

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 29 de noviembre de 2019

Índice general

I.	RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA	3
I.1.	Origen de la Relatividad Especial.	3
I.1.1.	Las Ondas y su Medio de Propagación	3
I.1.2.	Las Propiedades de la Luz y la Propuesta de la Existencia del Éter	4
I.2.	Los Postulados de Einstein y el Nuevo Protocolo para las Mediciones.	6
I.3.	Diagramas Espacio-Tiempo	12
I.4.	La Idea de Simultaneidad	15
I.4.1.	El Problema del Tiempo	15
I.4.2.	Simultaneidad Absoluta	16
I.4.3.	Sincronización de relojes: La velocidad de la luz es finita	19
I.4.4.	Simultaneidad: Dos Observadores en Movimiento Relativo.	21
I.5.	La Contracción del Largo	23
I.5.1.	La Aparente Contracción del Largo de una Barra en Movimiento Relativo	24
I.6.	La Dilatación del Tiempo	27
I.7.	Postulados de la Relatividad Especial	35
I.8.	Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.	38
I.8.1.	Transformaciones de Lorentz	38
I.8.2.	El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein	41
I.9.	Composición de Velocidades	45
I.9.1.	Velocidades Paralelas.	46
I.10.	El Efecto Doppler Relativista	52
I.11.	Ejercicios Resueltos	61
I.12.	Ejercicios Propuestos	72

Capítulo I

RELATIVIDAD ESPECIAL: CINEMÁTICA

I.1. Origen de la Relatividad Especial.

I.1.1. Las Ondas y su Medio de Propagación

A continuación describiremos cómo surgió la necesidad de introducir la idea acerca de la existencia de un elemento invisible que se denominó éter.

Tiene su origen en el valor de la velocidad de la luz en sistemas inerciales en movimiento relativo.

Una onda es una perturbación propagándose en un cierto medio. Cada punto oscila sin desplazarse y de alguna forma arrastra a su vecino. La oscilación puede ser en la dirección de propagación de la perturbación (como en el caso del sonido) y se las denomina longitudinales. Si la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación (como en el caso de una cuerda o la luz), éstas se denominan oscilaciones transversales. Ilustraremos estas definiciones a continuación.

Por ejemplo, el sonido es una onda propagándose a través del aire. Note que en el tubo de la figura I.1, las moléculas del gas oscilan en torno a su posición y en la dirección de propagación del sonido. El receptor se informa por el cambio de presión en el elemento de volumen de gas en su vecindad. No hay transporte de materia desde la fuente hasta el receptor.

El sonido es una onda longitudinal, se propaga en la dirección de propagación de las compresiones en el gas.

Al mover el extremo de una cuerda subiéndola y bajándola, vemos que aparece un onda propagándose. Los pequeños tramos de cuerda se desplazan en una dirección perpendicular a la dirección que se traslada la onda. Vibran alrededor de la posición horizontal de la cuerda.

Una piedra lanzada en una poza genera un tren de ondas propagándose en círculos visibles sobre



Figura I.1: *Propagación del sonido en un tubo. Las zonas de alta densidad (las más oscuras) corresponden a la mayor presión. Esta sobre-densidad se propaga hacia la derecha reemplazando a las zonas de densidad más baja. El volumen en cada tramo del tubo se comprime y descomprime pero las partículas de gas NO se trasladan hacia la derecha. la energía se traslada, no las partículas.*

la superficie del agua.

El punto que nos interesa destacar, es la necesidad que exista un medio a través del cual la perturbación se propague. Sin un medio de propagación NO hay sonido. No hay sonido en el vacío. En la Luna los astronautas se debían comunicar mediante ondas electromagnéticas aunque estuvieran a centímetros de distancia.

Las ondas transversales en el agua, necesitan un medio donde propagares. Lo mismo ocurre en la cuerda.

Una demostración de la diferencia entre ambos modos aparece en el video ¹

A partir de estos ejemplos de la vida diaria Es natural considerar que cualquier vibración requiere de un medio para propagarse.

I.1.2. Las Propiedades de la Luz y la Propuesta de la Existencia del Éter

En 1831 era conocido que una corriente eléctrica generaba un campo magnético. En 1862 J. C. Maxwell pensó que el proceso inverso también debía ser correcto: El cambio de un campo magnético debería generar un campo eléctrico. Para ello añadió un término a las ecuaciones que generaba este efecto. Junto con ello, descubrió que estas nuevas ecuaciones aceptaban una solución del tipo de ondas propagándose. Cuando calculó la velocidad de esta onda, usando solo datos obtenidos directamente de experimentos con electricidad y magnetismo, descubrió que el valor numérico obtenido era muy similar al valor de la velocidad de la luz, que provenía de experimentos que no tenían vinculación alguna con las ecuaciones propuestas por Maxwell. Esto no pasó desapercibido al genio de Maxwell y en 1862 propuso que la luz era efectivamente una onda electromagnética:

¹<http://www.youtube.com/watch?v=whlz95jX3pk&NR=1>



Figura I.2: Ejemplos de ondas transversales. <http://www.physics.isu.edu/hackmart/waves100.pdf>

un campo eléctrico y magnético se propagaban en forma sinusoidal. Esta propuesta fue confirmada experimentalmente más tarde ².

Sin embargo, lo que es relevante para la relatividad especial, es que las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio para propagarse. Lo pueden hacer en el vacío.

A esta altura y con los datos acerca de las ondas presentadas anteriormente, parece natural entonces invocar un medio: el **éter** en el cual se propaguen las ondas electromagnéticas. Es el peso de la tradición el que opera acá. Su único objetivo era servir de soporte para que las ondas electromagnéticas se propagaran en el vacío. Era el equivalente de lo que el agua proporciona a una onda transversal que se propaga a través de ella.

A finales del siglo XIX, la teoría del éter era ampliamente aceptada. Se suponía que el éter penetraba todos los cuerpos y representaba un sistema de referencia universalmente inmóvil. No era arrastrado por los cuerpos que se movían inmersos en este éter. Tenía el carácter de lo absoluto.

De acuerdo a esta teoría, la velocidad de la luz en el vacío es igual a c sólo en el sistema de referencia del éter. En cualquier otro sistema de referencia dotado de una cierta velocidad con respecto al éter, la velocidad de la luz se obtenía sumando (o restando, de acuerdo a la circunstancia) la velocidad de la luz a la del sistema. Esto se visualizaba a menudo como el viento del éter: la onda de la luz parecía tener una velocidad ($c \pm v$) al ser medida por la fuente en movimiento con respecto al éter. Por ejemplo, en la onda transversal viajando en la cuerda, si Ud. viaja a esa misma velocidad verá la protuberancia en reposo con respecto a su referencia.

Hasta esa fecha la existencia del éter no estaba probada. De existir, abría la posibilidad de medir la velocidad del movimiento orbital de la tierra alrededor del Sol, mediante un rayo de luz viajando a favor de la velocidad orbital de la Tierra y compararla con la velocidad de la luz viajando en oposición a la velocidad orbital de la Tierra.

Un sinnúmero de experimentos se realizaron para demostrar la existencia del éter. El más conocido es el realizado por Michelson y Morley (1881-1887) que se propuso demostrar la existencia

²<http://www.michaelbeeson.com/interests/GreatMoments/MaxwellDiscoversLightIsElectromagnetic.pdf>

del éter midiendo la velocidad de la luz a partir de rayos viajando a favor y en contra de la velocidad orbital de la Tierra. En retrospectiva, éste parece ser el único que definitivamente descartó la teoría del éter.

Sin embargo, Michelson creía fervientemente en la existencia del éter y, hasta el final de sus días, se cuestionó en qué podría haber fallado su procedimiento que impidió demostrar la existencia del éter. Nunca creyó en el resultado obtenido.

Por el contrario, Einstein postuló que la velocidad de la luz era una constante universal, la misma para todos los sistemas inerciales. Einstein no se basó en el resultado del experimento de Michelson-Morley.

Un video (en inglés) con esta historia aparece en el episodio 41 de la referencia citada al pie de página³.

Para conocer la vida de Michelson, el primer norteamericano en ganar el Premio Nobel, ver ⁴

I.2. Los Postulados de Einstein y el Nuevo Protocolo para las Mediciones.

La idea predominante en los tiempos de Einstein era la existencia de un éter, omnipresente, inamovible e inalterado por el movimiento de otros cuerpos y con un tiempo absoluto. La luz se propagaba con velocidad c en este medio intangible. En otros sistemas de referencia, en movimiento uniforme con respecto al éter, la velocidad debería cambiar apropiadamente.

En la mecánica inventada por Newton, el tiempo y la posición en un sistema de referencia inercial se relaciona con la posición y el tiempo en otro sistema inercial que se desplaza con una velocidad uniforme con respecto al anterior están dadas por las transformaciones de Galileo.

$$\text{Transformación de Galileo} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + u \cdot t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

De acuerdo al Principio de Superposición de Galileo, revisado en el Capítulo de Cinemática, si la velocidad de la luz es c en un sistema de referencia inercial, en otro con velocidad relativa u con respecto al anterior, la luz debería propagarse con velocidad $(c - u)$, como se indica en la Figura I.3.

³<https://www.youtube.com/watch?v=IpjdcA8fcw> Episode 41: The Michelson-Morley Experiment, in the Mechanical Universe

⁴<http://www.juliantrubin.com/bigten/michelsonmorley.html>

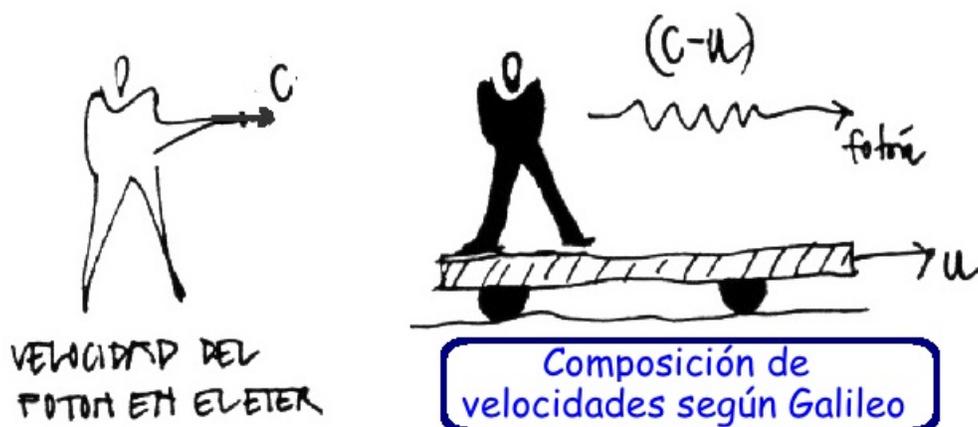


Figura I.3: De acuerdo a la ley de composición de velocidades de Galileo, un destello de luz (o fotón) lanzado por un observador en reposo absoluto tiene una velocidad c . Si su velocidad es medida por otro observador que se mueve con velocidad u con respecto al anterior, la velocidad del destello (o fotón) debería ser $(c - u)$.

La ley de composición de velocidades de Galileo NO es compatible con constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales propuesto por Einstein.

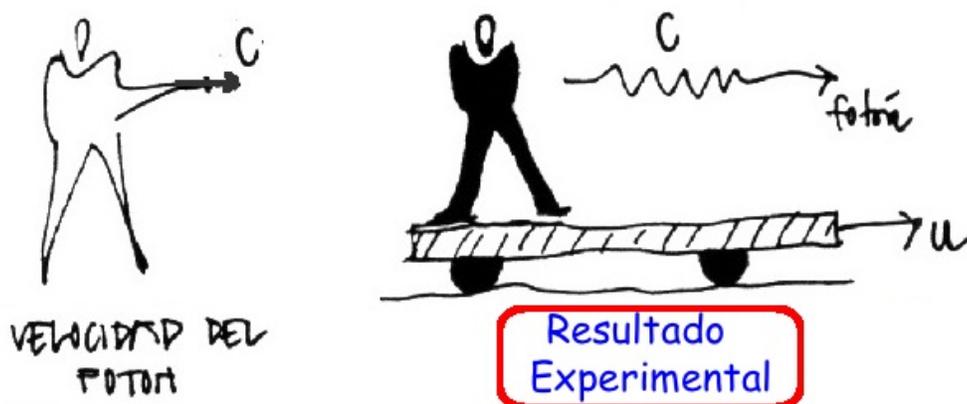


Figura I.4: Michelson y Morley usando un interferómetro, instrumento de su invención, no lograron encontrar un cambio en la velocidad de la luz relativa al movimiento orbital de la Tierra. En su informe, afirmaron que si existía un cambio en la velocidad de la luz, éste era menor que la resolución de su interferómetro, que era el instrumento más preciso de su época para realizar una medición de esta naturaleza.

En uno de los postulados propuesto por Einstein, mantiene la equivalencia de los sistemas inerciales tal como lo estableció Galileo. Esto se traduce en que no existe un experimento físico que

logre distinguir un sistema inercial de otro.

Einstein también postuló que la velocidad de la luz es **una constante universal**. Con esto ya no se requiere de un medio como el éter para que la luz se propague. Simplemente, cada observador inercial debe medir el valor c para la velocidad de la luz.

¿Cómo se logra esto? ¿Cómo es posible medir el mismo valor c para la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia inerciales? A. H. Lorentz, un prestigioso físico holandés que trabajaba en este tema, descubrió que existía una transformación de coordenadas para ir de un sistema inercial a otro mantenían la velocidad de la luz constante y con el mismo valor en diferentes sistemas inerciales en movimiento relativo uniforme. Más aún, cuando la velocidad relativa era pequeña con respecto al valor de la velocidad de la luz c , se volvía a las transformaciones propuestas por Galileo [I.1].

Por ejemplo, si en un sistema de referencia inercial la luz viaja entre el punto **Q** y **P** en el intervalo Δt medido en el sistema que nosotros dibujamos en reposo (ver Figura I.5). Con $\Delta x \equiv [x_P - x_Q]$, entonces $\Delta x / \Delta t = c$.

