



## Principio Varacional

Miércoles 4 de Diciembre.

### P1. La distancia más corta en un plano

Muestre que el camino más corto entre 2 puntos de un plano es una línea recta.

### P2. Superficie Mínima

Una superficie de revolución tiene dos anillos paralelos en sus extremos, como indica la figura 1. Encuentre la forma de la curva  $y(x)$  para que al generar una superficie de revolución, esta tenga el área mínima posible.

### P3. La Braquistocrona

Un objeto se deja caer desde el reposo, en el origen y se desliza, sin roce y bajo el efecto de la gravedad, por el cable que conecta el origen con un punto dado, como se indica en la figura 2. Se le pide encontrar cual es la forma de la curva que permite al objeto llegar al punto dado en el menor tiempo. La curva esta descrita por la función  $y(x)$ , donde se toma el sentido positivo "hacia abajo". Muestre que  $y(x)$  satisface:

$$1 + y'^2 = \frac{B}{y}$$

Donde B es una constante. Además muestre que x e y se pueden escribir como:

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

Esta es la parametrización de una cicloide, el cual es el camino que sigue un punto de un cilindro que se traslada rodando por su manto. *Este fue el primer problema resuelto usando cálculo varacional.*

### P4. Existencia de una superficie mínima

Considere la superficie mínima del problema 2, pondremos especial atención en el caso donde ambos anillos tienen el mismo radio (vea figura 3). Sea  $2l$  la distancia entre los anillos. ¿Cuál es el máximo valor de  $1/r$  para que exista una superficie mínima?

(Hint: Deberá resolver algo numéricamente.)

### P5. Índice de Refracción

Suponga que la velocidad de la luz en una sección de de un material es proporcional a la altura sobre la base de la sección. Muestre que la luz se mueve en un arco circular como se indica en la figura 4. Debe suponer que la luz sigue el camino de mínimo tiempo entre 2 puntos (Principio de Fermat).

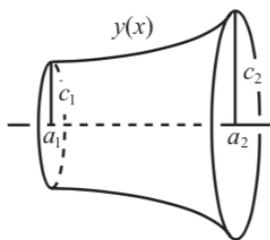


Figura 1

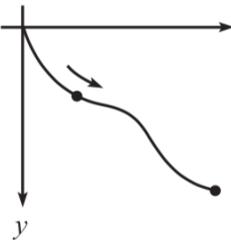


Figura 2

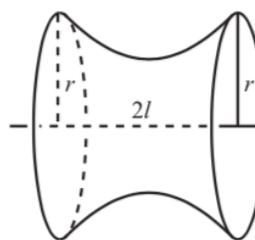


Figura 3

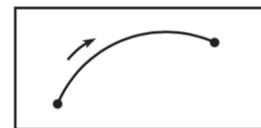


Figura 4