



Auxiliar 6

Lunes 26 de Agosto.

P1. Considere una partícula que solo siente fuerza angular F_θ , en coordenadas polares:

i) $F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$.

ii) $F_\theta = 3m\dot{r}\dot{\theta}$.

Para cada caso, encuentre la trayectoria que sigue la partícula. En el caso de (ii), muestre que la partícula alcanza $r = \infty$ en un tiempo finito.

P2. Considere una curva cicloide, descrita por su ecuación paramétrica :

$$x(\theta) = r_0(\theta - \text{sen}(\theta))$$

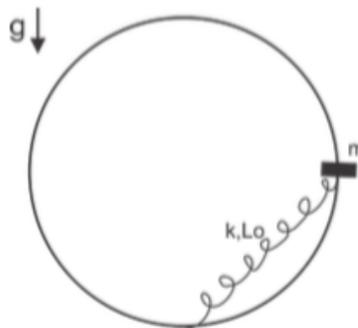
$$y(\theta) = r_0(1 - \text{cos}(\theta))$$

Demuestre que la curva es tautócrona. Esto significa que una partícula liberada desde el reposo sobre la superficie de la curva va a demorar siempre el mismo tiempo en llegar a su punto más bajo, independiente del lugar del que sea liberada.

Indicación: Puede ser útil considerar que la velocidad de una partícula que ha caído una altura δh desde el reposo es $v = \sqrt{2g\delta h}$.

P3. Considere una argolla de masa m que puede deslizarse, inserta en un aro de radio R en un ambiente con gravedad. A su vez la argolla está unida con el punto inferior del aro por un resorte de constante elástica k y largo natural l_0 . Considere que la argolla se encuentra inicialmente en reposo en el punto inferior del aro.

- Encuentre las ecuaciones de movimiento para la argolla.
- Expresar una ecuación que permita determinar la máxima altura que alcanza la argolla, para esto considere $l_0 = R$ y $k = \frac{mg}{R}$ (el resultado será $\theta^* = 1,0472[\text{rad}] \approx 60^\circ$).
- Determine si es posible que la fuerza sea nula.
- ¿Qué forma debería tener una nueva fuerza \vec{F} para que la expansión del resorte sea a velocidad constante?



P4. Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos A y B de la Tierra. La aceleración de gravedad (que apunta hacia el centro de la Tierra) al interior del túnel tiene una magnitud que es proporcional a la distancia r desde el centro de la Tierra:

$$|\vec{a}| = \frac{g}{R}r$$

donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y R es el radio de la Tierra. Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto A y se mueve sin roce en el interior del túnel, bajo el efecto de la gravedad, calcule:

- El tiempo que requiere para llegar al punto B, que está a una distancia R del punto A, en línea recta.
- La rapidez máxima del movimiento resultante.