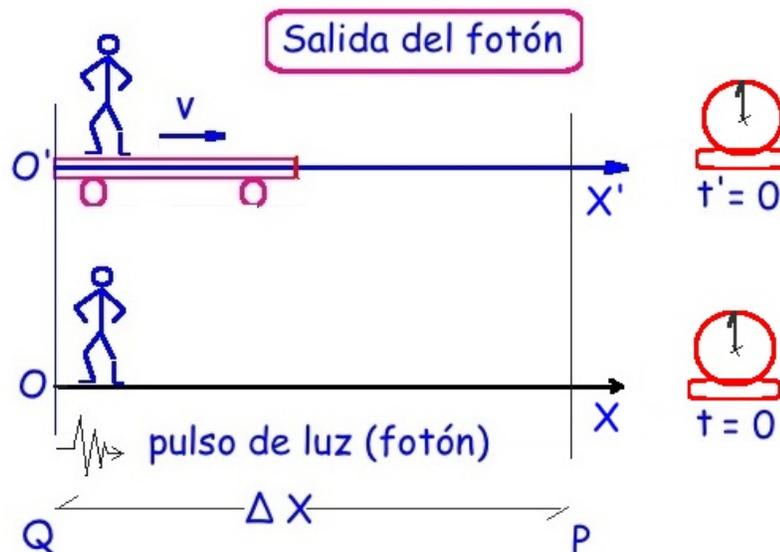


Figura I.5: Salida del pulso de luz (fotón). Cuando se dispara el fotón, el origen de ambos sistemas de referencia coinciden en el instante $t = 0 = t'$. De acuerdo al postulado de Einstein, ambos observadores miden el mismo valor para la velocidad de la luz c . La coordenada del punto de llegada es x_P y x'_P en el sistema inercial en movimiento.

Si evaluamos las coordenadas de los puntos **Q** y **P** en el sistema en movimiento relativo con velocidad V , manteniendo el mismo orden de los puntos, debemos obtener $\Delta x' / \Delta t' = c$, donde el valor de la coordenada x' corresponde al punto **P**, evaluado en el sistema en movimiento (ver I.6). Note que el tiempo también debe depender del sistema de referencia para mantener c constante en ambos sistemas. El tiempo no transcurre igual en ambos sistemas como ocurría en las

transformaciones de Galileo [I.1].

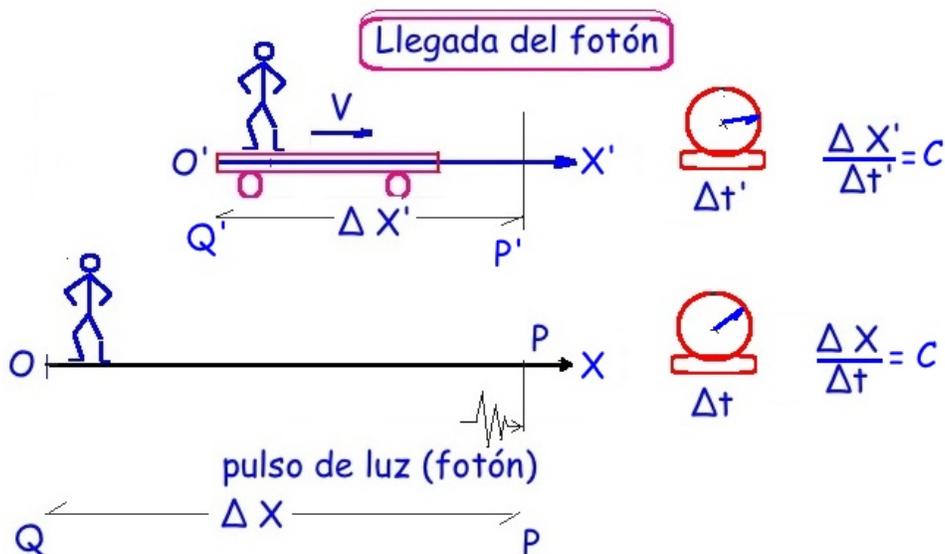


Figura I.6: Llegada del fotón al punto P. Según el observador en reposo, el fotón ha recorrido una distancia igual a Δx en un tiempo Δt . Para el observador en movimiento S' , la distancia recorrida es $\Delta x'$ medida, como se señala en la figura. El tiempo empleado es $\Delta t'$. Como mostraremos más adelante, el tiempo transcurre en forma diferente en cada sistema. Las coordenadas deben cumplir la condición: $\Delta x'/\Delta t' = c = \Delta x/\Delta t$.

Las ecuaciones que cumplen con esta condición, descubiertas por A. H. Lorentz, antes que lo hiciera Einstein, llevan su nombre. Las incluimos a continuación sin deducirlas. Lo haremos más adelante. Las transformaciones de Lorentz para un movimiento unidimensional como el ilustrado en las figuras I.5, y I.6, son

$$ct' = \frac{ct - \frac{Vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{I.2}$$

donde ct' y x' indican las coordenadas de un evento en el sistema de referencia del observador S' (aquél en movimiento) y las sin prima las coordenadas del mismo evento evaluado en S .

La luz adquiere un nivel superior, es una constante universal. De este modo la pregunta no es cómo se propaga sino, cómo se deben cambiar las transformaciones de coordenadas entre ambos sistemas para que cada observador inercial le adjudique el mismo valor c en su sistema de referencia. Esto debe ser independiente de la velocidad relativa (menor que la velocidad de la luz) entre ambos sistemas.

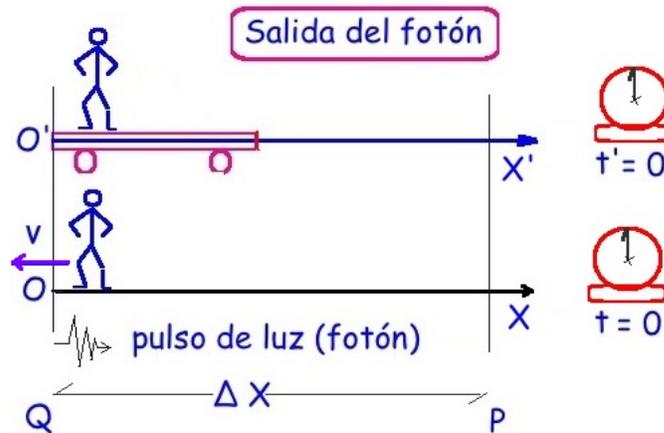


Figura I.7: Salida del pulso de luz (fotón). Conviene resaltar que lo mismo ocurre si nos ubicamos en el sistema S' y observamos que el sistema S se desplaza con la misma rapidez pero en sentido opuesto. La velocidad de la luz sigue siendo c . La velocidad de la luz NO depende de la velocidad de la fuente.

Ejemplo

No hemos explicado cómo obtener las transformaciones de Lorentz [I.2], pero podemos estudiar sus propiedades algebraicas y comenzar a familiarizarnos con ellas, ya que son las mismas encontradas posteriormente por Einstein.

a.- Verifique que las dimensiones de las transformaciones de Lorentz desplegadas en [I.2] son las correctas.

b.- Muestre que en el límite de $c \gg v$, las transformaciones de Lorentz tienen como límite las transformaciones de Galileo [I.1]. Debemos imponer que $v/c \rightarrow 0$.

c.- Demuestre que usando las transformaciones de Lorentz se verifica que $\Delta x'/\Delta t' = c = \Delta x/\Delta t$. Note que la coordenada del punto de partida Q coincide con el origen O y O' de cada uno de los sistemas de referencia en el instante inicial de salida del pulso de luz. Por tanto, en este instante inicial $X_Q = X_{Q'} = 0$ para $t=0$ y $t'=0$.

Solución

a.- El uso de la coordenada ct en lugar de t se justifica para tener un cuadri-vector con todas sus componentes con la misma dimensión: $[L]$. Es posible apreciar que, escrito de esta forma, todos los numeradores de la fórmula de transformación [I.2] tienen dimensión de longitud.

b.- Para el caso del tiempo, donde aparezca v/c lo ponemos igual a cero y obtenemos $t' = t$ y $X' = X - vt$, que son las transformaciones de Galileo [I.1]. Las transformaciones de Galileo son válidas sólo cuando la $v \ll c$, en el límite no-relativista.

c.- Como se desprende de las Figuras I.5 y I.6 la coordenada del punto **Q** es nula por construcción: $X_Q = X'_Q = 0$. Por tanto $\Delta X = (X_P - X_Q) = X_P$. Lo mismo es verdadero en el sistema en movimiento relativo $\Delta X' = (X'_P - X'_Q) = X'_P$. Y el argumento se repite también para el tiempo: $\Delta t = t_P$ y $\Delta t' = t'_P$.

Por tanto sólo nos debemos preocupar por la relación entre las coordenadas entre ambos sistemas del punto **P**. Escribiendo las transformaciones de Lorentz para el punto **P**

$$c t'_P = \frac{c t_P - \frac{V X_P}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad X'_P = \frac{X_P - V t_P}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \text{donde} \quad X_P = c t_P. \quad (\text{I.3})$$

Reemplazando X_P por $c t_P$ en la expresión para t'_P y t_P obtenemos

$$c t'_P = c t_P \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = c t_P \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (\text{I.4})$$

Análogamente, reemplazando t_P por X_P/c en la expresión para X'_P en la ecuación [I.3], obtenemos

$$X'_P = X_P \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = X_P \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (\text{I.5})$$

Dividiendo la ecuación [I.5] por [I.4], obtenemos

$$\frac{X'_P}{t'_P} = \frac{X_P}{t_P} = c. \quad (\text{I.6})$$

Bajo esta transformación de coordenadas, la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas de referencia inerciales.

Hemos jugado con el álgebra de estas transformaciones. En las siguientes secciones indicaremos los desafíos a las ideas preconcebidas que provoca el hecho que la velocidad de la luz sea la misma en ambos sistemas de referencia.

Note que este resultado es válido para cualquier valor de la velocidad relativa. \square

Los postulados de Einstein.

Los sistemas inerciales son equivalentes. Es imposible diferenciar un sistema inercial de otro mediante un experimento físico. El resultado del experimento es el mismo en todos ellos.

La velocidad de la luz c , es una constante universal. Tiene el mismo valor en cada uno de los sistemas inerciales. No es posible transmitir información a una velocidad mayor que c .

A pesar que estos postulados parecen muy simples, tienen consecuencias notables, todas verificadas al día de hoy.

Resultados que se desprenden de estos Postulados.

- A.- El Tiempo es Relativo.** Relojes idénticos marcan tiempos diferentes si se ubican en sistemas de referencia en movimiento relativo.
- B.- La Simultaneidad es Relativa.** La simultaneidad está definida para un sistema de referencia inercial específico. No existe la simultaneidad absoluta, como en el sistema de Galileo.
- C.- El Protocolo de Medición.** La propuesta de Einstein define en forma precisa el protocolo para realizar una medición, por ejemplo el largo de una barra o cómo sincronizar dos relojes idénticos.
- D.- Lo Relevante es el Espacio-Tiempo.** Si no existe un tiempo absoluto, igual para todos los sistemas inerciales, se requiere especificar el tiempo en cada sistema, además de las coordenadas espaciales. Se requieren cuatro números para describir la trayectoria de una partícula. Las coordenadas de un punto **P** están dadas por una tétrada [ct, x, y, z].

I.3. Diagramas Espacio-Tiempo

Las consecuencias derivadas a partir de los postulados de Einstein permitieron eliminar la hipótesis del éter. Otra de sus consecuencias, que el tiempo transcurre en forma diferente en diferentes sistemas de referencia, transforma drásticamente la cinemática de los movimientos relativos: qué mide un observador comparado con el otro observador.

Si el tiempo NO es el mismo para todos los observadores inerciales, debemos incluirlo en el sistema de coordenadas. Por ejemplo el punto **P** en el sistema de referencia **S**, se debe especificar por cuatro números $[ct, x, y, z]$. Para conocer sus coordenadas en otro sistema, debemos usar las transformaciones de Lorentz [I.2] y obtenemos $\mathbf{P}(ct', x', y', z')$.

Es muy conveniente que las componentes de las coordenadas tengan la misma *dimensión*, para lograrlo usamos **ct** en lugar de **t** en el eje temporal.

Otro factor son las *unidades* usadas en los ejes coordenados de los gráficos. Dado el valor de la velocidad de la luz, el uso de las escalas usuales de longitud, un metro por ejemplo, hace muy difícil apreciar alguna característica cinemática en un gráfico espacio-tiempo. Para hacer más intuitivo y evidente el uso de un gráfico en relatividad especial, usamos como unidad para todos los ejes coordenadas 3×10^8 m, la velocidad de la luz. Algo similar ocurre en astronomía donde se utiliza un año-luz como unidad de distancia. Un año-luz $\approx 9,46 \times 10^{15}$ m.

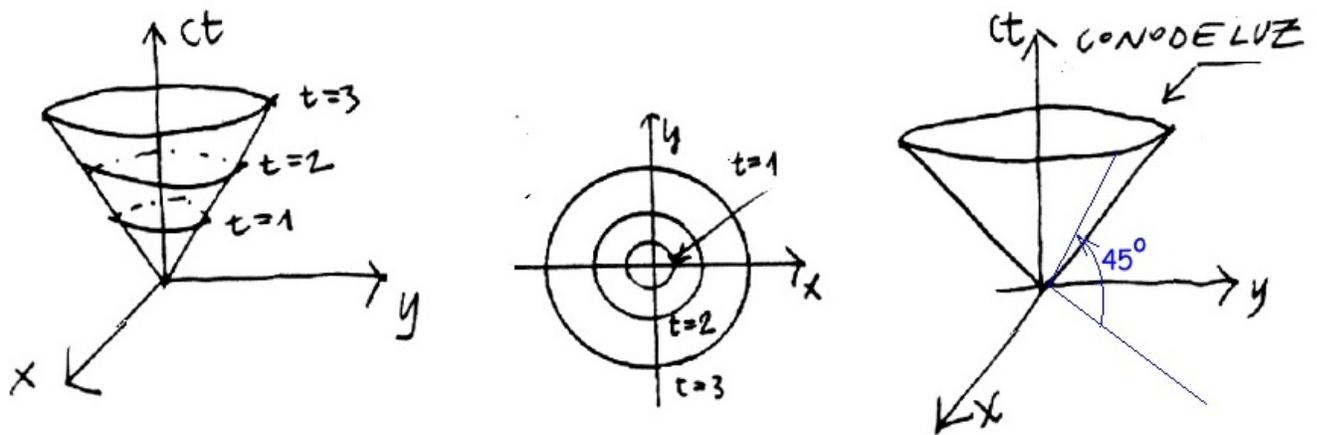


Figura I.8: A la izquierda se dibuja un destello de luz en dos dimensiones espaciales y una temporal. Se representa por un frente circular dibujado en distintos tiempos en la figura. Al centro se dibuja el desplazamiento de esta onda para distintos tiempos, sin incluir explícitamente el eje del tiempo. En la figura de la derecha, el ángulo del vértice del cono es de 90° . Esto refleja que la onda de luz viaja en 45° con respecto al plano de los ejes (x,y) .

