Auxiliar 11

Antes de resolver el ejercicio, es bueno tener un orden (o estrategia) para enfocar estos ejercicios. (SRNI)

↳ Paso 1: Definir los sistemas S y S' (quien es quien)

fijo ← S, S' → móvil

↳ Paso 2: Definir sistemas de coordenadas pertinentes para S y S'

↳ Paso 3: "Traducir" un sistema en el otro

↳ vectores unitarios de S' en función de los de S' (y viceversa)

↳ Paso 4: Determinar $\vec{r}\,'$, $\vec{v}\,'$ y $\vec{a}\,'$ → La masa (o punto a seguir) en el sistema S'

↳ Paso 5: Escribir las fuerzas reales

↳ Paso 6: Determinar $\vec{\Omega}_e$ y $\dot{\vec{\Omega}}_e$

↳ Paso 7: Determinar $\vec{a}$

↳ Paso 8: Calcular fuerzas inerciales en coord de S'.

↳ Paso 9: Escribir ec. de mov. y ec. escalares.

↳ Paso 10: Resuelva el ejercicio.

Auxilior 11

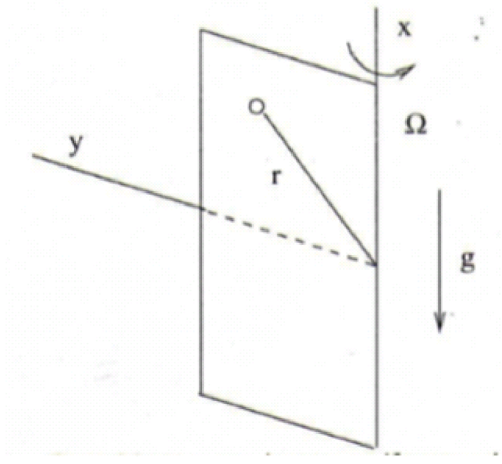
P1

Una partícula de masa m está restringida a moverse sobre un plano vertical sin roce que rota con velocidad angular Ω sobre un eje vertical. La partícula se mueve en presencia de la gravedad terrestre.

a) Escriba las ecuaciones de movimiento para la partícula en el sistema solidario al plano.

b) Integre las ecuaciones de movimiento y encuentre el valor de las constantes de integración suponiendo que la partícula parte del reposo, en el punto (x_0, y_0) al tiempo $t = 0$.

c) Calcule el valor de la fuerza normal al plano.



