Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta P3, Auxiliar 11

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

P3 Una partícula de masa m se mueve por el interior de un paraboloide de revolución descrito por la ecuación $z = a(x^2 + y^2)$, bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Suponga que la partícula se encuentra inicialmente a una altura h sobre el punto más bajo del paraboloide y que se le da una velocidad inicial v_0 en dirección horizontal, sobre la superficie de revolución. Determine las alturas máximas y mínimas que alcanza la partícula en movimiento sobre el paraboloide.

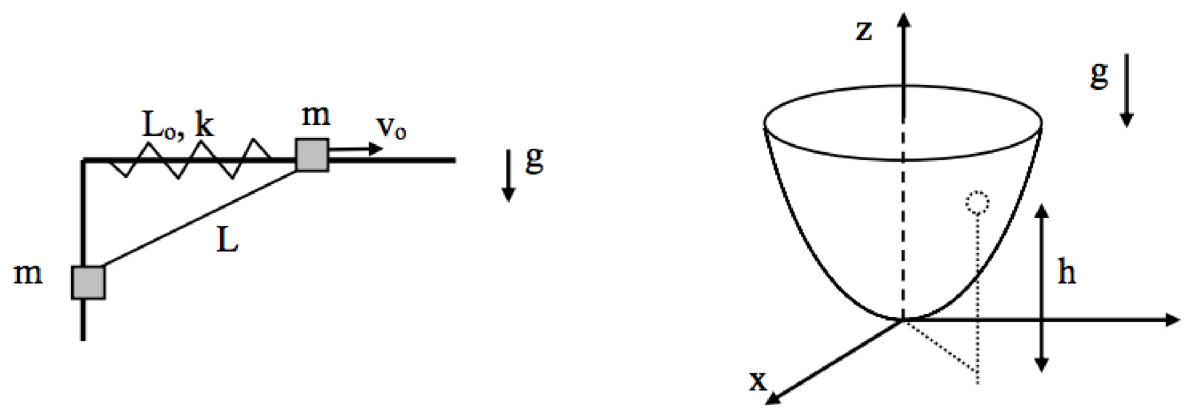

Figure 1: A la izquierda está el diagrama del problema 2. A la derecha está el diagrama del problema 3.

P3 Antes de comenzar, vamos a aclarar que uno podría verse tentado a usar conservación de energía, decir que la energía inicial es igual a la final y decir que en el punto máximo no hay energía cinética, y hacer

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = mgz_{max} \ ,$$

sin embargo, esto es equivocado, dado que cuando $z(t)$ es un máximo, es cierto que $\dot{z}$ vale cero, sin embargo también existe energía cinética de rotación $m\rho^2\dot{\theta}^2/2$ y no tenemos ningún argumento para decir que vale cero cuando z es un máximo (hay que imaginar que la masa ha comenzado su movimiento con velocidad angular al interior del paraboloide y por lo tanto *a priori* no podemos asumir que la velocidad angular sea cero en un punto arbitrario). En el caso de que la velocidad inicial hubiese sido sólo en z, entonces podríamos escribir las ecuaciones de movimiento y ver que $\dot{\theta} = 0$ durante toda la dináminca y por lo tanto usar conservación de energía como se ha escrito anteriormente. Sin embargo, este no es el caso y debemos encontrar otra manera de resolverlo.

Para comenzar, vamos a hacer el siguiente cambio de variable $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ (coordenadas cilíndricas). Por lo tanto, la partícula se mueve sobre la curva $z - a\rho^2 = 0$. Dado que en el sistema no hay pérdida, la energía total E del sistema en cualquier momento será igual a la energía inicial, que es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \ . \tag{1}$$

Por otra parte, si hacemos sumatoria de fuerzas para la parte radial ($\hat{\rho}$)

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = \vec{N}\cdot\hat{\rho} \ ,$$

además la sumatoria de fuerzas sobre el eje vertical ($\hat{k}$ ó sea el eje donde se mueve z) es

$$m\ddot{z} = -mg + \vec{N}\cdot\hat{k} \ ,$$

y finalmente, la sumatoria para la parte angular

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \ ,$$

notemos que la normal sólo tiene componente radial y en $\hat{k}$, por lo que no va en la parte angular de la sumatoria de fuerzas. De lo anterior, podemos ver que si

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \ ,$$

entonces

$$(\rho^2\dot{\theta}) = C \ , \tag{2}$$

con C una constante.