Con esta escala los rayos de luz siempre viajan en la bisectriz del ángulo formado el eje **ct** y el eje **x**, si el rayo de luz viaja en este eje coordenado.

Este cambio de escala facilita la interpretación, no contiene ningún cambio conceptual. Refleja el hecho que los rayos de luz son vitales para entender esta teoría y constituyen un elemento fundamental en el protocolo de las mediciones.

Si una piedra cae en una fuente con agua (ver Figura I.2), se genera una onda superficial que se aleja del punto donde cayó con una velocidad característica. El frente de onda es una circunferencia que se expande alejándose del origen. En el diagrama espacio-tiempo, provisto de una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales, la trayectoria de una de las ondas aparece como un cono

cuyo vértice descansa en el punto (evento) donde se originó la onda, que en este caso coincide con el origen del sistema de coordenadas (Ver Figura I.8). Algo similar es lo que sucede con un destello de luz, éste se propaga como un cascarón esférico en un espacio de tres dimensiones. En los diagramas en dos dimensiones espaciales, esta onda se transforma en un **cono de luz**.

Un punto en el diagrama espacio-tiempo representa un hecho concreto e instantáneo. Por ejemplo, el punto e instante en que un objeto puntual toca el suelo al caer, o un martillo golpea a un clavo, o una luz se enciende... etc. Esto se denomina un **evento**.

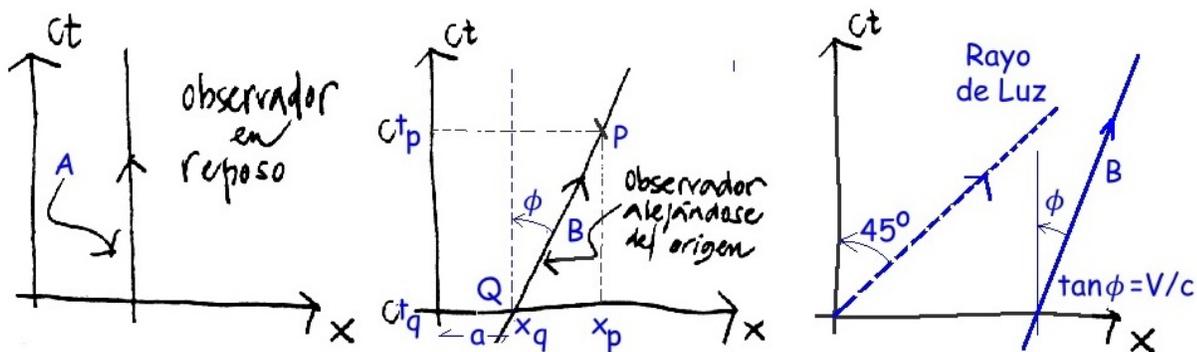


Figura I.9: La línea A, representa la trayectoria en el espacio-tiempo de un observador en reposo en el sistema de referencia. En el diagrama del centro, se dibuja la línea de universo (recta inclinada) de un observador (puntual) que se aleja del origen con una velocidad V . A la derecha se indica la trayectoria de un rayo de luz con su inclinación de 45° y se muestra que $\tan \phi = V/c$, corresponde a la velocidad del observador **B**.

Por otra parte, si dejamos un libro (considerado como objeto puntual) sobre una mesa, ese evento se propaga en el tiempo, pero mantiene su coordenada espacial x y se transforma en una línea vertical en el espacio-tiempo. Esta línea se denomina **línea de universo** de la partícula (el libro en este caso). Si la partícula está en movimiento uniforme, en línea recta, su línea de universo es una recta inclinada. Estos dos últimos casos están representados en la Figura I.9.

A partir del gráfico se puede deducir que

$$\tan \phi = \frac{x_p - x_q}{c(t_p - t_q)} = \frac{V}{c}. \quad (\text{I.7})$$

Como no es posible representar 4 dimensiones en el papel, dibujaremos sólo una o dos coordenadas espaciales. Las figuras incluidas a continuación representan un observador en una o dos dimensiones espaciales.

La Relatividad Especial relaciona las coordenadas de un evento en un sistema de referencia con las coordenadas que otro observador, en movimiento relativo, le asocia a ese mismo evento. Se requiere ser cuidadoso con el protocolo de la medición. La noción de simultaneidad es fundamental junto con la interpretación de los gráficos espacio-tiempo.

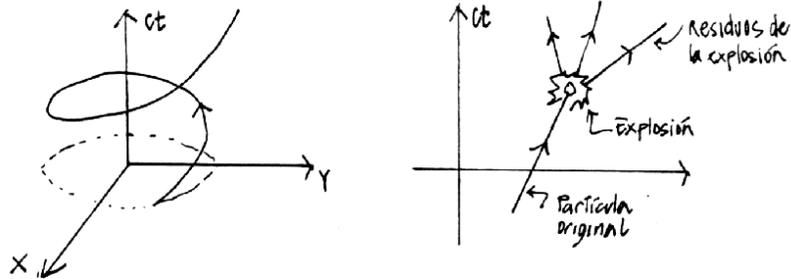


Figura I.10: Línea de universo de una partícula que rota alrededor del origen describiendo una circunferencia de radio a . A la derecha se incluye una partícula que repentinamente explota en tres pedazos. Note que una de las trayectorias es anómala: ¿Cuál parece propagarse con una velocidad mayor que la velocidad de la luz?

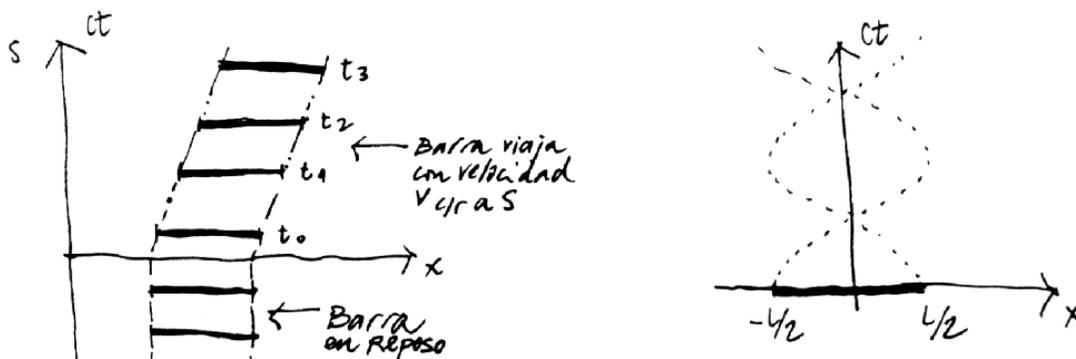


Figura I.11: Línea de universo de los puntos extremos de una barra rígida que permanece en reposo para $t \leq 0$ y en seguida viaja con velocidad v con respecto al sistema S . A la derecha se indica la línea de universo, proyectada en el plano (ct,x) de los extremos de una barra que gira en torno al origen.

I.4. La Idea de Simultaneidad

I.4.1. El Problema del Tiempo

Si existe un tiempo único, un tiempo universal o absoluto, la pregunta desde el punto de vista de un físico: ¿Quién lo regula? ¿Existe un aparato que logra mantener el ritmo perfecto y absoluto en cualquier circunstancia? o, desde el punto de vista de un filósofo: ¿Es una creación de la mente pensante o una forma de ver cosas que en realidad no se disponen en forma temporal?⁵

Aristóteles se preguntó si existiría el tiempo en ausencia de una mente. Y su respuesta fue que no

⁵Filosofía Moderna Roger Scrutton, pág. 369. ver el Cap. 25: Espacio y Tiempo.

existiría el tiempo pero sí un sustrato de tiempo (incluimos esto último para ser fiel a su respuesta, pero sin comentarlo).

Otra pregunta planteada es si podemos existir tanto fuera como dentro del tiempo. ¿Podemos emanciparnos de la prisión del tiempo y seguir siendo las cosas que somos? esto conduce a la existencia de dios y la idea de eterno.⁶

Acá tomamos un punto de vista más pragmático y asociamos un número al instante en que ocurre un evento que se repite, por ejemplo al período de un péndulo. Y esa es la división en segmentos del tiempo que es un continuo. Esto es lo que llamamos un reloj, que obviamente puede ser mucho más sofisticado que lo planteado.

I.4.2. Simultaneidad Absoluta

La física newtoniana considera un solo tiempo para todos los sistemas inerciales, en reposo o en movimiento relativo. Si los relojes los sincronizamos: lo que marca uno lo repita el otro, todos marcan igual por siempre.

Introduciremos un protocolo para sincronizar relojes que es válido en la física newtoniana y en la relatividad especial. La distinción entre ambos es que uno considera la velocidad de la luz como infinita (sistemas newtonianos) y el otro como una constante universal finita.

No es un procedimiento vacío puesto que para los efectos de la vida diaria la velocidad de la luz es inalcanzable. Esa sincronización puede operar en todos los fenómenos de baja velocidad.

Utilizaremos un pulso de luz para sincronizar relojes porque en la teoría más poderosa, que contiene a la newtoniana, su velocidad es -por principio., una constante universal, igual en todos los sistemas inerciales. Esto comprende ambos métodos: infinito a una constante sigue siendo infinito.

La velocidad de la luz como una constante infinita.

Como la velocidad del fotón, la consideramos infinita, su trayectoria en el diagrama de s-t es una línea horizontal .

El protocolo para sincronizar los relojes que usaremos acá consiste en elegir un reloj maestro, desde este reloj envío un fotón a otro reloj ubicado en una posición conocida, al recibir el fotón comienza a funcionar. Como la velocidad de la luz en este caso es infinita, el fotón no demora en llegar y los relojes están sincronizados de inmediato. Repetimos este protocolo y tenemos una red de relojes sincronizados.

⁶*Filosofía Moderna* Roger Scrutton, pág. 369. Ver eternidad en pág. 377 y las definiciones de dios y el tiempo. Puede buscar al filósofo McTaggart para aprender acerca de la no-existencia del tiempo en internet, o el libro Barry Dainton: Time and Space, donde se incluye un capítulo de Rel. especial y otro de espacios curvos y un capítulo de McTaggart, que murió en 1908, antes de la aparición de la relatividad general de Einstein.

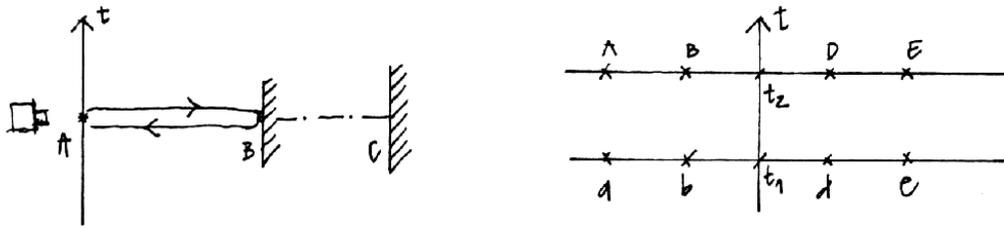


Figura I.12: Un destello de luz viajando con velocidad infinita en un diagrama de espacio-tiempo (s-t) es una recta horizontal. Llega a todos los lugares simultáneamente, no importa su lejanía con la fuente del destello. Los eventos **a**, **b**, **d** y **e** son simultáneos, ocurren en el instante t_1 . Los eventos A, B, C, D y E son también simultáneos, pero ocurren en el instante t_2 con posterioridad a t_1 .

Definimos dos eventos como simultáneos si ocurren en puntos diferentes pero los relojes ubicados en esos puntos marcan el mismo número. El tiempo absoluto transcurre igual en todos los relojes no importa el estado de movimiento en que se encuentre el sistema de referencia sobre el cual se ubica. Ésta es la definición de simultaneidad absoluta.

De esta forma, al sincronizar de esta forma una nube de relojes podemos formar **líneas de simultaneidad absoluta**. Estas son rectas perpendiculares al eje ct (Ver Figura I.12).

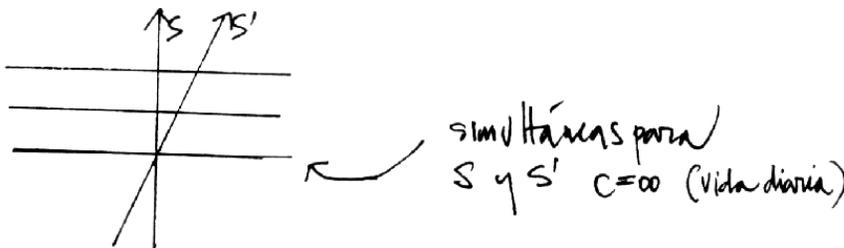


Figura I.13: Los planos de simultaneidad son las líneas horizontales. Son los mismos para todos los observadores inerciales, por ejemplo para S y para S' . Una velocidad de la luz infinita nos lleva a la existencia de la simultaneidad absoluta.

Supongamos un observador que viaja con velocidad v con respecto al anterior, la pregunta: ¿Cuál es la línea de simultaneidad asociada al observador bautizado como S' ? (Ver Fig. I.13)

La respuesta es: la misma que le asociamos al observador en reposo, no importa la velocidad con que se desplace este nuevo observador S' con respecto a S .