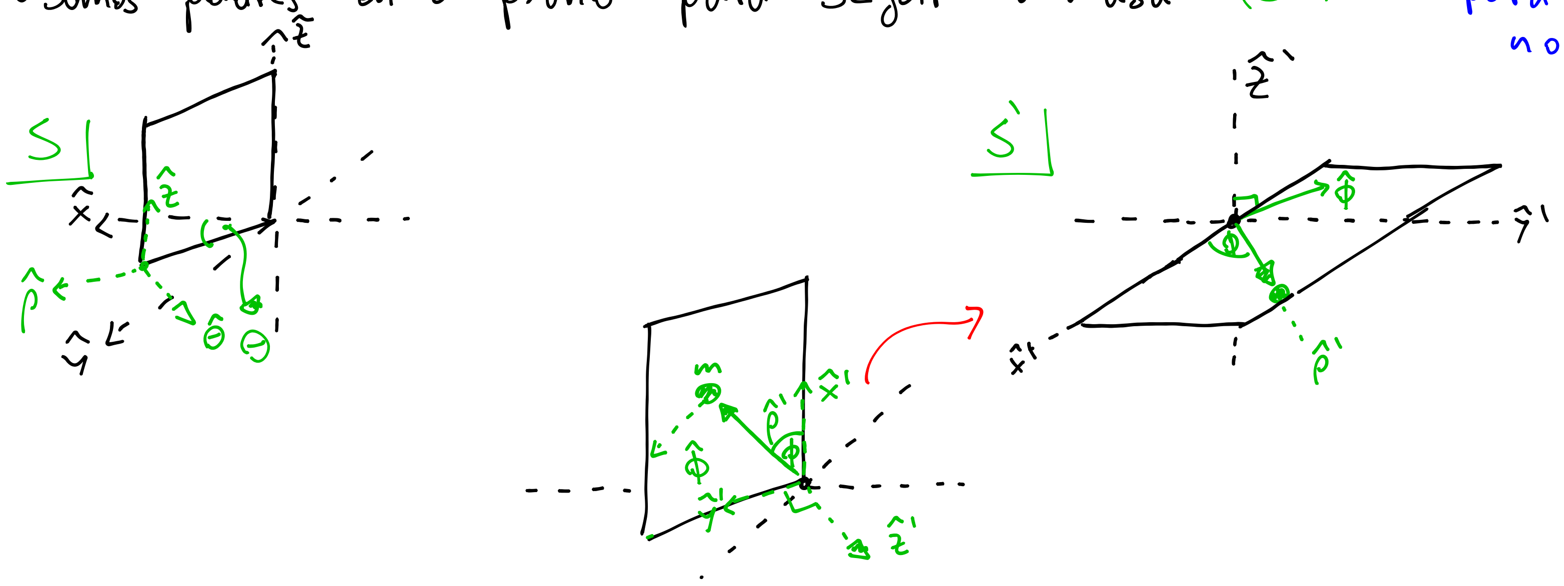
a) Escriba las ecuaciones de movimiento para la partícula en el sistema solidario al plano.

Como vimos antes, lo primero que debemos hacer es definir los sistemas S (fijo) y S' (movil)

Paso 1 y 2 :

- Usamos polares para seguir el plano que rota (S)
- Usamos polares en el plano para seguir la masa (S')

Cambiamos x de la figura por z para seguir con la notación usual.



Paso 3 :

Ahora tenemos que traducir las coordenadas de S' en S

↳ Dada la construcción de las coordenadas que elegimos tenemos que fijando unos cartesianos como referencia en la placa $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$

$$\rightarrow \quad \hat{\rho}' = \hat{x}'\cos(\phi) + \hat{y}'\sin(\phi), \quad \hat{\phi} = -\hat{x}'\sin(\phi) + \hat{y}'\cos(\phi), \quad \hat{z}' = \hat{z}$$

Tenemos que $\hat{x}' = \hat{z}$, $\hat{y}' = \hat{\rho}$, $\hat{z}' = \hat{\theta}$ } sistema S cilíndricos

$$\boxed{\rightarrow \text{S' c/r S} \rightsquigarrow \begin{cases} \hat{\rho}' = \hat{z}\cos(\phi) + \hat{\rho}\sin(\phi) \\ \hat{\phi} = -\hat{z}\sin(\phi) + \hat{\rho}\cos(\phi) \\ \hat{z}' = \hat{\theta} \end{cases} = \begin{cases} \hat{\rho} = \hat{\rho}'\sin(\phi) + \hat{\phi}\cos(\phi) \\ \hat{\theta} = \hat{z}' \\ \hat{z} = \hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\sin(\phi) \end{cases} \rightarrow \text{S c/r S'}}$$

Ahora podemos calcular las derivadas de los vectores unitarios según cada sistema.

↳ $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ NO cambia con respecto a S.
↳ $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ No cambia con respecto a S'.

