag{23}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, vamos a derivar (22) y luego reemplazar $\delta\ddot{\phi}$ con la ecuación (23). Es importante recordar que estamos trabajando con una perturbación y que por lo tanto, r deja de ser una variable y pasa a ser una constante, y que las variables con las que estamos trabajando ahora son δr, $\delta\phi$, $\delta\dot{r}$, $\delta\dot{\phi}$, $\delta\ddot{r}$, $\delta\ddot{\phi}$. Entonces derivando (22)

$$r\delta\dddot{r} - (2r^2\omega_c\delta\ddot{\phi} + 2r\delta\dot{r}\omega_c^2) = 0 \ , \tag{24}$$

y reemplazando $\delta\ddot{\phi}$ con la ecuación (23), tenemos que

$$r\delta\dddot{r} - \left(2r^2\omega_c\left(-\frac{2\omega_c\delta\dot{r}}{r}\right) + 2r\delta\dot{r}\omega_c^2\right) = 0 \ , \tag{25}$$

reduciendo con un poco de algebra

$$\delta\dddot{r} + 2\omega_c^2\delta\dot{r} = 0 \ , \tag{26}$$

si hacemos el cambio de variable $u = \delta\dot{r}$, tenemos que la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\ddot{u} + 2\omega_c^2 u = 0 \ , \tag{27}$$

y vemos que hemos obtenido la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{2}\omega_c$. Por lo tanto, la frecuencia de las pequeñas oscilaciones radiales en torno a la órbita circular es $\omega = \sqrt{2}\omega_c$.