La simultaneidad absoluta (todos los relojes sincronizados permanentemente, no importa su movimiento relativo), se utiliza en la física no-relativista.

Ejemplo

Usando esta aproximación no-relativista (velocidad de luz $\rightarrow \infty$), obtendremos gráficamente el cambio en la frecuencia que experimenta el sonido al ser detectado por un observador en movimiento con velocidad V con respecto a la fuente en reposo en el mismo sistema de referencia. La velocidad del sonido es V_s y su frecuencia es $\nu_s = 1/T_s$.

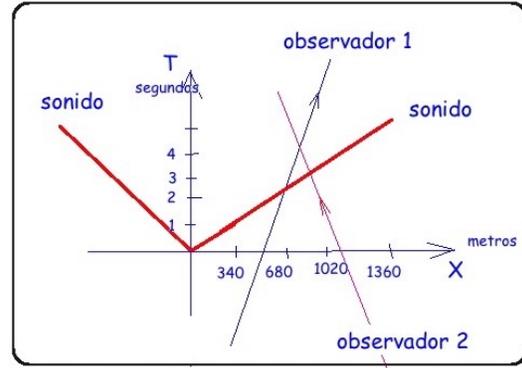
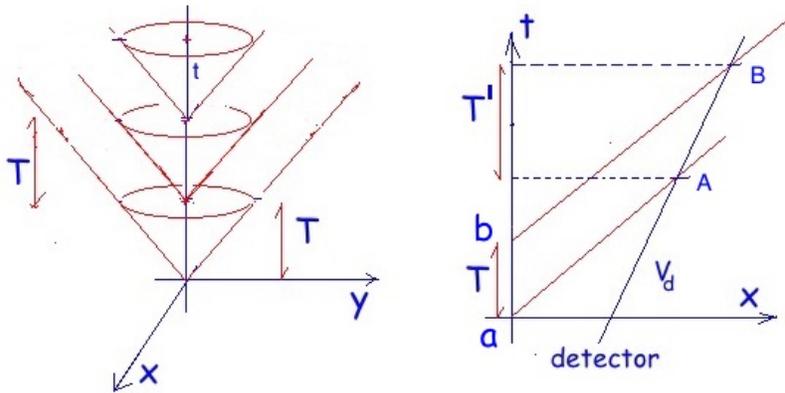


Diagrama s-t de una onda de sonido propagándose en una dimensión. Note las unidades de longitud =340 metros, esto se define de este modo para visualizar las características de los gráficos usados.

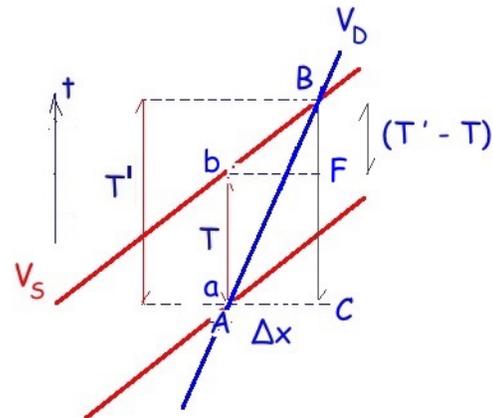
SOLUCIÓN

La Figura revela una fuente que emite un pulso cada T segundos. A su derecha tomamos una sección de ella que sólo considera el eje y y el tiempo, que es lo que se requiere para calcular el efecto doppler en este caso. Las líneas aA y bB representan la trayectoria de cada pulso (o podría ser una onda) con la velocidad del sonido en el aire V_s .



V_D es la velocidad del detector u observador en movimiento. La proyección del trazo AB sobre el eje del tiempo, representa lo que demoran los dos pulsos en alcanzar al observador. Dada la simultaneidad absoluta, el período medido por el observador es T' .

De la figura adjunta podemos sacar la siguiente información: Del triángulo ΔACB , obtenemos $AC \equiv \Delta X = V_D T'$.
 Del triángulo ΔbFB , se desprende que $\Delta X = V_s (T' - T)$.
 Igualando las dos expresiones para ΔX , tenemos $V_D T' = V_s (T' - T)$. Despejando T' y definiendo la frecuencia como $f = 1/T$ y $f' = 1/T'$, obtenemos



$$f' = f \left(1 - \frac{V_D}{V_s} \right). \quad (I.8)$$

I.4.3. Sincronización de relojes: La velocidad de la luz es finita

La *simultaneidad relativa* está asociada a un sistema de referencia específico. Dos eventos simultáneos, lo son sólo en el sistema de referencia inercial en el cual se realizó el protocolo correspondiente.

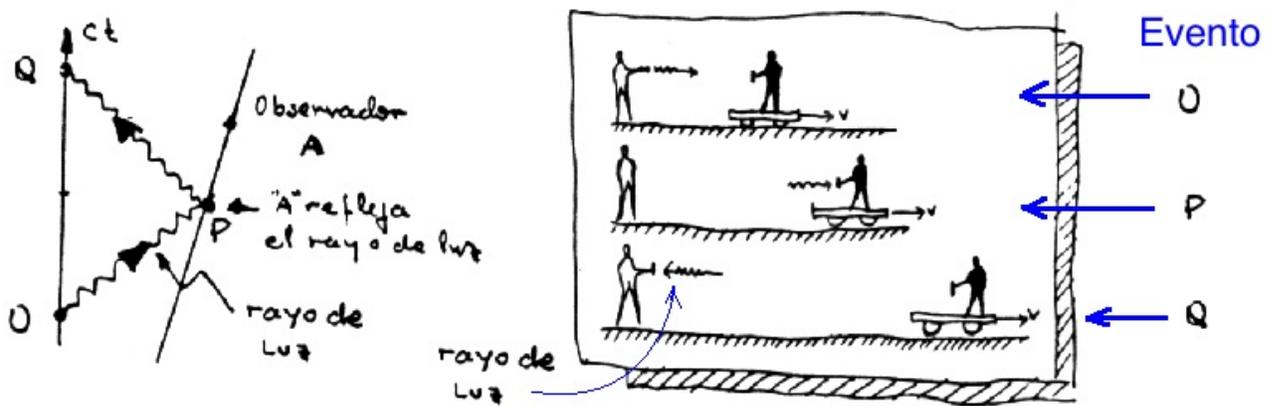


Figura I.14: En la figura de la izquierda, el observador A (en movimiento) recibe un pulso de luz proveniente del observador O (en reposo) y lo refleja de vuelta. En el diagrama de la derecha se representa la misma situación pero como una filmación. En este diagrama el observador A se ubica en el carro que se aleja con velocidad v . Los tres eventos relevantes de la Figura están señalados y son: O, P y Q.

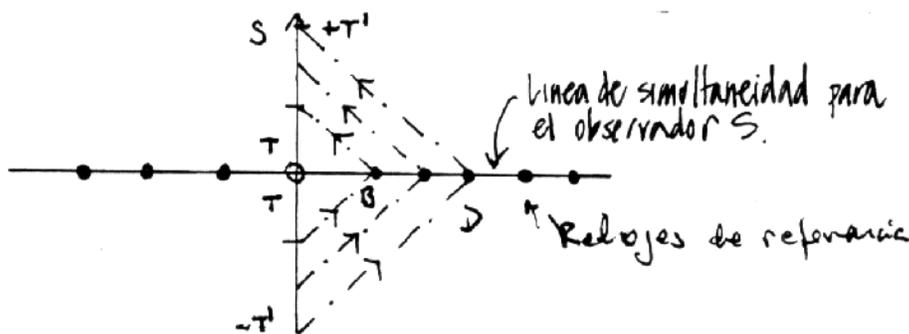


Figura I.15: La luz viaja desde el reloj maestro hasta el punto B, rebota y vuelve al reloj maestro. Demora T segundos en ir y T segundos en volver. El punto medio del intervalo de $2T$ corresponde al instante cuando el rayo de luz impacta al reloj en B y lo activa. Definimos como simultáneos el instante O del reloj maestro y el evento B. También su distancia queda determinada, es cT .

Para establecer simultaneidad relativa entre dos eventos, enviamos un pulso de luz desde el reloj maestro, hacia el reloj a sincronizar (**B** o **D** en la figura I.15). Al rebotar en el reloj, lo activa y el pulso retorna a la fuente. Allí se calcula el instante en que se activó el reloj en **B** y la distancia que los separa referida al sistema **S**, $d = cT$. Se envía otra señal, que no se indica en la figura I.15, y que adelanta el tiempo del reloj en **B** en d/c segundos para sincronizarlo con el reloj maestro y marca su coordenada como $d = Tc$.

Con esta estrategia podemos sincronizar todos los relojes en el sistema **S**.

De esta forma la simultaneidad con respecto a un evento en el eje ct está definida de la misma forma que en el caso anterior (con $c = \infty$). Para el caso de una dimensión espacial y una temporal, está formada por una serie de líneas todas perpendiculares al eje vertical ct que representa al tiempo que marca el reloj asignado al observador ubicado en el origen.

Podemos imaginar que distribuimos una infinidad de relojes en todo el espacio y mediante una serie de señales como la indicada, sincronizar cada uno de ellos con el reloj maestro y, al mismo tiempo, asignarle una coordenada de la forma ya explicada. (Ver I.16).

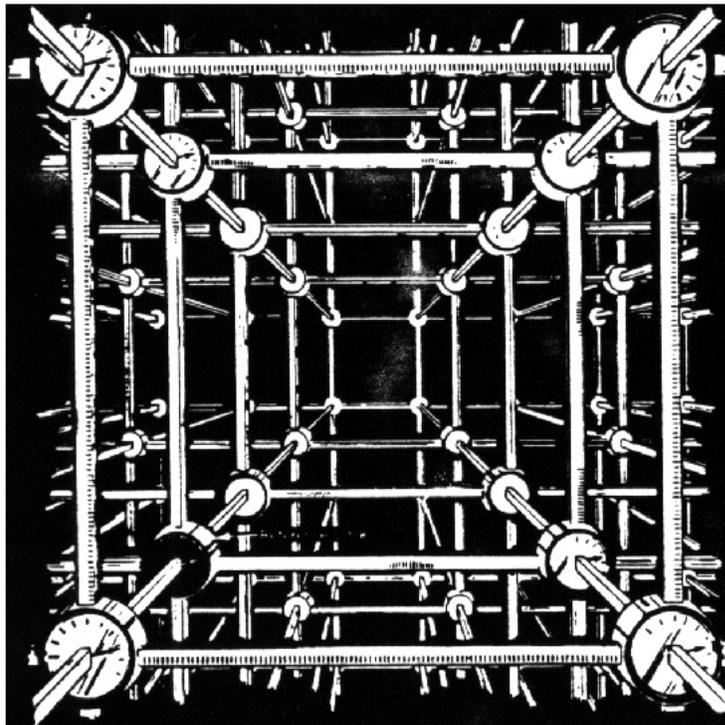


Figura I.16: *El observador construye un andamio en su Laboratorio donde cada reloj en cada vértice tiene un tiempo dado por el reloj ubicado allí y también sus coordenadas espaciales. Ambas cantidades fueron asignadas en el proceso de sincronización de cada reloj con el reloj maestro. (Extraído del libro **Spacetime Physics**, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.)*

I.4.4. Simultaneidad: Dos Observadores en Movimiento Relativo.

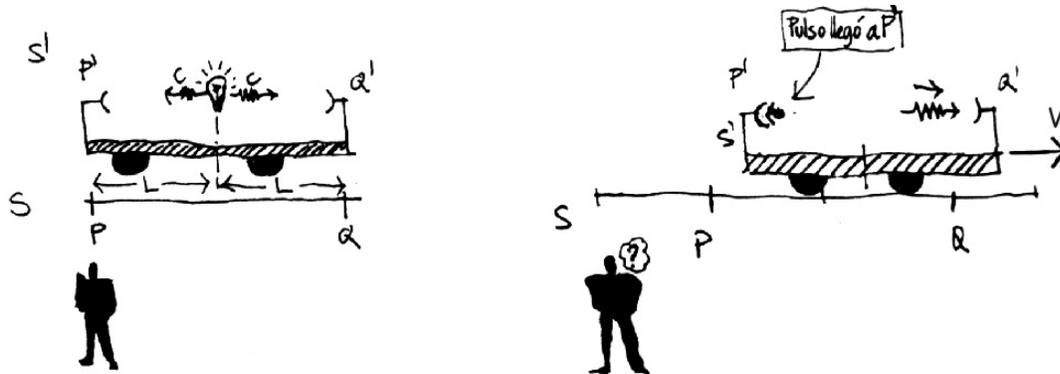


Figura I.17: A la izquierda se muestra el lanzamiento de dos destellos de luz simultáneamente desde el punto medio del carro que se encuentra en reposo en el sistema fijo S . Ambos alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro. A la derecha se ilustra el mismo fenómeno, dos destellos de luz que arrancan desde el punto medio del carro en movimiento donde viaja el observador S' . De acuerdo a S , el pulso de la izquierda llega antes puesto que el punto a' se aleja del otro pulso. La velocidad del destello no depende de la velocidad del carro, es una constante universal.

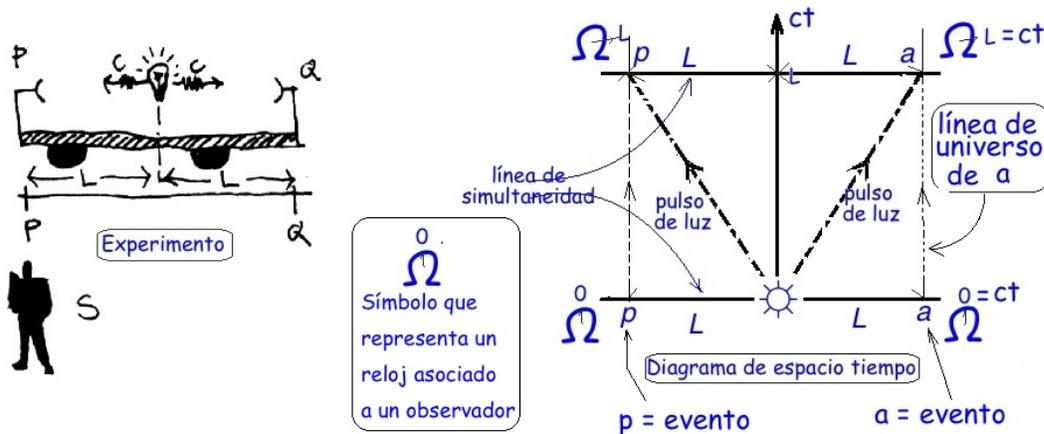


Figura I.18: Dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio del carro que se encuentra en reposo en el sistema S . Ambos alcanzan simultáneamente los dos extremos del carro. A la derecha se incluye el diagrama de espacio-tiempo de este experimento.

