Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Auxiliar 5

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

Dos argollas de masa m cada una se deslizan sin roce por un aro de radio R, dispuesto en un plano vertical. Las argollas se encuentran unidas entre si por una cuerda ideal de largo R. (**C1, 2008, P1, Con pauta**)

1. Determine las posiciones de las argollas, en las cuales éstas pueden permanecer en reposo, indicando en cada paso la magnitud de la tensión de la cuerda.
2. Si el sistema se libera desde el reposo y con la cuerda estirada, en la posición donde $\theta = 0$, determine el valor de θ para el cual la cuerda pierde tensión.

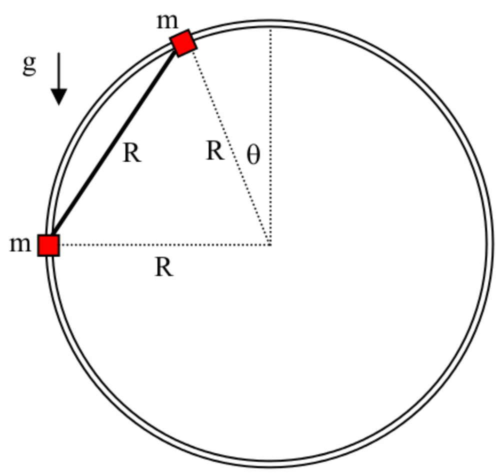

Figure 1: Dos argollas m están en un anillo de radio R. Las argollas están unidas entre si por una cuerda ideal de largo R.

Pauta:

A) Para comenzar vamos a usar el sistema de coordenadas polares con el vector unitario radial apuntando en la dirección de la masa 1, como se muestra en la Figura 2. Sabemos que al hacer la sumatoria de fuerzas, en la componente angular ($\hat{\theta}$) sólo tenemos dos fuerzas, la tensión (de la cuerda) y la gravedad, por lo tanto, vamos a descomponer ambas fuerzas para hacer correctamente la sumatoria de fuerzas en coordenadas polares. Comenzando por la fuerza de gravedad sobre la masa 1 (en la Figura 2 se puede apreciar el ángulo θ con el que se proyecta el vector)

$$-mg\hat{j} = mg\sin(\theta)\hat{\theta} - mg\cos(\theta)\hat{\rho} \ ,$$

usando la notación $\hat{i} = \hat{x}$, $\hat{j} = \hat{y}$ $\hat{k} = \hat{z}$. Ahora la componente de la tensión es (la podemos ver en la Figura 3)

$$\vec{T} = -T\cos(\alpha)\hat{\rho} + T\sin(\alpha)\hat{\theta} \ .$$

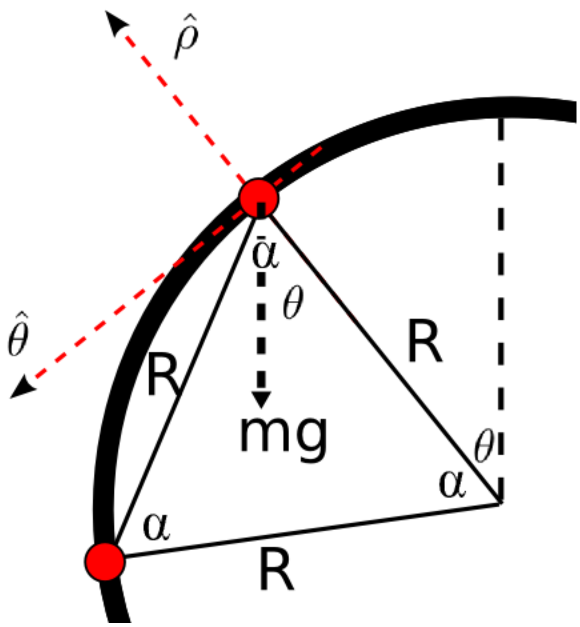

Figure 2: El sistema de referencia se pone convenientemente en la primera masa. En la imagen podemos ver la fuerza de la gravedad y la ubicación del ángulo θ que se ha usado para proyectar.

