Pauta Auxiliar 10

23 de septiembre de 2019

P1. Tanto en esta pregunta como en la siguiente hablaremos de la energia potencial del resorte. El potencial usualmente es una función cualquiera, que le da la pista a la particula para moverse con su energía cinética

Cuando nosotros buscamos puntos de equilibrio lo que queremos y lo que significa es que en ese punto el potencial se encuentra en un mínimo, lo que se traduce en que todas las fuerzas que percibe se cancelan. Cuando el punto donde ocurre esto es un mínimo del potencial, entonces se le llama punto de equilibrio estable y si es un maximo (local o global), punto de equilibrio inestable. Comenzamos con el problema

Lo primero será determinar el largo del resorte para luego restarselo a su largo natural y calcular el potencial elástico, podemos notar que la fuerza peso no tiene un potencial que vayamos a considerar pues está trabajando en un eje perpendicular al movimiento.

El largo del resorte estirado será $L = 2R\cos(\frac{\theta}{2})$

Así el potencial será

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}k\Delta L^2 \\
&= \frac{1}{2}k(2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - L_o)^2
\end{aligned}$$

Nos piden analizar los puntos de equilibrio del anillo, asi que tenemos que encontrarlos. Para ello impondremos que la derivada de el potencial con respecto al ángulo sea 0.

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\theta} = 0 = -k(2R\cos\ \cos(\theta/2) - Lo)\frac{1}{2}sin(\theta/2) \\
\implies 2R\cos(\theta/2) - L_o = 0 \quad \vee \quad \sin(\theta/2) = 0 \\
\cos(\theta/2) = \frac{L_0}{2R} \quad \vee \quad \theta/2 = n\pi \\
\cos(\theta/2) = \frac{L_0}{2R} \quad \vee \quad \theta = 2n\pi
\end{aligned}$$

El primer punto de equilibrio, solo tiene sentido cuando $\dfrac{L_0}{2R} \leq 1$, porque en caso de no ocurrir, tendremos que nunca se cumplira la condicion para que ese término se haga 0 pues esta acotado por los valores que puede tomar el coseno. y el segundo nos entrega infinitas soluciones, pero son todas la misma, $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi....$ Notamos que este segundo punto siempre es un punto de equilibrio, sin importar el largo del resorte ni el radio del circulo grande.

Queremos determinar ahora su estabilidad, para eso computamos la segunda derivada del potencial.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2U}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{k}{2}(R\sin\theta - L_0\sin(\theta/2))\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left(R\cos\theta - \frac{L_0}{2}\cos(\theta/2)\right)
\end{aligned}
$$

Ahora queremos evaluar en los puntos interesantes ($\theta_1 = 0 \quad \cos(\theta_2/2) = \frac{L_0}{2R}$)

$$
\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_1} = -\frac{k}{2}\left(R - \frac{L_0}{2}\right)
$$

Cuando el signo de esta expresión sea mayor que 0, estaremos en prescencia de un punto de equilibrio estable, en cambio cuando sea negativo, tendremos que sera un punto de equilibrio inestable.

ie.

$$
\theta_1 \begin{cases} 2R \geq L_0 & \implies \quad \left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_1} < 0, \\ 2R < L_0 & \implies \quad \left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_1} > 0, \end{cases}
$$

Notamos que cuando cambian ciertos parametros del problema ya no es estable el equilibrio de ese punto, ahora queremos vere el caso 2.

Ahora queremos evaluar

$$
\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_2} = -\frac{k}{2}\left(R\cos\theta_2 - \frac{L_0}{2}\cos(\theta_2/2)\right)
$$

Ahora queremos evaluar cuando $\cos(\theta_2/2) = \frac{L_0}{2R}$, y queremos calular $\cos(\theta_2)$. Para esto utilizaremos propiedad del coseno del angulo doble

$$
\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\
&= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos $\alpha = \theta/2$.

$$\cos\theta = 2\cos^2\theta/2 - 1$$

Así

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_2} &= -\frac{k}{2}\left(R(2\cos^2\theta/2 - 1) - \frac{L_0}{2}\cos(\theta_2/2)\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left(\frac{L_0^2}{2R} - R - \frac{L_0^2}{4R}\right) \\
&= -\frac{k}{2}\left(\frac{L_0^2}{4R} - R\right)
\end{aligned}$$

Ahora como este punto de equilibrio tiene como requerimiento $L_0 < 2R$, tenemos que este punto de equilibrio es estable, siempre que existe. Notamos que cuando este punto es estable, el punto de $\theta = 0$ es inestable, y cuando este punto no esta, el otro es estable, este es un comportamiento tipico de los puntos de equilibrio.

Ahora para la parte b), nos piden el periodo de pequeñas oscilaciones (p.o), para calcularlo , tiene una expresión entre comillas general,

$$\omega_{p.o} = \sqrt{\frac{\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_{eq}}}{\sum m}}$$

Notamos que solo tiene sentido calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones cuando tenemos un punto de equilibrio estable, puesto que al no poder existir masa negativa, obtendriamos frecuencias imaginarias para los puntos de equilibrio inestables lo que no tiene sentido.