Analizamos esta situación utilizando un experimento pensado. Primero estudiamos el caso más simple. En el sistema en reposo S y desde el punto medio de una barra de largo $2L$, se lanza

dos destellos apuntando hacia cada extremo de la barra. Los destellos viajan, rebotan y llegan simultáneamente al centro desde donde salieron. Este ejemplo es simple pero sirve para familiarizarse con los diagramas de espacio-tiempo y la notación utilizada (Ver Figura I.18).

A continuación consideramos un sistema, que designamos como S' , y que aleja con velocidad V del observador S . Examinaremos la simultaneidad en este sistema de referencia usando: los dos pulsos simultáneos saliendo de una fuente puntual, la barra de largo $2L'$ que viaja fija a S' , representada por las rectas inclinadas p' y a' en la Figura I.19 y siguiendo los postulados de Einstein para la Relatividad Especial (Ver Figura I.19).

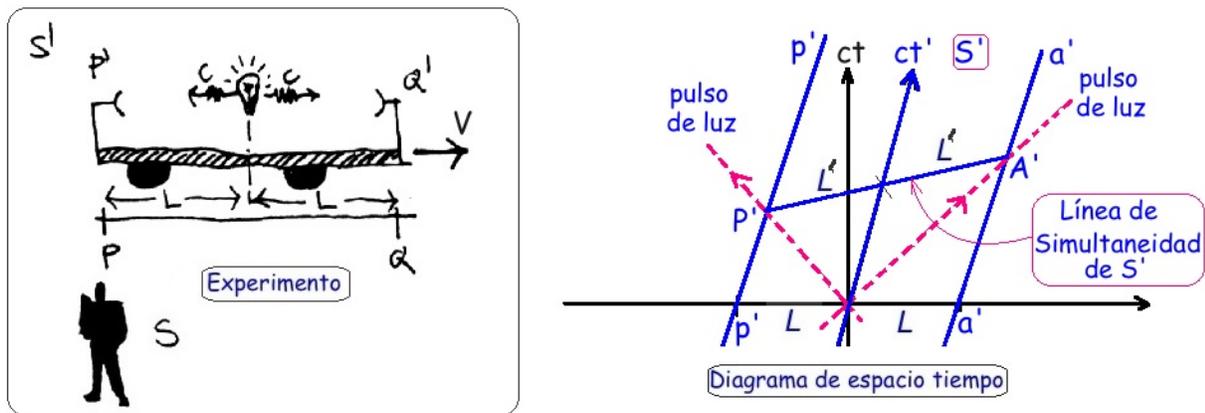


Figura I.19: Dos destellos de luz salen simultáneamente desde el punto medio de la barra de largo $2L'$. Esta barra viaja fija al sistema S' . Como se fundamenta en el texto, estos dos pulsos llegan simultáneamente, de acuerdo al sistema S' , en los eventos marcados en la Figura a la derecha, como A' y P' . La recta $\overline{P'A'}$ es la recta de simultaneidad para S' . Queda claro que la simultaneidad en el sistema S y S' son diferentes. Esta es la definición de simultaneidad relativa, asociada a un sistema de referencia inercial específica.

De acuerdo a S' , la fuente de luz pasa por el punto medio de la barra con una velocidad $-V$. Al coincidir con el punto medio de la barra, lanza los dos destellos como se indica en la Figura I.19. Como la velocidad de la luz **no** depende de la velocidad de la fuente, por tanto se propaga en S' con la velocidad c de acuerdo al postulado de Einstein.

En la figura I.19 se indican los puntos P' y A' que son los eventos donde el pulso impacta los extremos de la barra usada para este experimento pensado. Como los pulsos partieron del punto medio de la barra, estos dos eventos son simultáneos de acuerdo al observador S' . (Ver figura derecha de I.19).

Después de determinar estos dos eventos como simultáneos, en la Figura I.19, los unimos mediante una recta $\overline{P'A'}$, esta es la línea de simultaneidad para S' . Todos los relojes sincronizados ubicados sobre esta línea marcan el mismo tiempo ct' . Vemos que **NO** coincide con la línea de simultaneidad encontrada para el observador S , ver Figura I.18.



Figura I.20: A la izquierda se dibujan líneas de simultaneidad para el sistema S . A la derecha se ilustra una familia de líneas de simultaneidad en el sistema que consideramos en movimiento relativo con respecto a S , y que denominamos S' . Estas son las líneas construidas en la Figura anterior I.19.

Si repetimos el proceso con otros pares de puntos simétricos con respecto al origen, desarrollamos una familia de líneas de simultaneidad asociadas al observador S' similar a la familia de rectas dibujadas en S .

Sincronización mediante rayos de luz en un sistema de referencia en movimiento.

Es un buen ejercicio dibujar cómo se aprecia la situación desde el punto de vista de un sistema de referencia en movimiento S' .

El rayo de luz siempre viaja bisectando el ángulo formado por el eje x y el eje temporal ct . Cuando son perpendiculares, el ángulo es 45° , si se aleja hacia la derecha, como en este caso, el ángulo es menor.

En la Figura siguiente I.21, se aprecia que los eventos A y B , son simultáneos para el observador S , pero **no** lo son para el observador designado por S' . En el sistema S' , A es simultáneo con A' y A' ocurre antes que B en el sistema S .

Ejercicio

A partir de la Figura I.21, ubique un evento A'' simultáneo con A' en el sistema S . Repita la operación en el sistema S' para el punto B : señale un evento simultáneo.

I.5. La Contracción del Largo

En esta sección definiremos el protocolo para medir el largo de una barra utilizando las transformaciones de Lorentz [I.2] y los diagramas de espacio-tiempo. Como la definición considera la

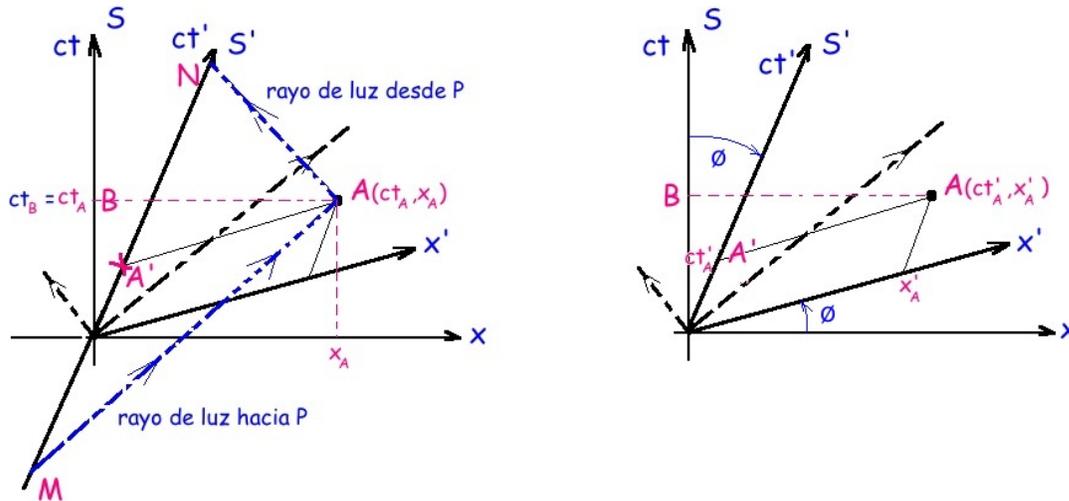


Figura I.21: A la izquierda, se dibuja el rayo de luz que se inicia desde M , rebota en A e impacta en N , esto a lo largo de ct' . De acuerdo al protocolo, el punto medio del trazo \overline{NM} , A' , es el evento simultáneo con A , por tanto para S' los puntos A y A' son simultáneos. Se indican también las coordenadas del punto A en el sistema S (a la izquierda de la figura) y S' . Las coordenadas de A en los sistemas S y S' están relacionadas por las transformaciones de Lorentz [I.2].

simultaneidad, el valor obtenido para el largo de una barra depende del sistema de referencia. Físicamente la barra no experimenta cambio alguno en un sistema de referencia inercial, de acuerdo a uno de los postulados de esta teoría.

I.5.1. La Aparente Contracción del Largo de una Barra en Movimiento Relativo

Definición:

El largo de una barra en un sistema inercial se **define** como la distancia espacial que existe entre sus dos extremos medidos a lo largo de una línea de simultaneidad del sistema inercial escogido.

Como la simultaneidad es relativa, el largo también depende del observador que mida. Por tanto resulta que una barra en movimiento parece acortarse (como mostraremos). Pero esto no es real, no es físico. *Una barra en movimiento relativo con velocidad constante, no se acorta ni se alarga. No le ocurre absolutamente nada..*

Medición de una barra en movimiento: método gráfico.

las siguientes definiciones aparecen en todos los textos debido a la frecuencia con la cual aparecen en los diversos cálculos de la relatividad especial.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2}}, \quad \beta \equiv \frac{V}{C}. \quad (\text{I.9})$$

Los puntos **A**, **B** y **C** de la Figura I.22, están elegidos para hacer más fáciles la comparación entre los valores de ambos largos **L** y **L'**.

L y **L'** son diferentes, pero mostraremos que **L** > **L'**, lo cual golpea nuestra intuición.

Las líneas ℓ_A y ℓ_B son paralelas puesto que la barra está en reposo en el sistema **S'**. De este modo la coordenada espacial de los eventos **B** y **C** en el sistema **S'** son las mismas: $X'_B = X'_C = L'$. Análogamente, $X'_A = 0$, puesto que permanece en el origen del sistema **S'**.

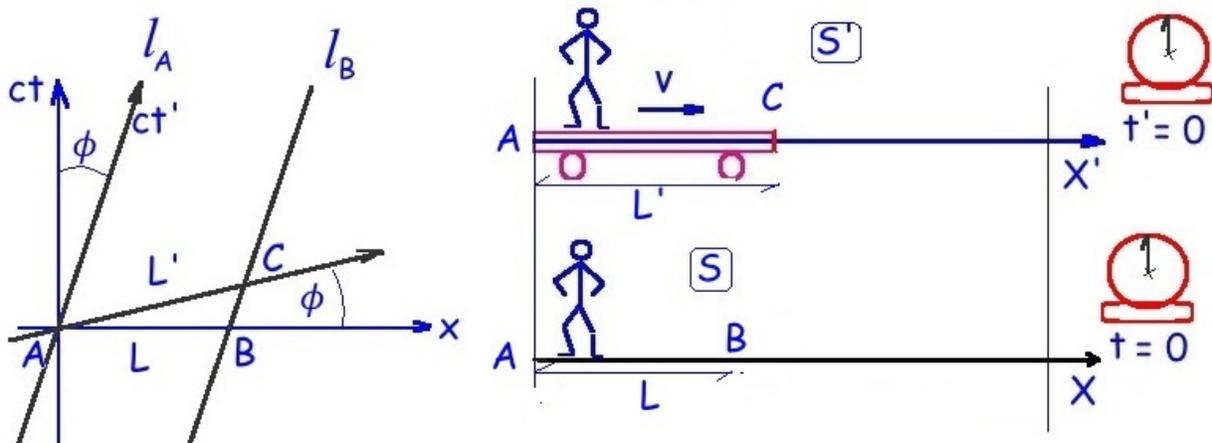


Figura I.22: Las líneas ℓ_A y ℓ_B , representan la línea de universo (o trayectorias en el espacio-tiempo) de los extremos **A** y **B** de la barra rígida en movimiento con respecto al sistema fijo **S**. El largo definido por el sistema **S** para la barra es $L = \overline{AB}$, puesto que es la distancia entre los extremos de la barra y son eventos simultáneos. De la misma forma, $L' = \overline{AC}$, es el largo definido para la barra por el sistema **S'** puesto que **A** y **C** son eventos simultáneos en el sistema en movimiento **S'**.

Medición de una barra en movimiento: método analítico

Para comparar los largos **L** y **L'** utilizaremos las ecuaciones de Lorentz [I.2] y las coordenadas de los dos extremos de la barra evaluadas de acuerdo a cada uno de los observadores **S** y **S'**. Para encontrar la relación entre los valores medidos por cada uno de los observadores **S** y **S'** debemos usar las transformaciones de Lorentz.

En el sistema **S**, las coordenadas de los extremos de la barra las denominamos **A** y **B**. Cuando nos referimos al sistema de referencia **S'** nos referimos a X'_A y X'_B .

Cuadro I.1: A continuación especificamos las Coordenadas respectivas en los Dos Sistemas de Referencia incluidos en la Figura.

