Auxiliar 8, Pauta P3

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

P3 Considere dos masas puntuales iguales, ambas de masa m. Ambas están unidas con un resorte de constante elástica k, además de que cada una está unida a la pared con un resorte de constante elástica k, tal como se muestra en la Figura. En la imagen superior de la Figura todas las masas están en reposo, esto quiere decir que la fuerza total sobre cada masa es igual a cero.

(a) Encuentre la posición de las partículas en función del tiempo.

(b) Si inicialmente ambas masas están en reposo y ambas son apartadas una de la otra simétricamente, cada una en una distancia x_0 desde su posición de reposo, encuentre la posición de ambas partículas en función del tiempo (note que la velocidad inicial es cero para ambas partículas).

(c) A partir del resultado anterior encuentre el trabajo hecho por el resorte sobre cada una de las partículas desde el momento en el que son soltadas hasta un tiempo t general.

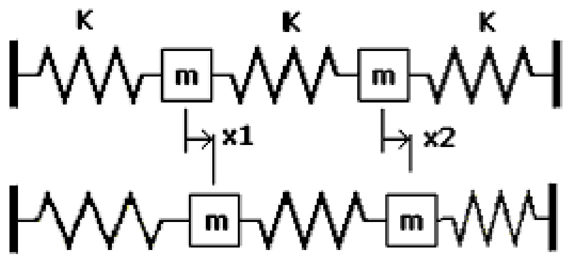

Figure 1: Dos masas m están atadas por un resorte de constante k entre ellas, además de que cada una está atada a una pared por medio de un resorte de constante elástica k.

P3 (a) Para comenzar vamos a usar la siguiente notación: x_1 es el desplazamiento de la primera partícula y x_2 es el desplazamiento de la segunda partícula, como se muestra en la Figura. Si escribimos la ecuación de movimiento para la primera partícula, tenemos que

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \ , \tag{1}$$

notemos que a la derecha de la igualdad, el primer término corresponde a la fuerza ejercida por el resorte que va a la pared sobre la primera masa. El segundo término que está a la derecha de la igualdad corresponde a la fuerza que hace el resorte central sobre la primera masa. La fuerza que hace el resorte central depende de la posición de ambas masas, puesto que el movimiento de cualquiera de las masas comprime/expande el resorte.

Ahora vamos a hacer la sumatoria de fuerzas sobre la segunda masa

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k(x_1 - x_2) \ . \tag{2}$$

Y hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para resolver el sistema vamos a sumar y restar las ecuaciones, obteniendo respectivamente

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -2k(x_1 + x_2) + k(x_1 + x_2) \ , \tag{3}$$
$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -2k(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_2) \ , \tag{4}$$

y si hacemos el cambio de variable $u = x_1 + x_2$ y $v = x_1 - x_2$, tenemos que

$$m\ddot{u} = -2ku + ku \ , \tag{5}$$
$$m\ddot{v} = -2kv - kv \ , \tag{6}$$

que es

$$\ddot{u} = \frac{k}{m} u \ , \tag{7}$$

$$\ddot{v} = -\frac{3k}{m} v \ , \tag{8}$$

y sabemos que son osciladores armónicos con solución

$$u = A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t) \ , \tag{9}$$

$$v = C\cos(\omega_2 t) + D\sin(\omega_2 t) \ , \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

con $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, y $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que

$$x_1 = \frac{1}{2}(u+v) \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t) + C\cos(\omega_2 t) + D\sin(\omega_2 t)\right) \ . \tag{13}$$

Y para la segunda partícula

$$x_2 = \frac{1}{2}(u-v) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t) - C\cos(\omega_2 t) - D\sin(\omega_2 t)\right) \ . \tag{15}$$

Las constantes A, B, C y D están dadas por las condiciones iniciales del problema.

(b) Si inicialmente se han apartado las partículas, tal que cada una queda una distancia x_0 desde su posición de reposo, entonces $x_1(t=0) = -x_0$ y $x_2(t=0) = x_0$. Además se nos dice que $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Todo esto vamos a reemplazarlo en las ecuaciones que hemos encontrado para $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Para la primera partícula

$$-x_0 = \frac{1}{2}(A+C) \ , \tag{16}$$

y para la condición inicial $\dot{x}_1(0) = 0$, tenemos que derivar la ecuación (13), que es

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}\left(-A\omega_1\sin(\omega_1 t) + B\omega_1\cos(\omega_1 t) - C\omega_2\sin(\omega_2 t) + D\omega_2\cos(\omega_2 t)\right) \ , \tag{17}$$

y si reemplazamos la condición inicial $\dot{x}_1(0) = 0$

$$0 = B\omega_1 + D\omega_2 \ . \tag{18}$$

Si hacemos lo mismo para la partícula 2

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}\left(-A\omega_1\sin(\omega_1 t) + B\omega_1\cos(\omega_1 t) + C\omega_2\sin(\omega_2 t) - D\omega_2\cos(\omega_2 t)\right) \ , \tag{19}$$

y al reemplazar la condición inicial $\dot{x}_2(0) = 0$

$$0 = B\omega_1 - D\omega_2 \ . \tag{20}$$

Además la condición sobre la posición inicial de la partícula 2 es

$$x_0 = \frac{1}{2}(A-C) \ . \tag{21}$$

Si combinamos las ecuaciones (16) con (21), (18) y (20), tenemos que $B = D = A = 0$ y $C = 2x_0$. Por lo tanto

$$x_1 = -x_0\cos(\omega_2 t) \ , \tag{22}$$

y para la segunda partícula

$$x_2 = x_0\cos(\omega_2 t) \ . \tag{23}$$