Si escribimos la energía en un momento arbitrario, sabemos que es igual a la energía E (porque no hay pérdidas), de esta forma

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + mgz \ , \tag{3}$$

notemos que la expresión anterior viene de que la energía cinética K tiene que considerar la velocidad en la altura ($K_z = m\dot{z}^2/2$), también debe considerar la velocidad radial ($K_\rho = m\dot{\rho}^2/2$) y la velocidad angular ($K_\theta = m\rho^2\dot{\theta}^2/2$), por lo tanto

$$\begin{aligned} K &= K_z + K_\rho + K_\theta \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) \ . \end{aligned}$$

Ahora vamos a usar la ecuación (2) para deshacernos de los $\dot{\theta}$ de la ecuación (3)

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right) + mgz\ , \tag{4}$$

además usamos que

$$z = a\rho^2\ ,$$

y al derivar con respecto al tiempo

$$\dot{z} = 2a\rho\dot{\rho}\ ,$$

si reemplazamos en la ecuación (4), tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \left(\frac{\dot{z}}{2a\rho}\right)^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right) + mgz \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \frac{\dot{z}^2}{4az} + \frac{aC^2}{z}\right) + mgz\ , \end{aligned}$$

y al despejar $\dot{z}$, tenemos que

$$\dot{z}^2 = \frac{2\dfrac{E - mgz}{m} - \dfrac{aC^2}{z}}{1 + \dfrac{1}{4az}}\ ,$$

si z es un máximo o un mínimo, entonces tenemos que $\dot{z} = 0$, por lo tanto, vamos a imponer esta condición para ver los valores de z la satisfacen. De esta manera

$$0 = (4az)\left(\frac{\dfrac{2E}{m} - 2gz - \dfrac{aC^2}{z}}{4az + 1}\right)\ .$$

dado que es el numerador el que debe ser igual a cero, podemos multiplicar todo por el denominador sin perder información relevante (también divido por $4a$ porque tampoco aporta información relevante)

$$0 = \left(\frac{2E}{m}z - 2gz^2 - aC^2\right)\ .$$

Y hemos obtenido la ecuación de un polinomio de segundo grado, y vemos que la solución es

$$\begin{aligned} z &= \frac{-\dfrac{2E}{m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2E}{m}\right)^2 - 8agC^2}}{-4g} \\ &= \frac{\dfrac{E}{m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{E}{m}\right)^2 - 2agC^2}}{2g}\ , \end{aligned}$$

para terminar debemos reemplazar E y C. Tenemos E de la ecuación (1), sin embargo de C sólo sabemos que $C = \rho^2\dot{\theta}$. Dado que inicialmente la velocidad que se le ha dado ha sido sólo en la coordenada angular, entonces $v_0 = \rho(t = 0)\dot{\theta}(t = 0)$, y de esta manera $C = v_0\rho(t = 0)$. Esto último se cumple porque evaluamos $C = \rho^2(t)\dot{\theta}(t)$ en el tiempo $t = 0$ y reemplazamos con v_0. Ahora nos falta, $\rho(t = 0)$, y vemos que $a\rho^2(t =$

$0) = z(t = 0) = h$, por lo que $\rho(t = 0) = \sqrt{h/a}$. Así que, ahora que tenemos C, podemos reemplazar tanto E como C. Y finalmente

$$z = \frac{\frac{1}{2}v_0^2 + gh \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0^2 + gh\right)^2 - 2ag\left(v_0\sqrt{\frac{h}{a}}\right)^2}}{2g}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}v_0^2 + gh \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0^2 + gh\right)^2 - 2hgv_0^2}}{2g} \,.$$

Finalmente vemos que la altura máxima es

$$z_{max} = \frac{\frac{1}{2}v_0^2 + gh + \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0^2 + gh\right)^2 - 2hgv_0^2}}{2g} \,,$$

y la altura mínima es

$$z_{min} = \frac{\frac{1}{2}v_0^2 + gh - \sqrt{\left(\frac{1}{2}v_0^2 + gh\right)^2 - 2hgv_0^2}}{2g} \,.$$

Consultas y reclamos sobre la pauta al foro o al correo: gabriel.caceres@ug.uchile.cl