Coordenadas Sistema S		Coordenadas Sistema S'	
X_A	$= 0,$	X'_A	$= 0$
X_B	$\equiv L,$	X'_B	$= L'$
$X_B - X_A$	$= L$	$X'_C - X'_A$	$= L'$
X_C	$= L + V(t_C - t_A),$		
t_A	$\equiv 0.$		

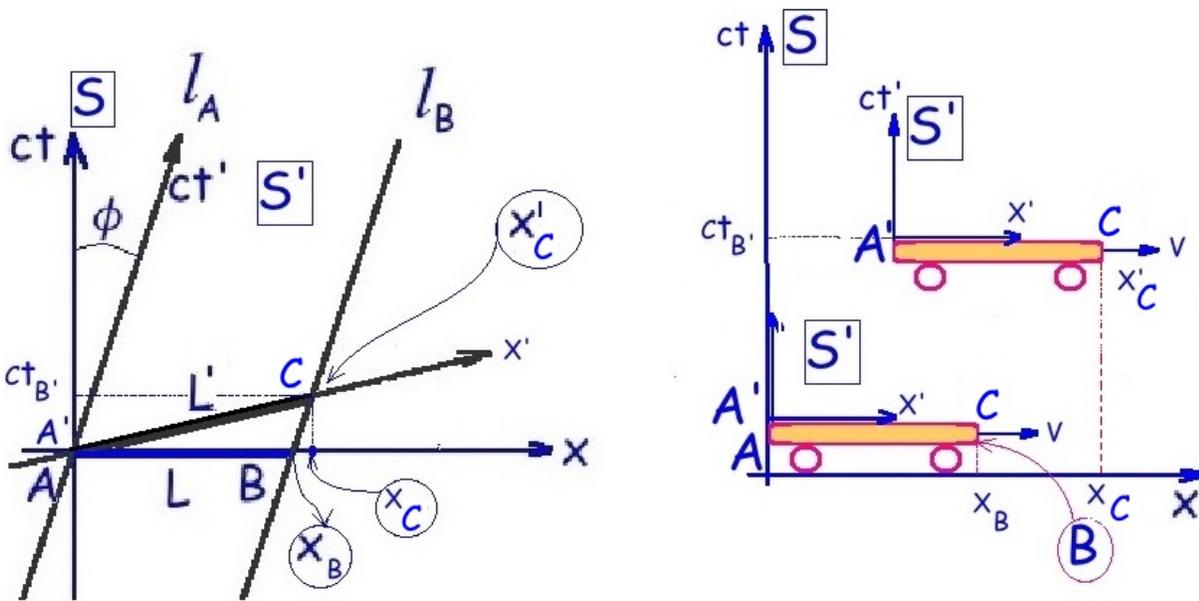


Figura I.23: Las líneas l_A y l_B , representan la línea de universo (o trayectorias en el espacio-tiempo) de los extremos **A** y **B** de la barra rígida en movimiento con respecto al sistema fijo **S**. A la derecha, el extremo **C** medido en el sistema **S'**, es X'_C . Como los eventos **B** y **C** están en la misma línea de universo l_B , ambos tienen la misma coordenada en **S'**, o sea $X'_C = X'_B$.

Utilizando los valores indicados en la Tabla anterior I.1 relacionamos las coordenadas del evento **C** en ambos sistemas de coordenadas utilizando las transformaciones de Lorentz [I.2].

X'_C es la coordenada espacial del evento **C** en **S**. X_C es la coordenada espacial del evento **C** en el sistema **S**.

$$\begin{aligned}
X'_C &= L' = \gamma(X_C - V t_C) \quad (\text{usamos las transformaciones de Lorentz}), \\
&= \gamma(L + V t_C - V t_C) \quad (\text{reemplazamos el valor de } X_C \text{ dado en la Tabla calculada}), \\
&\Rightarrow L' = \gamma L
\end{aligned}$$

Otro método para obtener la contracción del largo

Recurriendo a la interpretación de la línea de universo del extremo **B** de la barra en el sistema **S'** podemos apreciar del gráfico que

$$X'_C \equiv X'_B = L', \quad (\text{I.10})$$

dado que **B** y **C** se ubican en la misma línea de universo en **S'** y que permanece paralela a la línea que cruza el origen, tiene el mismo valor de la coordenada que **C**.

$$\begin{aligned}
X'_{A'} &= X'_A = 0 \\
X'_C - X'_{A'} &= L' = X'_B
\end{aligned}$$

usando la transformación de Lorentz [I.2]

$$X'_B = \gamma(X_B - V t_B), \quad (\text{I.11})$$

Como $t_B = 0$ (puesto que es simultáneo con **A**) y $X_B \equiv L$, obtenemos

$$\boxed{L' = \gamma L.} \quad (\text{I.12})$$

Si analizamos el procedimiento seguido para comparar el largo **L** de una barra en dos sistemas de referencia en movimiento relativo, se debe medir la distancia entre ambos extremos en forma *simultánea*. Como la *simultaneidad* es propia de cada sistema de referencia, eso explica la diferencia en la longitud asociada a la barra por dada uno de los observadores.

La barra no sufre ni acortamiento ni alargamiento. La diferencia proviene del protocolo establecido para definir asociar el largo de una barra rígida.

I.6. La Dilatación del Tiempo

Para medir la dilatación del tiempo debemos comparar un reloj que lleva **S'** en el origen (el punto **O'**) con un conjunto de relojes sincronizados pegados al eje-x en el Sistema **S**. El sistema **S'** se desplaza con una rapidez V_0 con respecto **S**.

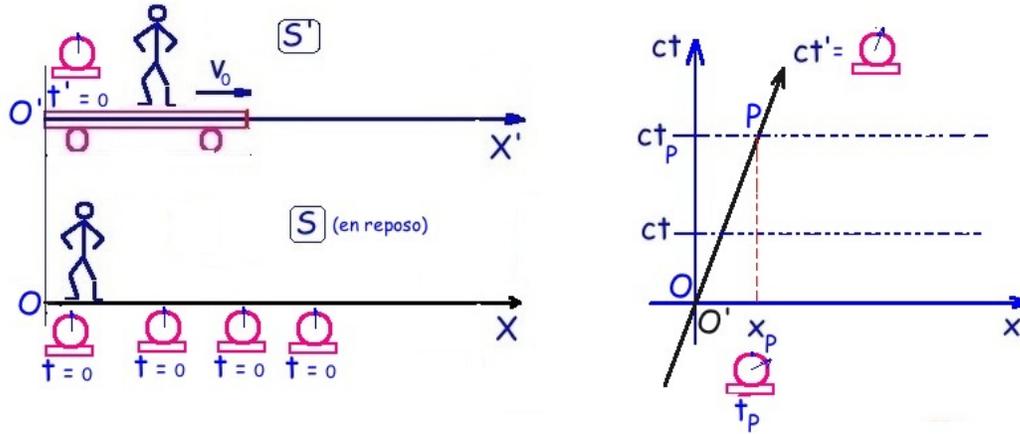


Figura I.24: Las líneas ct y ct' , representan las trayectorias en el espacio-tiempo del origen O y O' de los sistemas de referencia S y S' . P es un punto arbitrario donde se compara el tiempo indicado por el reloj fijo a S y ubicado en la coordenada x_P , con el reloj fijo al origen del sistema S' .

Usando las transformaciones de Lorentz [I.2] obtenemos:

$$ct'_{0'=P'} = \gamma \left(ct_P - \frac{V_0}{c} x_P \right), \quad x'_{0'=P} = 0 = \gamma (x_P - V_0 t_P). \quad (\text{I.13})$$

Despejando el tiempo en esta última ecuación,

$$\Rightarrow t_P = \frac{x_P}{V_0}$$

y reemplazando este valor en la ecuación I.13 obtenemos

$$\begin{aligned} ct'_{0'} &= \gamma \left(ct_P - \frac{V_0^2}{c^2} ct_P \right) = \gamma c \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_P \\ \Rightarrow t'_{0' \equiv P} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}} \times \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_P = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} t_P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_P = \gamma t'_{0' \equiv P} \quad \text{Como } \gamma \geq 1, \quad \text{entonces, } t'_{0' \equiv P} < t_P. \quad (\text{I.14})$$

Por tanto el tiempo medido por el reloj en movimiento relativo transcurre más lentamente que el tiempo medido por el sistema de relojes sincronizados que consideramos -arbitrariamente-, en reposo.

De acuerdo a los principios de la Relatividad Especial, los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí. A partir de la ecuación I.14 podríamos inferir que en el sistema en reposo el tiempo transcurre más rápido y así podríamos identificar el sistema en reposo absoluto: aquel en el cual el tiempo transcurre más rápidamente que en cualquier otro sistema inercial. Esto es una contradicción a los postulados iniciales.

Para entender mejor este resultado nos preguntamos: ¿Qué ocurre si, a diferencia del caso estudiado, consideramos el sistema S' en reposo y el sistema S está en movimiento? ¿Puede afectar este cambio nuestra conclusión en el ejemplo anterior?

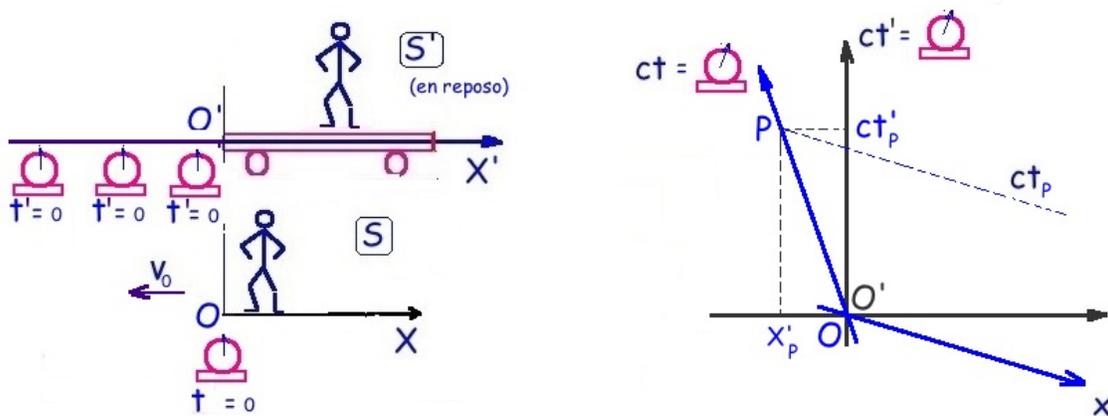


Figura I.25: La línea ct' es vertical porque consideramos a S' en reposo. El sistema S se desplaza en el sentido negativo del eje \hat{X} con velocidad $-V_0$. La tangente $\tan \phi = V/c$ es negativa y por eso el sistema de referencia se abre, a diferencia del caso anterior. Se indica una línea de simultaneidad en el sistema S .

Estudemos qué ocurre si invertimos la situación. Consideraremos entonces el sistema S' en reposo y con un conjunto de relojes sincronizados y un reloj en el origen del sistema S para comparar tiempos (Ver Fig I.25).

$$ct_p = \gamma \left(ct'_p + \frac{V_0}{c^2} x'_p \right), \quad x_p = \gamma(x'_p + V_0 t'_p) = 0. \quad (I.15)$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera,

$$ct_p = \gamma \left[ct'_p + \frac{V_0}{c^2} (-V_0 t'_p) \right] = \gamma ct'_p \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} ct'_p$$

$$\boxed{\gamma t_p = t'_p \Rightarrow t_p < t'_p \text{ debido a que } \gamma \geq 1.} \quad (I.16)$$

Al comparar el reloj en el sistema en movimiento con los relojes en el sistema en reposo, observamos que en el sistema en movimiento, el tiempo siempre transcurre más lentamente: el tiempo se dilata. Si intercambiamos su papel de reposo y movimiento, el tiempo se dilata siempre en el sistema considerado en movimiento. Esta es la conclusión válida.

Comparando las ecuaciones , vemos que el resultado es simétrico. Al intercambiar el papel de reposo y movimiento en estos sistemas, obtuvimos los resultado dados por las ecuaciones I.14 y I.16.

Este resultado es -por decir lo menos-, contra-intuitivo: no parece ser un resultado observado en la física y menos en la vida diaria a esa fecha. Este es un ejemplo de una teoría científica: *predice* un resultado nuevo, crucial, que puede ser verificada o desechada mediante un experimento. Esto es, por la naturaleza misma.

Los experimentos llegaron más tarde. Aquí estudiamos uno: la vida media en el decaimiento de una partícula sub-atómica, el *muón* que es una de las partículas que emergen del decaimiento de los rayos cósmicos que bombardean la Tierra. Es posible compararla su vida media el muón en reposo en nuestro sistema de referencia y la vida media deducida por la altura que recorre al penetrar la atmósfera y decaer en su camino. Está propuesto, con más detalle, como ejercicio al final del capítulo.

Otro experimento (J. C. Hafele y R. E. Keating, 1972) compara relojes atómicos instalados en un avión en viaje alrededor de la Tierra [11], con su contraparte de relojes idénticos que permanecen fijos en Tierra en diferentes puntos de la trayectoria y que permiten ir comparando los tiempos a lo largo de la trayectoria.

El GPS es otro sistema moderno para comparar tiempos en sistemas en movimiento relativo con otros fijos en Tierra.

No existe, a la fecha, ningún experimento en la física clásica que sea contradictorio con los principios de la teoría de la relatividad especial.

El experimento de J. C. Hafele y R. E. Keating, que consiste en comparar dos relojes al comienzo del viaje y los mismos dos relojes al final del viaje, después de dar una vuelta a la Tierra. Un experimento propuesto por Einstein que es similar en espíritu al de J. C. Hafele y R. E. Keating, es el denominado como la paradoja de los gemelos, que estudiamos a continuación.

Ejemplo

Considere un par de gemelos ubicados inicialmente en el mismo punto. Repentinamente uno de ellos comienza a alejarse con velocidad constante V_0 . Transcurrido un tiempo retorna con la misma rapidez $-V_0$, mientras el otro gemelo permaneció en reposo en el origen durante este intervalo. Calcule el tiempo que transcurre en el intervalo de ida y vuelta de acuerdo a los relojes de cada uno de los gemelos.

Solución

Antes de plantear el problema, un par de comentarios.

Cada gemelo representa un sistema de referencia inercial por casi todo el intervalo entre la ida

y vuelta con una excepción. El gemelo viajero parte con una velocidad V_0 y retorna con $-V_0$, por tanto debió sufrir una aceleración en una parte de su trayectoria y NO constituye un sistema inercial durante todo su trayecto. Así, estos dos sistemas de referencia no son simétricos. El gemelo en el origen NO sufre ninguna aceleración.

Suponemos que la aceleración transcurre en un intervalo muy pequeño que no afecta el resultado final ni la conclusión. De hecho, confinamos el cambio de velocidad a un punto, el punto **Q**. Esta suposición no afecta nuestro resultado, pero no lo demostraremos acá.