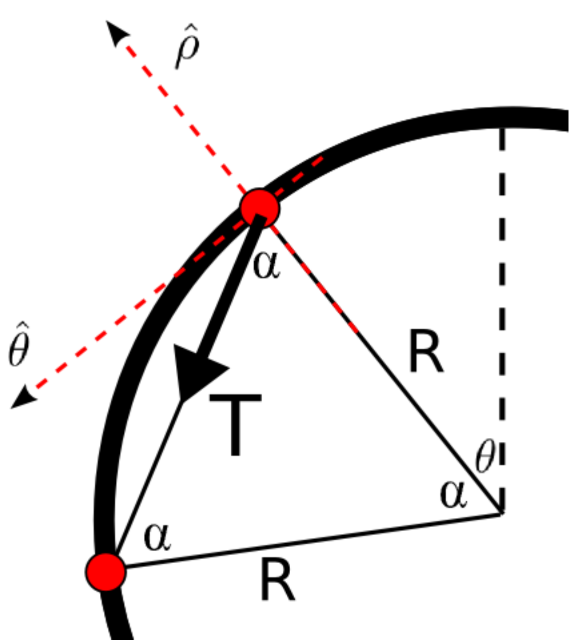

Figure 3: El sistema de referencia se pone convenientemente en la primera masa. En la imagen podemos ver la tensión y el ángulo α usado para proyectar el vector.

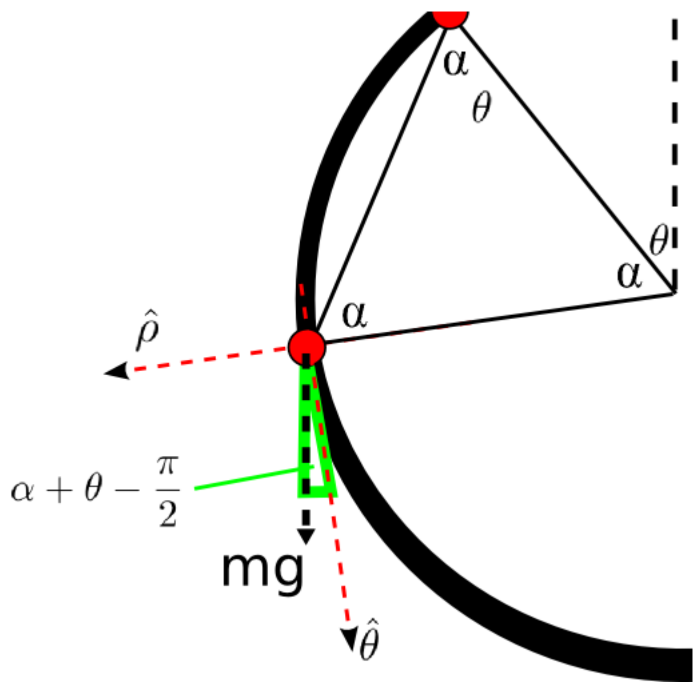

Figure 4: El sistema de referencia se pone convenientemente en la segunda masa. En la imagen podemos ver la fuerza de la gravedad y la ubicación del ángulo $\alpha + \theta - \pi/2$ que se ha usado para proyectar.

Ahora vamos a hacer lo mismo para la masa 2, para hacer esto vamos a cambiar el sistema de referencia orientando $\hat{\rho}$ hacia la masa 2, como se muestra en la Figura 4. De esta manera, podemos descomponer favorablemente las fuerzas sobre la masa 2. Haciendo la descomposición de la fuerza de gravedad tenemos que

$$\begin{aligned} -mg\hat{j} &= mg\cos\left(\alpha + \theta - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\theta} + mg\sin\left(\alpha + \theta - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\rho} \\ &= mg\sin(\alpha + \theta)\hat{\theta} - mg\cos(\alpha + \theta)\hat{\rho} \ , \end{aligned}$$

y la tensión (podemos ver como se ha proyectado en la Figura 5)

