Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta P2(a), Auxiliar 11

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

2. Considere dos anillos de masa m cada uno, que deslizan con roce despreciable, uno por una barra horizontal (A_h) y el otro por una barra vertical (A_v) manteniendose unidos por una cuerda de largo L. El anillo A_h está atado a un resorte de constante elástica k y largo natural L_0, como se indica en la Figura 1. Estando el sistema en posición de equilibrio se impulsa el anillo A_h hacia la derecha con una velocidad inicial v_0.

   (a) Pruebe que la suma de los trabajos que realizan las fuerzas de tensión de la cuerda sobre los dos anillos es nula.

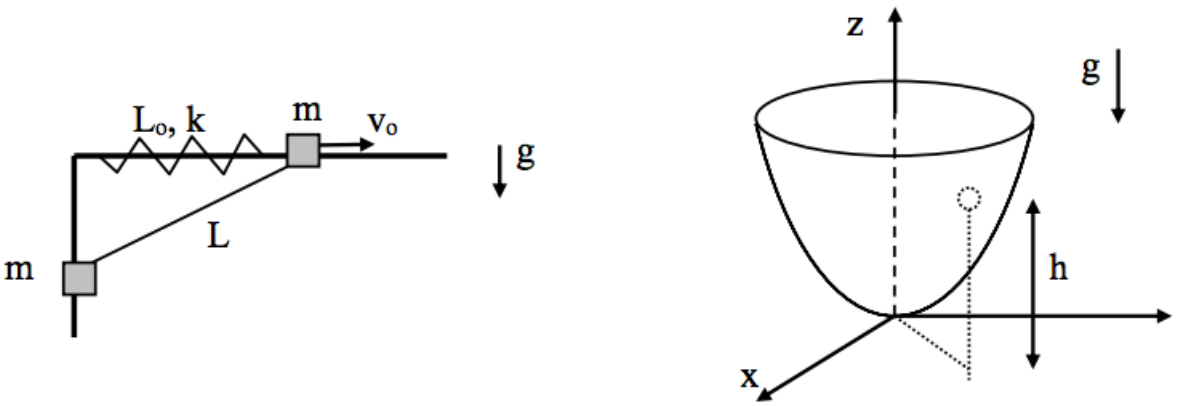

Figure 1: A la izquierda está el diagrama del problema 2. A la derecha está el diagrama del problema 3.

(a) Para comenzar vamos a definir el origen en la esquina del triangulo que se forma por las dos masas. Además vamos a definir la distancia x desde el origen hasta la masa horizontal, y la distancia y desde el origen hasta la masa vertical. Notemos que durante todo el movimiento $x > 0$ e $y < 0$. Además notemos que al ser un triangulo rectangulo, se cumple que

$$x^2 + y^2 = L^2 \ . \tag{1}$$

Ahora vamos a escribir correctamente las tensiones que va a cada masa. Comencemos con al tensión que va sobre la masa horizontal, que es

$$\vec{T}_h = T_h(-\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}) \ , \tag{2}$$

con θ el ángulo que se forma entre la vertical y la cuerda que conecta ambas masas. Por otra parte, para la masa vertical

$$\vec{T}_v = T_v(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) \ . \tag{3}$$

Notemos que ambas expresiones se han escrito de manera vectorial y la información del signo está dentro del parentesis, de esta manera $T_v > 0$ y $T_h > 0$. Y dado que la cuerda es inextensible $T_v = T_h = T$.

Ahora que tenemos las fuerzas involucradas, vamos a definir un dominio de integración arbitrario para poder calcular el trabajo. Sea x_0 el punto de inicial para la masa horizontal y x_f su punto final. Además dada la ecuación 1, podemos encontrar el punto inicial para la masa vertical usando $x_0^2 + y_0^2 = L^2$, además del punto final usando $x_f^2 + y_f^2 = L^2$. Remarquemos que cuando la masa horizontal está en x_0 entonces la masa vertical está en y_0, y cuando la masa horizontal está en x_f entonces la masa vertical está en y_f. Ahora, vamos a calcular el trabajo sobre la masa horizontal

$$W_h = \int_{x_0}^{x_f} \vec{T}_h d\vec{x} \tag{4}$$

$$= \int_{x_0}^{x_f} T(-\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})(\hat{i}dx) \tag{5}$$

$$= -\int_{x_0}^{x_f} T\sin\theta dx \ . \tag{6}$$

Y para la masa vertical

$$W_v = \int_{y_0}^{y_f} \vec{T}_v d\vec{y} \tag{7}$$

$$= \int_{y_0}^{y_f} T(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})(\hat{j}dy) \tag{8}$$

$$= \int_{y_0}^{y_f} T\cos\theta dy \ . \tag{9}$$

Antes de continuar vamos a fijar nuestra atención en las funciones trigonométricas dentro de las integrales. Por geometría, es evidente que

$$\sin\theta = \frac{x}{L} \ , \tag{10}$$

por otra parte, no es tan evidente que

$$\cos\theta = \frac{|y|}{L} \tag{11}$$

$$= \frac{-y}{L} \ , \tag{12}$$

esto debe ser así puesto que $\cos\theta$ debe ser mayor que cero e y es menor que cero, por lo tanto debemos corregir el signo. Al reemplazar esto en el trabajo vemos que

$$W_h = -\int_{x_0}^{x_f} T\frac{x}{L}dx \ , \tag{13}$$

$$W_v = \int_{y_0}^{y_f} T\frac{-y}{L}dy \ . \tag{14}$$

Tomando la forma diferencial de la ecuación (1)

$$2xdx + 2ydy = 0 \ , \tag{15}$$

y por lo tanto

$$dy = -\frac{x}{y}dx \ , \tag{16}$$

y todo esto para hacer un cambio de variable en el trabajo vertical. Al hacer el cambio de variable de $y \to x$ en la integral también debemos cambiar los límites de integración $y_0 \to x_0$ e $y_f \to x_f$. Y de esta forma, el trabajo vertical queda

$$W_v = \int_{x_0}^{x_f} T\frac{-y}{L}(-\frac{x}{y}dx) \tag{17}$$

$$= \int_{x_0}^{x_f} T\frac{x}{L}dx \ , \tag{18}$$

y si sumamos ambos trabajos

$$W_h + W_v = \int_{x_0}^{x_f} T\frac{x}{L}dx - \int_{x_0}^{x_f} T\frac{x}{L}dx \tag{19}$$

$$= 0 \ . \tag{20}$$