↳ $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ cambia de la forma usual c/r a S $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{\rho}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{\rho} \\ \dot{\hat{z}} = 0 \end{cases}$
↳ $\{\hat{\rho}', \hat{\phi}', \hat{z}'\}$ cambia de la forma usual c/r a S' ↳ $\begin{cases} \dot{\hat{\rho}}' = \dot{\phi}\hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho}' \\ \dot{\hat{z}}' = 0 \end{cases}$

Lo ultimo lo escribimos de manera mas compacta como:

$$\left(\frac{d}{dt}\hat\rho\right)_S = \dot\theta\,\hat\theta$$

$$\left(\frac{d}{dt}\hat\rho'\right)_{S'} = \dot\phi\,\hat\phi$$

$$\longrightarrow \left(\frac{d}{dt}\hat\rho'\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\left[\hat z\cos(\phi) + \hat\rho\,\mathrm{sen}(\phi)\right]\right)_S$$

sin ( )'

$$= -\hat z\,\mathrm{sen}(\phi)\,\dot\phi + \dot\theta\,\hat\theta\,\mathrm{sen}(\phi) + \hat\rho\cos(\phi)\,\dot\phi$$

$$= \dot\phi\left(-\hat z\,\mathrm{sen}(\phi) + \hat\rho\cos(\phi)\right) + \dot\theta\,\hat\theta\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\hat\rho' = \hat z\cos(\phi) + \hat\rho\,\mathrm{sen}(\phi)$$
$$\hat\phi = -\hat z\,\mathrm{sen}(\phi) + \hat\rho\cos(\phi)$$
$$\hat z' = \hat\theta$$

$$= \dot\phi\,(\hat\phi) + \dot\theta\,\hat\theta\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\hat\rho'\right)_{S'} + \underbrace{\dot\theta\,\hat\theta\,\mathrm{sen}(\phi)}_{(?)}$$

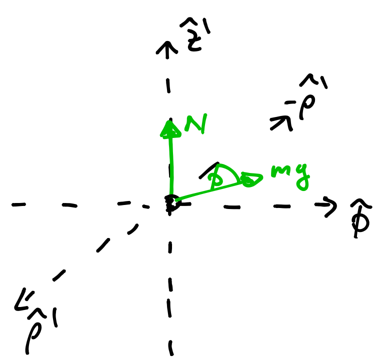
Paso 4:

$$\vec r' = r\,\hat\rho'$$ (la pos. de la masa con respecto a S')

$$\hookrightarrow \vec v' = \dot r\,\hat\rho' + r\left(\frac{d}{dt}\hat\rho'\right)_{S'} = \dot r\,\hat\rho' + r\,\dot\phi\,\hat\phi$$

$$\hookrightarrow \vec a' = \ddot r\,\hat\rho' + 2\dot r\,\dot\phi\,\hat\phi + r\,\ddot\phi\,\hat\phi - r\,\dot\phi^2\,\hat\rho'$$
$$= \hat\rho'\left(\ddot r - r\,\dot\phi^2\right) + \hat\phi\left(2\dot r\,\dot\phi + r\,\ddot\phi\right)$$

Paso 5: (DCL en S')



$$\Rightarrow \sum \vec F_{real} = N\,\hat z' + mg\left(\hat\phi\,\mathrm{sen}(\phi) - \hat\rho'\cos(\phi)\right)$$

Paso 6: $\vec\Omega_e$ y $\dot{\vec\Omega}_e$ $\longrightarrow$ S' gira en torno a S a vel. Ω const.

$\hookrightarrow \Omega\,\hat z$

$\hookrightarrow$ $\hat y'(=\hat\rho)$ gira con vel. angular Ω en torno a $\hat x$ $\rightarrow$ $\boxed{\Omega = \dot\theta}$ = cte !!

$$\hookrightarrow \vec\Omega_e = \Omega\,\hat z = \dot\theta\,\hat z$$
$$= \dot\theta\,\hat x'$$
$$= \dot\theta\left(\hat\rho'\cos(\phi) - \hat\phi\,\mathrm{sen}(\phi)\right)$$