El gemelo viajero regresa y comprueba que está más joven que su par. Esto ilustra que el tiempo transcurrido depende de la trayectoria seguida en el espacio-tiempo. Ilustra la dilatación del tiempo del viajero. También ilustra la dilatación del tiempo en un sistema biológico -la edad de los gemelos-, y establece así que este resultado es válido donde se considere el tiempo como una variable.

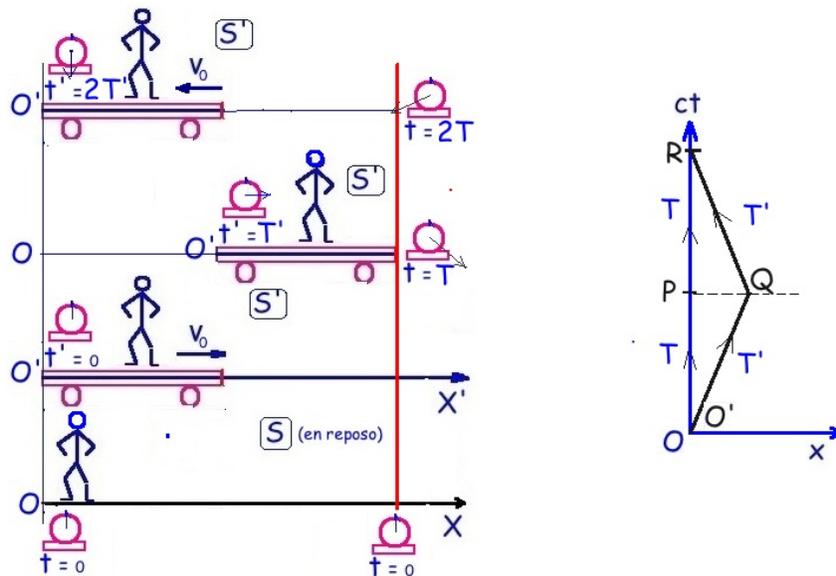


Figura I.26: Diagrama de los gemelos. Uno de ellos emprende un viaje. Al reencontrarse, aquel que fue de viaje es más joven. El quiebre de simetría entre ambos sistemas está en el punto **Q** de la figura. El gemelo de viaje experimenta una aceleración en esa vecindad y por tanto pierde su carácter de inercial. Los tiempos de ida y regreso mantienen la misma rapidez constante salvo el intervalo con aceleración, y toman el mismo tiempo de viaje por tramo.

Solución

En el evento **0** se activan los relojes de ambos gemelos: $t_0 = t'_0 = 0$.

Dividimos el problema en dos partes: la trayectoria de **O** a **P** y de **P** a **R**, en el caso del gemelo en reposo, y de **O'** a **Q** y de **Q** a **R** para el gemelo en viaje. Como los tramos recorridos son iguales y son cubiertos con la misma rapidez, los tiempos asociados a cada gemelo **T** y **T'**, deben ser

también los mismos. (Ver Fig. I.26).

La solución consiste en encontrar relaciones entre \mathbf{T} y \mathbf{T}' . Para ello usamos las transformaciones de Lorentz [I.2] que, recordamos, dadas las coordenadas de un evento en un sistema inercial, encuentra las coordenadas de dicho punto o evento en un sistema inercial en movimiento relativo.

En este modelo simple, reducimos el tramo con aceleración al punto \mathbf{Q} , de forma que hay un cambio a bruto de velocidad a la entrada de \mathbf{Q} y a su salida.

En el sistema del gemelo en viaje $x'_{\mathbf{Q}} = 0$. Veamos las relaciones entre las coordenadas del punto \mathbf{Q} en ambos sistemas.

$$t'_{\mathbf{Q}} = \gamma \left(t_{\mathbf{Q}} - \frac{V_0}{c^2} x_{\mathbf{Q}} \right), \quad x'_{\mathbf{Q}} = 0 = \gamma (x_{\mathbf{Q}} - V_0 t_{\mathbf{Q}}), \quad (\text{I.17})$$

reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos

$$t'_{\mathbf{Q}} \equiv T' = \gamma \left(t_{\mathbf{Q}} - \frac{V_0^2}{c^2} t_{\mathbf{Q}} \right)$$

Los eventos \mathbf{P} y \mathbf{Q} son simultáneos (ver Figura I.26) para el gemelo en reposo. Si denominamos el tiempo transcurrido desde \mathbf{O} hasta \mathbf{P} como \mathbf{T} , entonces $t_{\mathbf{P}} = t_{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{T}$.

Para el gemelo viajero, $t'_{\mathbf{O}'} = 0$, $\Rightarrow (t'_{\mathbf{Q}} - t'_{\mathbf{O}'}) \equiv \mathbf{T}'$.

$$T' = \gamma \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) t_{\mathbf{P}} = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} t_{\mathbf{P}} = \frac{1}{\gamma} t_{\mathbf{P}} = \frac{T}{\gamma}. \quad (\text{I.18})$$

El gemelo en viaje demora lo mismo en ir desde el origen hasta alcanzar el punto \mathbf{Q} , que en retornar al origen, el punto \mathbf{R} . Este trayecto, que denominamos $\overline{\mathbf{QR}}$, lo recorre con una velocidad $[-V_0]$.

$$(t''_{\mathbf{R}} - t''_{\mathbf{Q}}) = \gamma \left[(t_{\mathbf{R}} - t_{\mathbf{Q}}) + \frac{V_0}{c^2} (x_{\mathbf{R}} - x_{\mathbf{Q}}) \right], \quad (x''_{\mathbf{R}} - x''_{\mathbf{Q}}) = \gamma [(x_{\mathbf{R}} - x_{\mathbf{Q}}) + v_0 (t_{\mathbf{R}} - t_{\mathbf{Q}})]. \quad (\text{I.19})$$

En forma similar, reemplazando la segunda ecuación en la primera y teniendo en consideración los valores de algunas de las variables, obtenemos

$$x''_{\mathbf{R}} = 0 = x''_{\mathbf{Q}}, \quad (t''_{\mathbf{R}} - t''_{\mathbf{Q}}) \equiv T'' = \gamma \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right) (t_{\mathbf{R}} - t_{\mathbf{Q}}). \quad (\text{I.20})$$

$$\text{Como } T'' = \frac{1}{\gamma} (t_{\mathbf{R}} - t_{\mathbf{Q}}),$$

y lo que tarda en el viaje de ida es igual a lo que tarda en volver

$$T'' = T' = \frac{1}{\gamma} T$$

Entonces

$$[T' + T''] = 2T' = \frac{2T}{\gamma} \text{ como } \gamma > 1 \text{ entonces } 2T' < 2T. \quad (\text{I.21})$$

El tiempo transcurre más lentamente (se dilata) para el gemelo viajero. Llega más joven que su contraparte. No hay ambigüedad aquí.

Ejemplo

El tripulante de un avión lanza un destello desde el piso al techo, donde rebota y retorna al punto de partida.

Una persona en tierra sigue la trayectoria del rayo de luz rebotando en el avión, que se desplaza con una velocidad relativa V_0 respecto del observador en tierra. Ver Fig. (??).

Se desea conocer la relación entre los tiempos de rebote medidos por el tripulante y el observador en tierra.

Solución

La situación es similar a los ejemplos previos de esta sección salvo que la propagación del rayo de luz es perpendicular a la dirección de la velocidad.

Hay dos factores que contribuyen a que este problema sea más directo de resolver. Primero, las longitudes perpendiculares a la velocidad relativa NO se contraen como ocurre con las longitudes que se alinean con la velocidad relativa. Ver Postulado 5 en sección(I.7). Existe una forma fácil de visualizar, ése es el segundo factor.

En el avión el destello parte de O' , rebota en L y vuelve al punto de partida O' .

Como ya establecimos que la altura L es la misma para ambos observadores, podemos dibujar la trayectoria del rayo de luz vista desde el observador en tierra.

Por otra parte, cada uno de los pasos representados en la Figura (I.27) es un evento en el sistema de Laboratorio. Cuando sale el rayo (primera figura a la izquierda), cuando llega al espejo superior (figura del medio) y la posición del origen O' del sistema S' , son tres eventos referidos al sistema de Laboratorio. Con ellos podemos dibujar un triángulo rectángulo y aplicar el teorema de Pitágoras:

$$(u \Delta t_s)^2 + L^2 = (c \Delta t_s)^2,$$

donde $u \Delta t_s$ es la distancia que recorre la nave en el intervalo Δt_s , tiempo que tarda el rayo en ir desde la base al espejo superior de la nave medida en S . L es la distancia entre espejos en S' (que es la misma que en S) y $c \Delta t_s$ es la distancia que recorrió el rayo de luz de acuerdo a S .

Si consultamos al astronauta acerca del tiempo que empleó el rayo en ir desde el espejo inferior (origen O') hasta el espejo superior nos indica que es $\Delta t_{s'} = L/c$. Reemplazando este valor en la

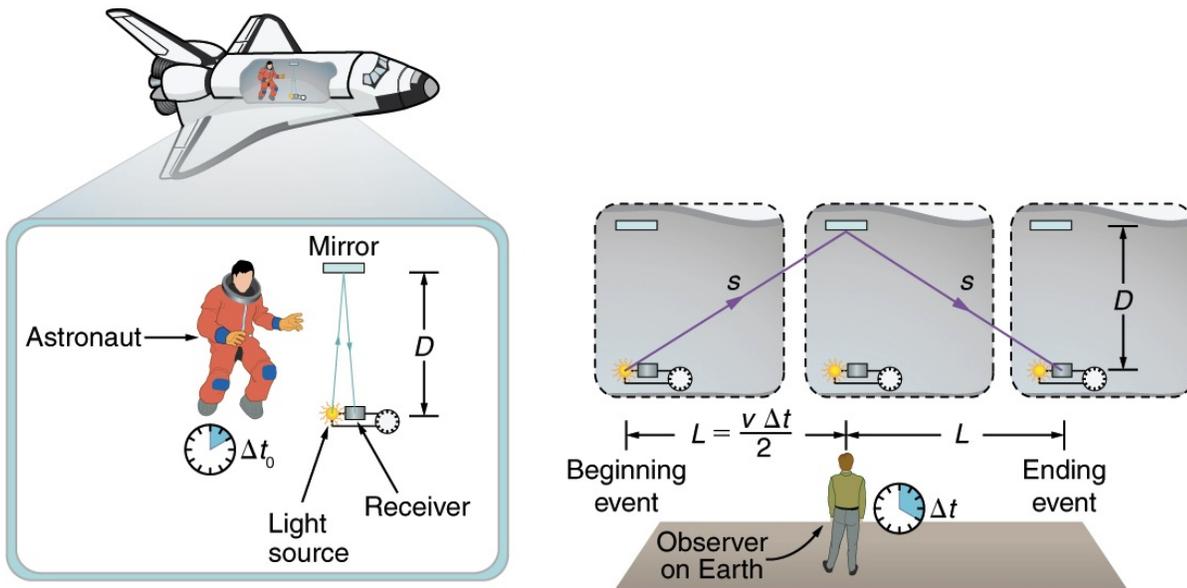


Figura I.27: En el sistema S' , (cohete), el rayo sale y vuelve al origen después de rebotar en el espejo superior. El mismo fenómeno, observado desde tierra permite ilustrar el camino del rayo de luz y la aplicación directa de los principios de la relatividad especial.

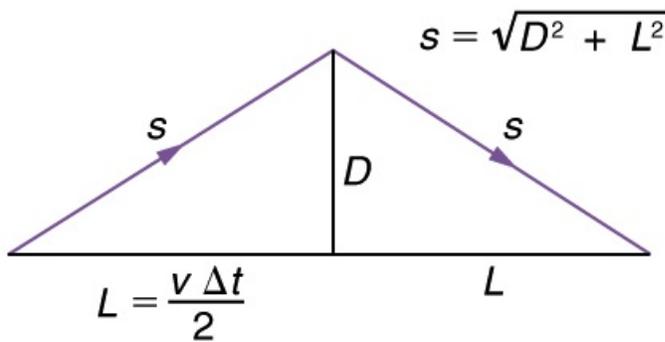


Figura I.28: Geometría de la trayectoria del rayo de luz visto por el observador en tierra.

ecuación anterior y despejando Δt_s en función de $\Delta t_{s'}$, tenemos:

$$\Delta t_{s'} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Delta t_s, \quad \text{o bien} \quad \Delta t_s = \gamma \Delta t_{s'}$$

Conclusión : $\Delta t > \Delta t'$. El tiempo en S transcurre más rápido que en S' .

□

I.7. Postulados de la Relatividad Especial

Veamos las bases de la cinemática de la relatividad especial. Aquí se ignora todo tipo de interacción con otras partículas o fuerzas: gravitación, eléctrica... .

Para construir el andamiaje de cada observador inicial sólo permitiremos la emisión y recepción de rayos de luz por parte de estos observadores. esta emisión o absorción no los afecta dinámicamente: no cambian de posición ni adquieren velocidad.

A continuación estableceremos los postulados de la Relatividad Especial.

Postulado 0 *El espacio es homogéneo e isótropo.*

Esta afirmación indica que el resultado del experimento no depende del lugar dónde se realizó (homogeneidad del espacio). Tampoco interesa la dirección donde apuntemos con nuestros ejes coordenados, todas las direcciones son equivalentes (isotropía).

En la superficie de la tierra existe una dirección preferida dictada por la gravitación. Como señalamos, no la consideraremos. La homogeneidad e isotropía del espacio ha sido verificada con un error menor que $\pm 2 \times 10^{-15}$ [?].

Postulado 1 *Un movimiento no-acelerado o inercial es el único que puede determinarse en forma absoluta, sin referencia a ningún otro observador.*

Un *sistema inercial* ocurre cuando cada partícula de prueba que está inicialmente en reposo, permanece en reposo y cada partícula de prueba que está inicialmente en movimiento continúa en movimiento, sin cambio en su rapidez o dirección.

No existe un sistema inercial, existen sólo buenas aproximaciones. La superficie de la tierra es considerada como un sistema inercial y en la mayoría de los casos se comporta de esa forma. Sin embargo, sabemos que está girando con respecto a un eje diametral y también en torno al Sol.. etc.

