Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Auxiliar 2

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: César Gallegos, Gabriel Cáceres y Mauricio Rojas

1 Problema 1 (A.14 de los ejercicios propuestos parte A en u-cursos)

Una partícula se mueve con rapidez constante v_0 a lo largo de la espiral $\rho = Ae^{k\theta}$. Determine:
a) vector velocidad en función de ρ y θ.
b) vector aceleración en función de ρ y θ.
c) demuestre que en todo instante el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad.
d) encuentre el ángulo θ y la velocidad angular en función del tiempo

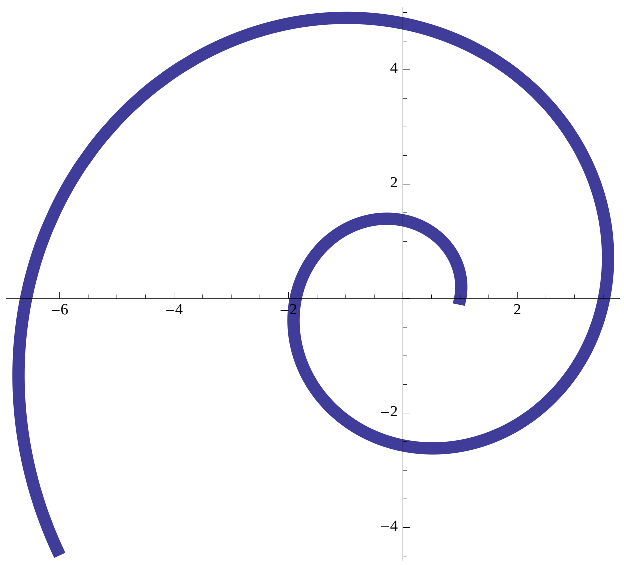

Figure 1: Una espiral $\rho = e^{0.2\theta}$.

Desarrollo

a) Considere el vector posición $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$, y ahora recordamos por lo visto en clase que al derivar el vector posición podemos obtener el vector velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} \ , \tag{1}$$

este resultado es el vector velocidad en función de ρ, $\dot{\rho}$ y $\dot{\theta}$, por lo tanto debemos trabajar el resultado para que sea sólo dependiente de ρ y θ. Por lo tanto, queremos deshacernos de los términos $\dot{\rho}$ y $\dot{\theta}$, así que vamos a escribir las ecuaciones que conocemos. Comencemos con la curva que recorre la partícula, que es

$$\rho = A\exp(k\theta) \ , \tag{2}$$

si la derivamos con respecto al tiempo

$$\dot{\rho} = Ak\exp(k\theta)\dot{\theta} \ , \tag{3}$$

con este resultado podemos deshacernos de la dependencia de $\dot{\rho}$ en la ecuación (1) y dejar todo dependiendo de ρ, θ y $\dot{\theta}$. Por lo tanto, nos falta deshacernos de la dependencia de $\dot{\theta}$, para hacer esto vamos a usar otra condición conocida. Prosigamos escribiendo la condición de que la partícula se mueve con velocida constante v_0, esto es

$$v_0 = |\vec{v}(t)| \ , \tag{4}$$

que es

$$v_0 = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \tag{5}$$

$$= \sqrt{(v_\rho \hat{\rho} + v_\theta \hat{\theta}) \cdot (v_\rho \hat{\rho} + v_\theta \hat{\theta})} \ , \tag{6}$$

en clases vimos que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}$, $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$. Por lo tanto, al reemplazar en la ecuación (6)

$$v_0 = \sqrt{v_\rho^2 \hat{\rho}\hat{\rho} + 2v_\rho v_\theta \hat{\rho}\hat{\theta} + v_\theta^2 \hat{\theta}\hat{\theta}} \ , \tag{7}$$

al hacer los productos punto, nos damos cuenta de que $\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = 1 = \hat{\theta}\hat{\theta}$, y $\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = 0$. Por lo tanto

$$v_0 = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} \ , \tag{8}$$

y al reemplazar con la ecuación (1) tenemos que

$$v_0 = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} \ . \tag{9}$$

Si en la expresión anterior reemplazamos con 2 y 3

$$v_0 = A \exp(k\theta)\dot{\theta}\sqrt{k^2+1} \ , \tag{10}$$

y al despejar $\dot{\theta}$, tenemos que

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A \exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \ . \tag{11}$$

Y con este resultado ya podemos deshacernos de la dependencia de $\dot{\theta}$, entonces reemplacemos las ecuaciones (3) y (11) en la ecuación (1)

$$\vec{v} = Ak \exp(k\theta) \frac{v_0}{A \exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \hat{\rho} + \rho \frac{v_0}{A \exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \hat{\theta} \tag{12}$$

$$= \frac{kv_0}{\sqrt{k^2+1}} \hat{\rho} + \rho \frac{v_0}{A \exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \hat{\theta} \tag{13}$$

y hemos obtenido un resultado que depende de ρ y θ para el vector velocidad.

b) Por lo visto en clases, el vector aceleración está dado por

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{14}$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} \ . \tag{15}$$

Dado que hemos calculado previamente $\dot{\theta}$ y tenemos una expresión para $\dot{\rho}$, debemos obtener $\ddot{\rho}$ y $\ddot{\theta}$. Por lo tanto, comencemos con $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta} \ , \tag{16}$$

reemplazamos con la ecuación (11)

