Pauta Auxiliar 6

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Gabriel Cáceres, César Gallegos y Mauricio Rojas

P1. Este es un problema muy clásico de roce viscoso, mas aún veremos diferencias entre dos tipos de roce viscoso. Conceptualmente tenemos que entender que el roce viscoso, a diferencia del estático o el cinético, no depende de la Normal sino que de la velocidad a la que se mueve el objeto afectado. Antes de empezar a resolver el problema haremos ciertas anotaciones respecto a este tipo de roce, $\vec{F_r} = -\gamma\vec{v}$.

Cuando nosotros hagamos Newton a un sistema y haya que considerar la fuerza de roce, es importante notar que la fuerza viene de por si con su signo y cambia automáticamente cuando el objeto cambia de dirección. Esto porque en su definición, el roce viscoso apunta en dirección contraria a la velocidad. Es el tipo de fuerza en la que uno toma su definicion, y la ubica en la ecuacion $\vec{F} = m\vec{a}$, en el lado de las fuerzas, bueno, esa es la introducción, ahora procedamos a resolver el problema.

Tenemos una particula que se mueve con velocidad inicial v_o, que no cambia en el tiempo porque no hay razones para que lo haga, una vez que entra en el medio gaseoso, empieza a afectarlo una fuerza de roce viscoso. $\vec{F} = -\gamma v^n\hat{i}$, en este caso, la velocidad esta solo en el eje x, y por lo tanto el roce viscoso apunta en la direccion negativa en el eje x. En el problema nos piden comparar los casos $n = 1$ y $n = 2$ y ver que ocurre con la particula en el tiempo.

Caso $n = 1$:

Para este problema utilizaremos coordenadas cartesianas porque el movimiento ocurre en una dimension y mas particularmente en una línea recta. Identificamos las fuerzas presentes, Tendremos el peso $F_g = -mg\hat{j}$ y una fuerza normal $F_n = N\hat{j}$, en el eje x, tendremos la fuerza de roce viscoso $F_r = -\gamma v\hat{i}$. No veo que hayan mas fuerzas presentes, tambien podemos notar que al aplicar la segunda ley de Newton en el eje y:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \sum F_y \\ m\ddot{y} &= N - mg \\ N &= mg \end{aligned}$$

Como la particula no se mueve en el eje y, tenemos que $\ddot{y} = 0$, de esta forma obtenemos que la normal es igual a mg, esto, no sirve para nada en el problema, y eso esta bien, el profesor gusta de poner gravedad en problemas donde no se utiliza luego en los calculos, no se distraigan, y si lo hacen, no se frustren, no siempre será necesaria c:.

Ahora poniéndonos serios, hagamos la suma de fuerzas en el eje x

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= \sum F_x \\
m\ddot{x} &= -\gamma v_x \\
m\ddot{x} &= -\gamma \dot{x}
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos una EDO que podemos resolver para $\dot{x}$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\gamma \dot{x} \\
\frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\gamma}{m}\dot{x} \\
\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} &= -\frac{\gamma}{m}\int_{t_o}^{t} dt \\
\ln \frac{\dot{x}}{v_o} &= -\frac{\gamma}{m}(t - t_o) \\
\frac{\dot{x}}{v_o} &= e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \\
\dot{x}(t) &= v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)}
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo para el caso $n = 1$, notamos que cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$. Con esto sabemos que al menos en el infinito, la partícula va a dejar de avanzar, pero eso queda lejos y a mi me gustaria saber concretamente hasta donde avanza, de manera que a partir de la ecuacion obtenida, calcularemos su posición.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \\
\frac{dx}{dt} &= v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \\
\int_{0}^{x} dx &= v_o \int_{t_o}^{t} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \\
x(t) &= v_o \frac{m}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)})
\end{aligned}
$$

Ahora podemos ver que cuando $t \to \infty \implies x \to \dfrac{v_o m}{\gamma}$ (En este problema asumimos que el gas comienza en $x = 0$, y que la particula pasa por ahi en $t = t_o$) De manera que vemos que la distancia que puede avanzar la particula frente a este tipo de roce viscoso esta acotada.