Ahora nos ponemos en los casos que nos dicen ahí para cada uno de los sets de parametros. Primero $L_0 = 3R$, cual es el punto de equilibrio estable para esta condicion?. Si $L_0 = 3R \implies L_0 > 2R$, por lo que el punto de equilibrio es en $\theta = 0$.

Así:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{0} &= -\frac{k}{2}\left(R - \frac{3R}{2}\right) \\
&= \frac{Rk}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$w_{p.o} = \sqrt{\frac{Rk}{4m}}$$

Ahora, cuando $L_0 = 2^{\frac{1}{2}} R \implies L_0 < 2R$ pues $\sqrt{2} < 2$
Así, el punto de equilibrio es en el que llamamos θ_2,

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{d\theta^2} &= -\frac{k}{2}\left(\frac{2R^2}{R} - R\right)\\ &= \frac{Rk}{4}\end{aligned}$$

De la misma forma

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\left(\frac{Rk}{4m}\right)}$$

P2. En este problema nuevamente tenemos un resorte pero ahora la expresión para cuado este esta estirado es un poco distinta y va a venir dada por la forma parabólica que tiene la curva por la que desliza el anillo. Tenemos de datos.

- $y = ax^2$
- $a = 1/L_0$
- Anillo masa m
- Largo natural resorte L_0
- Constante elástica k
- Extremo del resorte ubicado en el punto $(0, -D)$
- $D = 2L_0$

El primer problema consiste en calcular la velocidad con la que se debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial. Para esto nos acordaremos de los cursos anteriores de fisica y diremos

$$E_i = E_f$$

Donde el instante i, es cuando parte con velocidad v_o y el instante f será cuando ya no tiene velocidad y el resorte esta lo mas estirado que puede. Una expresión valida para la energia del resorte cuando el anillo se encuentra en la posicion (x, y) es.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x-0)^2+(y+D)^2} - L_0\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2+2yD+D^2} - L_0\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+a^2x^4+2Dax^2+D^2} - L_0\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^4/L_0^2+5x^2+4L_o^2} - L_0\right)^2
\end{aligned}$$

Para la primera parte utilizaremos solo la primera definicion, para la parte b usaremos la ultima deifnicion que es mas comoda.

Entonces tendremos

$$\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{4L_0^2} - L_0\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}kL_0^2
\end{aligned}$$

Para la energia final, tambien debemos considerar la potencial gravitacional. A una altura D, $y = 2L_0$ y la expresion para x será. $x = \sqrt{2}L_0$.

$$
\begin{aligned}
E_f &= 2mgL_0 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(\sqrt{2}L_0)^2 + (2L_0 + 2L_0)^2} - L_0\right)^2 \\
&= 2mgL_0 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{18L_0^2} - L_0\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora si igualamos, podemos despejar la velocidad.

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
\frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}kL_0^2 &= 2mgL_0 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{18L_0^2} - L_0\right)^2 \\
v_o^2 &= 2mgL_0 - \frac{kL_0^2}{m} + \frac{k}{m}\left(\sqrt{18L_0^2} - L_0\right)^2
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos la velocidad en funcion de puras constantes del problema.

Ahora queremos mostrar que es un punto de equilibrio, para eso tomaremos la ultima definicion que tomamos del potencial, que ese

$$
U = \frac{1}{2}k\ \left(\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_o^2} - L_0\right)^2
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k\ \left(\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_o^2} - L_0\right)^2\right) \\
&= k\left(\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2} - L_0\right)\left(\frac{4x^3/L_0^2 + 10x}{2\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2}}\right)
\end{aligned}
$$

Si ahora buscamos evaluarlo en el punto que nos interesa obtendremos

$$
\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0,y=0} = 0
$$

Queremos mostrar que es un punto de equilibrio estable, por lo que debemos calcular la segunda derivada, evaluarla y ver que signo tiene, (si es positivo es punto de equilibrio).

Reescribimos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2U}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx}\right)\\
&= k\,\frac{d}{dx}\left(2x^3/L_0^2 + 5x - \frac{2x^3/L_0 + 5L_0x}{\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2}}\right)\\
&= k\left(6x^2/L_0^2 + 5 - \frac{(6x^2/L_0 + 5L_0)\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2} - (2x^3/L_0 + 5L_0x)\dfrac{4x^3/L_0^2 + 10x}{\sqrt{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2}}}{x^4/L_0^2 + 5x^2 + 4L_0^2}\right)
\end{aligned}
$$

Si evaluamos en el punto que nos interesa ($x = 0$), obtenemos.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} &= 5k - \frac{10L_0^2}{4L_0^2}\\
&= 2{,}5k > 0
\end{aligned}
$$

Lo que muestra que es un punto de equilibrio estable. Con un periodo de pequeñas oscilaiones igual a

$$
\begin{aligned}
T_{p.o} = \frac{2\pi}{w_{p.o}} &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}}}\\
&= 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5k}}
\end{aligned}
$$

Con lo que termina esta pauta.

Respecto a que este problema no me resulto en el auxiliar, creo que se debe a que yo trabajé con la variable y, y desde ahi pasa que como la raiz es definida negativa, entonces no considera valores negaticos para x, lo que hace que como la raiz cuadrada no esta bien definida para numeros negativos, no haya un minimo en el potencial con respecto a y explicitamente.