Nos interesa tener todo en S'

$$\Rightarrow \vec\Omega_e = \dot\theta\left(\hat\rho'\cos(\phi) - \hat\phi\,\mathrm{sen}(\phi)\right)$$

$$\hookrightarrow \dot{\vec\Omega}_e = \dot\theta\left(\dot\phi\,\hat\phi\cos(\phi) - \hat\rho'\,\mathrm{sen}(\phi)\,\dot\phi + \dot\phi\,\hat\rho'\,\mathrm{sen}(\phi) - \hat\phi\cos(\phi)\,\dot\phi\right)$$
$$= 0 \;!!$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec\Omega}_e = 0}$$ $\longrightarrow$ vemos que tambien se podia calcular $\dot{\vec\Omega}_e = \left(\frac{d}{dt}(\dot\theta\,\hat z)\right)_S + \vec\Omega_e \times \vec\Omega_e = 0$

Paso 7: $\vec a$ de un sistema a otro ($\vec A_o$)

Para este caso el vector ($\vec R$) que une el origen de S con el de S' es:

$$\rightarrow \vec R = 0$$
$$\Rightarrow \dot{\vec R} = 0$$
$$\ddot{\vec R} = 0 = \vec A_o$$

Para un caso en que $\vec R \neq 0$ lo conveniente es escribir $\vec R$ en S y, con eso calcular $\dot{\vec R} = \vec V_o$ y $\ddot{\vec R} = A_o$, y solo transformar $\vec A_o$ en S'.

Paso 8: (Pseudo-Fuerzas)

Recordamos la expresión general: $m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{- m\vec{A}_o - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - 2m(\vec{\Omega}_e \times \vec{v}') - m(\dot{\vec{\Omega}}_e \times \vec{r}')}_{\text{Pseudo-Fuerzas.}}$

Calculemos 1 por 1.

•) $-m\vec{A}_o = 0$ $\qquad \vec{\Omega}_e = \dot{\theta}\left(\hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)\right)$

•) $-m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') = -m\Omega\left(\hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)\right) \times \left[\Omega\left(\hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)\right) \times r\hat{\rho}'\right]$

$= -m\Omega^2 r\left(\hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)\right) \times \left[\underbrace{\cancel{\hat{\rho}' \times \hat{\rho}'}}_{0}\cos(\phi) - \underbrace{\hat{\phi} \times \hat{\rho}'}_{-\hat{z}'}\mathrm{sen}(\phi)\right]$

$= -m\Omega^2 r\,\mathrm{sen}(\phi)\left(\hat{\rho}' \times \hat{z}'\cos(\phi) - \hat{\phi} \times \hat{z}'\,\mathrm{sen}(\phi)\right) = -m\Omega^2 r\,\mathrm{sen}(\phi)\left(-\hat{\phi}\cos(\phi) - \hat{\rho}'\,\mathrm{sen}(\phi)\right)$

•) $-2m(\vec{\Omega}_e \times \vec{v}') = -2m\Omega\left(\hat{\rho}'\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)\right) \times \left(\dot{r}\hat{\rho}' + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right)$ (=0; =0)

$= -2m\Omega\left[r\dot{\phi}\,\underbrace{\hat{\rho}' \times \hat{\phi}}_{\hat{z}'}\cos(\phi) - \dot{r}\,\underbrace{\hat{\phi} \times \hat{\rho}'}_{-\hat{z}'}\mathrm{sen}(\phi)\right]$

$= -2m\Omega\left(r\dot{\phi}\cos(\phi) - \dot{r}\,\mathrm{sen}(\phi)\right)\hat{z}'$

•) $-m\dot{\vec{\Omega}}_e \times \vec{r}' = -m(0) \times \vec{r}' = \vec{0}$

Paso 9: Ec. de mov y ecs. escalares.