Caso $n = 2$:

Para este caso no haremos la suma en el eje y, es igual de inútil que en el caso anterior, partimos de inmediato con la segunda ley de Newton en el eje x.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\gamma \dot{x}^2 \\
\frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\gamma}{m}\dot{x}^2 \\
\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} &= -\frac{\gamma}{m}\int_{o}^{t} dt \\
\frac{1}{v_o} - \frac{1}{\dot{x}} &= -\frac{\gamma}{m}t \\
\frac{1}{\dot{x}} &= \frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t \\
\dot{x}(t) &= \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t}
\end{aligned}
$$

Ahora vemos que nuevamente cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$ Veremos que pasa con la posición.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \\
\int_0^x dx &= \int_0^t \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \\
x(t) &= \frac{m}{\gamma}(\ln\left(\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t\right) - \ln\frac{1}{v_o})
\end{aligned}
$$

Notamos que ahora cuando $t \to \infty \implies x \to \infty$ Es decir, la particula no deja de avanzar.

P2. En este problema veremos una fuerza un poco distinta, esto debido a que hable muy mal de las coordenadas cartesianas diciendo que las cilíndricas eran mejores porque las cosas no giraban, bueno esta fuerza hace que las cosas giren. Usaremos coordenadas cartesianas. Y la unica fuerza presente será $\vec{F} = B_o\hat{k}\times\vec{v}$, con $\vec{v}$ la velocidad de la partícula y B_o una constante. Diremos que la partícula parte desde el punto $\vec{r_o} = x_o\hat{i}+y_o\hat{j}$, con velocidad inicial $\vec{v_o}$, a priori en cualquier dirección.

Bueno, esa es como una transcripcion del enunciado, pero mas larga. Pongamonos a la obra: Como trabajaremos con cartesianas: $\vec{v} = \dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}`\dot{z}\hat{k}$ Esa es la velocidad mas arbitraria posible. de esta forma, la fuerza F sería.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= B_o\hat{k}\times\vec{v}\\ &= B_o\hat{k}\times\ (\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})\\ &= B_o\dot{x}\hat{j} - B_o\dot{y}\hat{i}\end{aligned}$$

Ahora que sabemos como escribir la fuerza, podemos escribir las ecuaciones de Newton

$$\begin{aligned}m\vec{a} &= \vec{F}\\ m\ddot{x} &= -B_o\dot{y}\\ m\ddot{y} &= B_o\dot{x}\end{aligned}$$

Ahora tenemos estas últimas dos ecuaciones que se ven muy interesantes, la idea es poder desacoplar el sistema, para eso multiplicaremos la ecuacion para el eje x por $\dot{x}$ y la ecuación para el eje y por $\dot{y}$, cuando digo, eje x o eje y me refiero a la que tiene la aceleración en ese eje. Si luego las sumamos obtenemos.

$$m\ddot{y}\dot{y} + m\ddot{x}\dot{x} = 0$$

Esta relación la podemos trabajar un poco mas, si probamos escribirla como una derivada temporal, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}\frac{d(\dot{y}^2)}{dt} + \frac{m}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dt} &= 0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2}\right) &= 0\end{aligned}$$

Que es la energia cinética !!!!!!!!!!! Yo lo encuentro muy interesante en verdad jaja. Tenemos entonces que existe una cantidad conservada que llamaré E.

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} = E$$

Ahora queremos encontrar la ecuación de movimiento y ahora tenemos una igualdad de la que podemos despejar v_x o v_y. Yo despejaré v_x.

$$\begin{aligned}\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} &= E \\ \dot{x} &= \left(\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2}\right)\end{aligned}$$

Ahora que tenemos una expresion para $\dot{x}$, lo podemos reemplzar en la ecuación de movimiento para el eje y.

$$\begin{aligned}m\ddot{y} &= B_o\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{B_o}{m}\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2} \\ \int\limits_{v_{oy}}^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2}} &= \frac{B_o}{m}\int\limits_0^t dt \\ \arcsin\frac{\dot{y}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} - \arcsin\frac{v_{oy}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} &= \frac{B_o}{m}t \\ \frac{\dot{y}\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} &= sin\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right) \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{2E}{m}}sin\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right)\end{aligned}$$

Con este resultado y la expresión para la energia podemos despejar $\dot{x}$, y obtendremos (no lo haré.)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right)$$

Ahora quiero resolver la ecuación para $\dot{y}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} sin\left(\frac{B_o}{m}t+\phi\right)\\
\int_{y_o}^{y} dy &= \sqrt{\frac{2E}{m}}\int_{0}^{t}\sin\frac{B_o}{m}t+\phi\\
y-y_o &= \sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{m}{B_o}(\cos\phi-\cos\frac{B_o}{m}t+\phi)
\end{aligned}
$$

Con esto faltaría hacer el mismo proceso (equivalente) para la ecuacion en x, y obtendríamos un seno. Entonces el movimiento es en un círculo !!. :o

P3. Este es un problema estándar, son problemas relativamente simples, pero que requieren que seamos ordenados y que indiquemos bien las fuerzas.