$$\vec{T} = -T\sin(\alpha)\hat{\theta} - T\cos(\alpha)\hat{\rho} \ .$$

Ahora vamos a exigir reposo, esto es $\vec{a} = 0$. Vamos a hacer sumatoria de fuerzas y ver sólo la componente angular ($\hat{\theta}$) dado que no hay fuerzas extras angularmente, por lo tanto al hacer la sumatoria de fuerzas sobre la masa 1 tenemos que

$$m\vec{a}_1 \cdot \hat{\theta} = 0 = mg\sin(\theta) + T\sin(\alpha) \ , \tag{1}$$

y para la masa 2

$$0 = mg\sin(\alpha + \theta) - T\sin(\alpha) \ , \tag{2}$$

al sumar las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(\theta) + \sin(\alpha + \theta) \\ &= \sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\alpha) \ , \end{aligned} \tag{3}$$

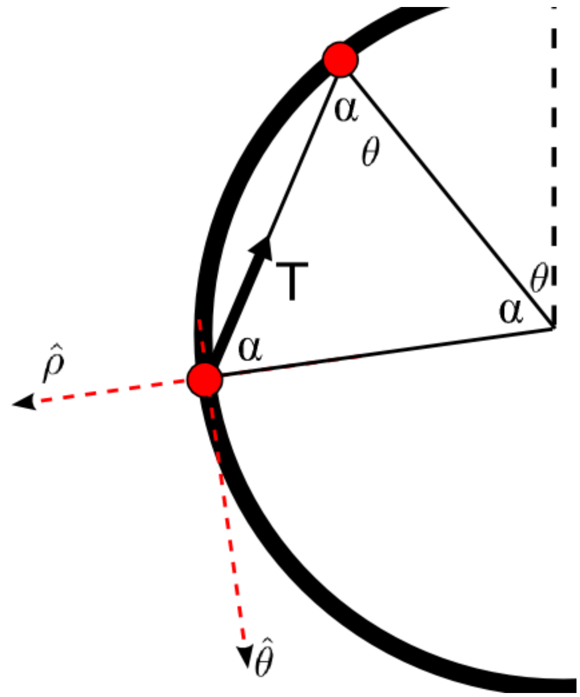

Figure 5: El sistema de referencia se pone convenientemente en la segunda masa. En la imagen podemos ver la tensión y que se usa el ángulo α para proyectar.

dado que la cuerda tiene largo R, podemos ver que se forma un triangulo equilatero con los radios de las masas, por lo tanto $\alpha = \pi/3$. Luego, al reemplazar en la ecuación (3)

$$0 = \sin(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta) \ ,$$

y con un poco de algebra

$$\tan(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ ,$$

y por lo tanto $\theta = -\pi/6$, que en grados es $-30°$. Si miramos la orientación del ángulo θ en la Figura 1, vemos que con $-30°$ ambas masas quedan simétricas con respecto a la vertical, lo que es una condición que tiene sentido.

Para encontrar la tensión vamos a restar las ecuaciones (1) y (2)

$$mg[\sin(\theta) - \sin(\alpha + \theta)] + 2T\sin(\alpha) = 0 \ ,$$

recordando que $\alpha = \pi/3$

$$mg\left[\sin(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\right] + 2T\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \ ,$$

despejando T

$$T = -\frac{mg}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\sin(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)\right] \ , \tag{4}$$

hasta ahora no hemosa usado la condición de que $\theta = -\pi/6$, por lo tanto es un resultado general. Al exigir $\theta = -\pi/6$, tenemos

$$\begin{aligned} T &= -\frac{mg}{\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right] \\ &= \frac{mg}{\sqrt{3}} \ . \end{aligned}$$

B) Dado que el resultado de la ecuación (4) es general, entonces podemos usarlo para cualquier ángulo θ. En el enunciado nos preguntan cuando la tensión vale cero, entonces busquemos un ángulo θ tal que $T = 0$, al reemplazar la condición en la ecuación (4), tenemos que

$$0 = -\frac{mg}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\sin(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)\right] \ ,$$

que es

$$\frac{1}{2}\sin(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) = 0 \ ,$$

de aqui es inmediato que $\theta = \pi/3$, y para este ángulo es que la tensión vale cero.