$\hat{x}' = \hat{\rho}\cos(\phi) - \hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi)$
$\hat{y}' = \hat{\rho}\,\mathrm{sen}(\phi) + \hat{\phi}\cos(\phi)$

Ahora juntamos todos los terminos de la ecuación anterior

$\Rightarrow m\vec{a}' = \hat{\rho}'\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) + \hat{\phi}\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)$

$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega\hat{x}'$ $\qquad \Omega \times (\dot{x}\hat{x}' + \dot{y}\hat{y}') = \Omega\dot{y}\hat{z}'$

$= N\hat{z}' + mg\underbrace{\left(\hat{\phi}\,\mathrm{sen}(\phi) - \hat{\rho}'\cos(\phi)\right)}_{-\hat{x}'} - \vec{0} + m\Omega^2 r\,\mathrm{sen}(\phi)\overbrace{\left(+\hat{\phi}\cos(\phi) + \hat{\rho}'\,\mathrm{sen}(\phi)\right)}^{+\hat{y}'} - 2m\Omega\left(r\dot{\phi}\cos(\phi) - \dot{r}\,\mathrm{sen}(\phi)\right)\hat{z}' + \vec{0}$

Por componentes

•) $\hat{\rho}'\,|\; m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = -mg\cos(\phi) + m\Omega^2 r\,\mathrm{sen}^2(\phi)$

•) $\hat{\phi}\,|\; m\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right) = mg\,\mathrm{sen}(\phi) + m\Omega^2 r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right)$

•) $\hat{z}'\,|\; m(0) = +N - 2m\Omega\left(r\dot{\phi}\cos(\phi) - \dot{r}\,\mathrm{sen}(\phi)\right)$

a) Escriba las ecuaciones de movimiento para la partícula en el sistema solidario al plano

Oh wait! ya lo hicimos ✓✓

b) Integre las ecuaciones de mov. y encuentre el valor de las constantes de integración suponiendo que la partícula parte del reposo, en el punto x_o, y_o al tiempo $t=0$

Ahora vemos que al intentar integrar las ecuaciones con los métodos usuales, se ve medio difícil. Pero si nos damos cuenta de que la ecuación de mov. se ve mejor en las cartesianas $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ tenemos:

$m(\ddot{x}\hat{x}' + \ddot{y}\hat{y}') = N\hat{z}' + mg(-\hat{x}') - m(\Omega\hat{x}') \times \left[\overbrace{(\Omega\hat{x}') \times (x\hat{x}' + y\hat{y}')}^{y\Omega\hat{z}'}\right] - 2m(\Omega\hat{x}') \times (\dot{x}\hat{x}' + \dot{y}\hat{y}')$

$= N\hat{z}' - mg\,\hat{x}' + m\Omega^2 y\,\hat{y}' - 2m\Omega\dot{y}\,\hat{z}'$

$\hat{x}'\,|\; \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}g \xrightarrow{\int()dt} \dot{x}(t) - \underbrace{\cancel{\dot{x}(0)}}_{0 \text{ c.i.}} = -g(t-0) \xrightarrow{\int()dt} x(t) - \underbrace{x(0)}_{x_o} = -\frac{g}{2}(t^2 - 0) \Rightarrow \boxed{x(t) = x_o - \frac{g}{2}t^2}$

$\hat{y}'\,|\; \cancel{m}\ddot{y} = \cancel{m}\Omega^2 y \rightsquigarrow \ddot{y} - \Omega^2 y = 0 \xrightarrow{\text{Esto conocido}} y(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$, $\quad y(0) = y_o \Rightarrow A + B = y_o$
$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow A\Omega - B\Omega = 0$

$\hat{z}'\,|\; 0 = N - 2m\Omega\dot{y}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{y_o}{2}\left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}\right) = \boxed{y_o\cosh(\Omega t) = y(t)}$

c) Calcule el valor de la fuerza normal al plano

Tomando la ecuación en $(\hat{z})$ $\rightsquigarrow$ $N = 2m\Omega\,\dot{y}$

$= 2m\Omega\,(y_0\Omega \,\mathrm{senh}(\Omega t))$

$\rightarrow \boxed{N = 2m\Omega^2 y_0 \,\mathrm{senh}(\Omega t)}$