Tenemos una masa atada a una cuerda que en el otro extremo esta unida a una caja. Y tenemos que la caja desliza por la pendiente de angulo θ conocido, y hay un coeficiente de roce μ, así como presencia de gravedad. Para trabajar este problema bien es necesario hacer un DCL (no lo incluyo en la pauta todavía porque no se como hacerlo rápido, pero estará en la segunda edición y también lo haré en el auxiliar) . Algo importante para el problema es ver como se va a mover, por enunciado nos dicen que el ángulo ϕ es fijo, de manera que la Tensión siempre va a estar en la misma dirección mientras la caja de masa M esté cayendo.

Es importante tener claro en que ejes queremos trabajar, como en este problema hay dos ángulos, preferiré trabajar en el sistema cartesiano x, y, donde y apunta hacia arriba y x apunta hacia la izquierda. Si ahora escribimos las ecuaciones de Newton para la masa grande. Notamos que en ella actúa

- La fuerza Normal $\vec{F_N} = N(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$
- La fuerza de Roce $\vec{F_R} = N\mu(-\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$
- La Tensión de la cuerda $\vec{T} = T(-\sin\phi\hat{i} - \cos\phi\hat{j})$
- El peso de la caja $\vec{F_g} = -Mg\hat{j}$

Teniendo todas las fuerzas, podemos aplicar la segunda ley de Newton en el eje x y en el eje y

$$M\ddot{x} = N\sin\theta - N\mu\cos\theta - T\sin\phi$$
$$M\ddot{y} = N\cos\theta + N\mu\sin\theta - T\cos\phi$$

Ahora queremos hacer lo mismo para la masa que cuelga desde la cuerda, que siente las fuerzas

- Tensión $\vec{T} = T(\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j})$
- Peso $\vec{F_g} = -mg\hat{j}$

Así las ecuaciones de movimiento serían

$$m\ddot{x} = T\sin\phi$$
$$m\ddot{y} = T\cos\phi - mg$$

Notamos que en ambas ecuaciones no usé ningun sub o super-indice para referirme a $\ddot{x}$ o a $\ddot{y}$, esto porque como dice el enunciado, el sistema avanza con la pelota con un angulo ϕ fijo respecto a la vertical. Esto significa que la caja y la bolita se mueven juntas, por lo que su aceleración y velocidad serán las mismas.

Pero lo primero que nos piden es la Tensión, notamos que aparece en las ecuaciones de la bolita, pero nos molesta el $\ddot{x}$ y el $\ddot{y}$, por lo que tenemos que ver una forma de eliminarlos. Para eso usaremos la relación. $\frac{y}{-x} = \tan\theta$, esto porque estamos en ese plano inclinado, no nos interesa esa relación específicamente, pero si pasamos multiplicando el x y derivamos 2 veces respecto al tiempo, obtendremos

$$\ddot{y} = -\ddot{x}\tan\theta$$

Esta condición se debe cumplir porque los objetos encima del plano inclinado deben caer con el mismo ángulo.

Ahora tenemos las ecuaciones:

$$\ddot{x} = \frac{T}{m}\sin\phi$$
$$-m\ddot{x}\tan\theta = T\cos\phi - mg$$

Si combinamos ambas ecuaciones, obtendremos una expresión para la tensión:

$$-T\sin\phi\tan\theta = T\cos\phi - mg$$
$$T(\sin\phi\tan\theta + \cos\phi) = mg$$
$$T = \frac{mg}{\cos\phi + \sin\phi\tan\theta}$$

Ahora quiero obtener el ángulo ϕ, para eso necesito despejar $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ de las ecuaciones de movimiento de la caja, el problema es que si uso la misma relación voy a tener muchas relaciones trigonométricas y problemas. Así que lo que haré será tomar las ecuaciones de movimiento de la bolita y reemplazar $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en las ecuaciones de movimiento de la caja y obtener:

$$T\sin\phi\left(\frac{M}{m} + 1\right) = N(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$
$$T\cos\phi\left(\frac{M}{m} + 1\right) - Mg = N(\cos\theta + \mu\sin\theta) - Mg$$

Notamos que los Mg se cancelan, como queremos obtener el angulo y sabemos que ni la tensión ni la Normal son 0, podemos dividir la ecuación de arriba por la ecuación de abajo y obtener

$$\boxed{\tan\phi = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$$