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}\right) \tag{17}$$
$$= \frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}(-k\dot{\theta}) \tag{18}$$
$$= \dot{\theta}(-k\dot{\theta}) \tag{19}$$
$$= -k\dot{\theta}^2\ . \tag{20}$$

Y hemos obtenido una expresión para $\ddot{\theta}$. Ahora vamos a desarrollar $\ddot{\rho}$

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\dot{\rho} \tag{21}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(Ak\exp(k\theta)\dot{\theta}\right)\ , \tag{22}$$

se ha usado la ecuación (3) en la linea anterior. Ahora, desarrollemos la derivada en el tiempo

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\left(Ak\exp(k\theta)\dot{\theta}\right) \tag{23}$$
$$= Ak\exp(k\theta)\left[\ddot{\theta} + k\dot{\theta}^2\right]\ , \tag{24}$$

si reemplazamos en la expresión anterior con la ecuación (20), tenemos

$$\ddot{\rho} = Ak\exp(k\theta)\left[-k\dot{\theta}^2 + k\dot{\theta}^2\right] \tag{25}$$
$$= 0\ . \tag{26}$$

Ya que hemos obtenido expresiones para $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\rho}$, reemplacemos todo en la ecuación (15)

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{27}$$
$$= -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} - k\rho\dot{\theta}^2)\hat{\theta}\ , \tag{28}$$

ahora usemos las ecuaciones (3) y (11)

$$\vec{a} = -\rho\left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}\right)^2\hat{\rho} + \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}\right)^2(2Ak\exp(k\theta) - k\rho)\,\hat{\theta}\ , \tag{29}$$

y hemos obtenido el vector aceleración en función de ρ y θ.

c) Para saber si dos vectores son ortogonales lo que debemos hacer es calcular el producto punto y ver que sea cero. Pero antes de calcular el producto punto voy a simplificar las expresiones obtenidas. Comencemos por la ecuación (13)

$$\vec{v} = \frac{kv_0}{\sqrt{k^2+1}}\hat{\rho} + \rho\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}\hat{\theta} \tag{30}$$
$$= \frac{kv_0}{\sqrt{k^2+1}}\hat{\rho} + [A\exp(k\theta)]\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}}\hat{\theta} \tag{31}$$
$$= \frac{kv_0}{\sqrt{k^2+1}}\hat{\rho} + \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}}\hat{\theta} \tag{32}$$
$$= \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}}\left[k\hat{\rho} + \hat{\theta}\right]\ , \tag{33}$$

note que se ha usado la ecuación (2) para reemplazar ρ. Ahora simplifiquemos la ecuación (29) reemplazando los ρ con la ecuación (2)

$$\vec{a} = -\rho \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \right)^2 \hat{\rho} + \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \right)^2 (2Ak\exp(k\theta) - k\rho)\,\hat{\theta} \tag{34}$$

$$= -A\exp(k\theta) \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \right)^2 \hat{\rho} + \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \right)^2 (2Ak\exp(k\theta) - kA\exp(k\theta))\,\hat{\theta} \tag{35}$$

$$= -\frac{v_0^2}{A\exp(k\theta)(k^2+1)}\hat{\rho} + \left(\frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \right)^2 (Ak\exp(k\theta))\hat{\theta} \tag{36}$$

$$= \frac{v_0^2}{A\exp(k\theta)(k^2+1)} \left[-\hat{\rho} + k\hat{\theta} \right] \ . \tag{37}$$

Ahora que hemos obtenido expresiones simplificadas para $\vec{v}$ y $\vec{a}$, vamos a calcular el producto punto

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \left\{ \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}} \left[k\hat{\rho} + \hat{\theta} \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{v_0^2}{A\exp(k\theta)(k^2+1)} \left[-\hat{\rho} + k\hat{\theta} \right] \right\} \tag{38}$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}} \frac{v_0^2}{A\exp(k\theta)(k^2+1)} \left[k\hat{\rho} + \hat{\theta} \right] \cdot \left[-\hat{\rho} + k\hat{\theta} \right] \tag{39}$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}} \frac{v_0^2}{A\exp(k\theta)(k^2+1)} [-k+k] \tag{40}$$

$$= 0 \ . \tag{41}$$

Por lo tanto, son ortogonales

d) Para encontrar el ángulo θ en función del tiempo, vamos a usar la ecuación (11), que es

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{A\exp(k\theta)\sqrt{k^2+1}} \ , \tag{42}$$

ahora vamos a usar calculo diferencial para resolver esto. Primero dejemos todos los terminos dependientes de θ al lado izquierdo, y todo lo demás al lado derecho

$$\exp(k\theta)d\theta = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}dt \ , \tag{43}$$

integramos

$$\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t_1)} \exp(k\theta)d\theta = \int_{t_0}^{t_1} \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}dt \ , \tag{44}$$

y si para $t_0 = 0$, tenemos que $\theta(t_0) = 0$ entonces

$$\frac{\exp(k\theta(t_1)) - 1}{k} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}t_1 \ , \tag{45}$$

y si t_1 es un tiempo general ($t_1 = t$), entonces

$$\frac{\exp(k\theta(t)) - 1}{k} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}t \ , \tag{46}$$

y despejamos θ

$$\theta(t) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kv_0}{A\sqrt{k^2+1}}t + 1 \right) \ . \tag{47}$$

Para obtener la velocidad angular vamos a derivar en el tiempo

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{kv_0}{A\sqrt{k^2+1}}t + 1} \frac{kv_0}{A\sqrt{k^2+1}} \ . \tag{48}$$