Postulado 2 *Existen infinitos sistemas inerciales. Cada sistema que se desplaza con respecto a uno inercial con velocidad constante, constituye otro sistema inercial.*

Las leyes físicas deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales. Si cambian al ir de un sistema a otro podríamos singularizar uno de ellos y de esta forma definir un sistema maestro con respecto al cual referir toda la física. Esto no se puede llevar a cabo, por tanto, debemos aceptar que los sistemas inerciales son indistinguibles.

Postulado 3 *La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Es una constante universal de la naturaleza.*

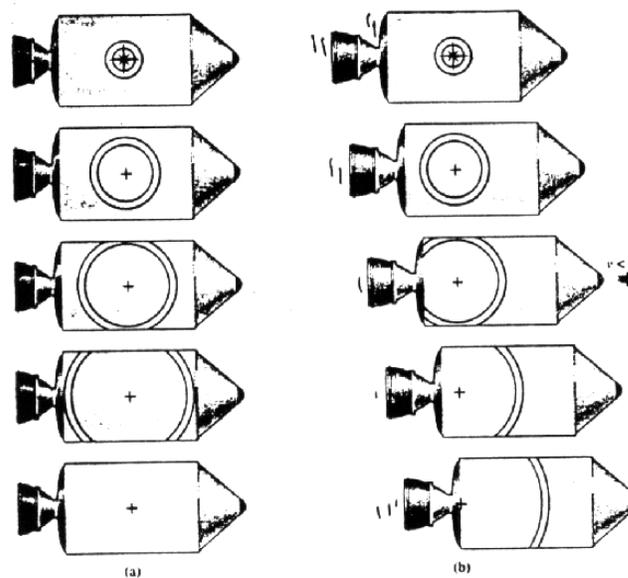


Figura I.29: La propagación de un pulso de luz visto por un observador en reposo en la nave (izquierda, son los círculos concéntricos) y el pulso visto por un observador en reposo fuera de la nave (figura derecha, el centro del círculo permanece en reposo con respecto al sistema de referencia del observador). Para éste el pulso se propaga con la velocidad c y alcanza la cola de la nave antes que la nariz, a diferencia de lo observado por el piloto de la nave.

Este postulado va mucho más allá del resultado experimental establecido en el año 1887 por Michelson y Morley. Estos dos físicos norteamericanos intentaron medir el cambio que debería experimentar la velocidad de la luz al propagarse a favor y en contra del movimiento de la tierra. El resultado del experimento resultó ser *nulo*: no encontraron una diferencia *detectable* entre las velocidades en los distintos sentidos. Experimentos más recientes, con mayor precisión, han llegado a la misma conclusión [?].

Este experimento no se ajusta a las transformaciones de Galileo (I.1). Si la velocidad de la luz en un sistema de referencia es c , en el sistema que se mueve con una velocidad V con respecto al anterior, de acuerdo a las ecuaciones (I.1), debería ser $c' = c \pm V$, dependiendo del sentido en que se traslade.

Postulado 4 *En relatividad especial la distancia espacial queda definida como un número real y positivo asociado a dos eventos simultáneos. Este número es la distancia Euclídea entre estos dos eventos.*

Finalmente:

Postulado 5 *El largo de una barra que se desplaza en forma perpendicular a la velocidad*

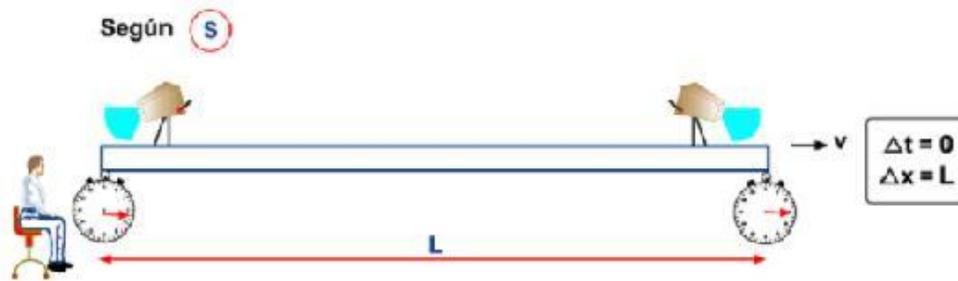


Figura I.30: Los dos extremos de la barra son fotografiados simultáneamente en el sistema S. El largo de la barra es la distancia euclídea entre ambos eventos.

relativa entre dos sistemas de referencia inerciales, no experimenta cambio alguno. Su longitud es la misma medida en cualquiera de los sistema de referencia.

Ejemplo

A partir de la figura que se acompaña, Los autores J. A. Wheeler y R. Taylor en [1], argumentan que en el contexto de la relatividad especial no puede existir un cambio en las longitudes perpendiculares de una barra que se desplaza perpendicular a la velocidad relativa de los sistemas de referencia inerciales. Complete Ud. la explicación.

Solución

Dos observadores inerciales deben alcanzar las mismas conclusiones acerca de un evento. Por ejemplo, si un observador ve que una luz se enciende, otro observador debe percibir el mismo evento. No puede ocurrir que en una ampolla se encienda en un sistema inercial y no lo haga en otro.

En este ejemplo, consideraremos si el carro de la Figura permanece sobre los rieles, dentro de los rieles o fuera de ellos. En ambos sistemas inerciales se debe alcanzar la misma conclusión.

Esta es una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que una longitud perpendicular al movimiento relativo se acorta debido al movimiento. Esto indica que si mido un largo L de una barra en mi sistema de referencia, esa misma barra si se desplaza con respecto a mi sistema de referencia, y mido su largo, éste resulta ser menos que el original L .

Apliquemos esto al carro de la Figura. Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo a los rieles y el otro fijo al carro del tren. Lo que mediremos es el ancho de las ruedas del carro (vistas de frente en la Figura). En reposo las ruedas del carro permanecen sobre los rieles.

Consideremos el acortamiento propuesto en el párrafo anterior. En este caso un sistema de referencia fijo a los rieles ve (por ejemplo) que el ancho de los carros (que normalmente viajan a lo largo de los rieles, es decir entrando o saliendo de la hoja) se acorta. Por tanto este observador afirma que el tren en movimiento cae en el interior de los rieles.

Otro observador inercial, fijo al carro observa que los rieles (o mejor los durmientes), viajan y por tanto la distancia entre ellos se acorta y las ruedas del tren caen fuera de los rieles. Para un observador inercial el carro cae dentro de los rieles y para el otro observador inercial, el carro cae fuera de los rieles.



Figura I.31:

Claramente esto es contradictorio. O el carro cae dentro o cae fuera, pero no ambos.

La salida a esta contradicción es que NO ocurre ni acortamiento, como se supuso acá, ni alargamiento, alternativa que no se consideró pero que conduce a la contradicción señalada).

□

Esta conclusión descansa en la premisa que los sistemas inerciales son indistinguibles el uno del otro.

Este postulado puede entonces considerarse que se desprende de los anteriores.

I.8. Transformaciones de Lorentz: Método Analítico.

I.8.1. Transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas de referencia: S , en el cual nos ubicamos y S' , que se desplaza con rapidez v con respecto a S . El vector velocidad \vec{v} , quiebra la isotropía del espacio. Seleccionamos la dirección de la velocidad como el eje x y nos restringimos a este caso particular.

Suponemos que la relación entre las coordenadas de un evento visto desde el sistema S y desde S' , sea lineal en las coordenadas. Suponemos también por simplicidad que los orígenes de coor-

denadas de ambos sistemas de referencia coinciden $x = x' = 0$ en $t = t' = 0$. Analicemos sólo la coordenada x' por ahora.

$$x' = a x + b t, \quad (\text{I.22})$$

donde a y b son funciones de la velocidad, $a = a(v)$ y $b = b(v)$.

Considere una partícula ubicada en el origen de coordenadas del sistema S' , por definición: $x' = 0$. De manera que la ecuación anterior nos da

$$0 = a x + b t. \quad (\text{I.23})$$

donde x representa la posición del origen de coordenadas de S' en el instante t .

De aquí obtenemos $0 = a x + b t$, de modo que

$$\frac{x}{t} \equiv \frac{dx}{dt} = v = -\frac{b}{a}.$$

Las funciones $a(v)$ y $b(v)$ están relacionadas. La transformación general de coordenadas toma la siguiente forma:

$$x' = a(v) (x - v t). \quad (\text{I.24})$$

Utilizando el Postulado que afirma que todos los sistemas inerciales son indistinguibles entre sí deducimos que esta misma relación debe ser válida para el sistema S' :

$$x = a(|v|) [x' + v t], \quad (\text{I.25})$$

donde hemos supuesto que $a(v) \equiv a(|v|)$. El factor multiplicativa $a(v)$ depende del módulo de la velocidad relativa.

Consideremos ahora la constancia de la velocidad de la luz. Si en el instante $t = 0 = t'$ enviamos un pulso de luz en el sentido positivo del eje x , en cada uno de los sistemas inerciales se debe cumplir:

$$x' = c t' \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S'$$

$$x = c t \quad \text{pulso con velocidad de la luz en } S.$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones en I.24 y I.25 obtendremos una expresión para la función $a(v)$, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
 ct' &= \alpha(v)(x - vt) = \alpha(v)(ct - vt) \\
 ct &= \alpha(v)(x' + vt') = (ct' + vt') \\
 \Rightarrow t' &= \alpha(v)\left(1 - \frac{v}{c}\right)t \\
 t &= \alpha(v)\left(1 + \frac{v}{c}\right)t'
 \end{aligned}$$

Reemplazando la expresión de t en la última ecuación de t' , podemos obtener $\alpha(v)$.

De estas igualdades se desprende

$$\boxed{\alpha(v) \equiv \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (\text{I.26})$$

donde definimos $\alpha(v) \equiv \gamma$, por convención.

En definitiva la transformación I.24, se escribe:

$$x' = \gamma(v)(x - vt). \quad (\text{I.27})$$

Para obtener la transformación del tiempo operamos algebraicamente con las mismas transformaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma(x' + vt') \\
 x &= \gamma[\gamma(x - vt)] + \gamma vt'
 \end{aligned}$$

Si despejamos t' de la ecuación anterior, obtenemos:

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma v}\right)x.$$

Re-escribimos esta última ecuación, utilizando las siguientes igualdades:

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2,$$

con $\beta \equiv v/c$. Finalmente la expresión para t' es:

$$t' = \gamma \left\{ t - \frac{v}{c^2} x \right\}. \quad (\text{I.28})$$

Las ecuaciones I.24 y I.25, son las transformaciones de Lorentz. Dadas las coordenadas de un evento en un sistema S , podemos obtener las coordenadas en el sistema S' a través de estas ecuaciones.

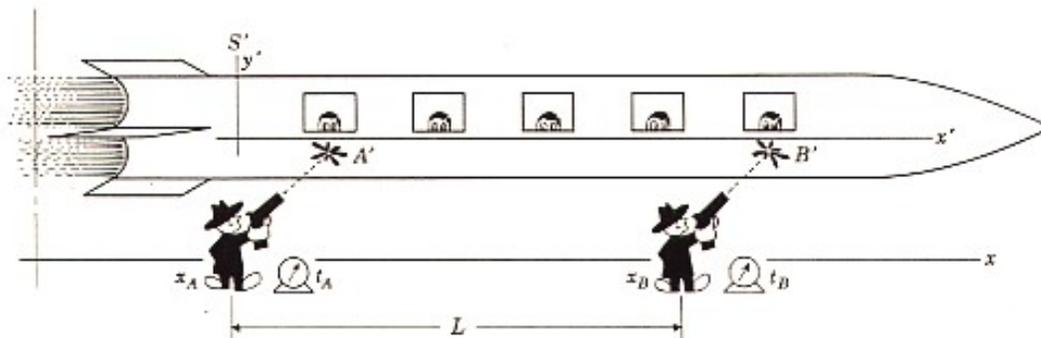
Las coordenadas perpendiculares a la velocidad y y z , se transforman igual que en las transformaciones de Galileo.

Note que para $v \ll c$ se recuperan las transformaciones de coordenadas de Galileo.

I.8.2. El significado de VER y MEDIR en la Relatividad de Einstein

Definimos VER cuando todos los fotones emitidos desde el objeto que nos interesa llegan simultáneamente a nuestro ojo. Es claro que los puntos más alejados del ojo deben emitir antes los pulsos de luz para llegar al mismo tiempo que aquellos ubicados más cerca. También en el caso de objetos lejanos o que el tamaño del objeto es pequeño comparado con la distancia que lo separa del ojo, se considera que los rayos de luz emergen paralelos.

MEDIR es una operación que debe considerar: un sistema de referencia inercial dado con una red de relojes sincronizados, cada uno con una cámara que grabe un evento, el tiempo y sus coordenada. El observador en este sistema recopila los datos y compara. Por ejemplo si quiere medir el largo de una barra en movimiento con respecto a su sistema de referencia, debe ubicar dos fotos, una en que aparezca el comienzo de la barra y otra con el otro extremo de la misma barra. Ambas deben indicar el mismo tiempo (simultaneidad). La diferencia entre las coordenadas permite conocer el largo de la barra.



Ejemplo

Un tren S' se mueve con velocidad $V = 0.6 c$ en la dirección $+x$ con respecto a un observador en reposo en el sistema S . Dos rufianes con sendos atomizadores, se ubican a $L = 5$ m de distancia entre ellos, en el sistema S . Ambos rufianes disparan simultáneamente, de acuerdo a relojes sincronizados en el sistema S . Al gatillar el atomizador aparecen 2 manchas A' y B' en el tren. Los rufianes aseguran que la distancia entre las manchas es $L = 5$ m. Consideramos que la distancia que separa los atomizadores del tren es *despreciable*).

a.- Los relojes de los pasajeros del tren están sincronizados en su sistema de referencia. De acuerdo a estos pasajeros ¿Quién disparó primero?

b.- ¿Cuál es la distancia entre las dos manchas medidas por un observador en *reposo con respecto al tren*?

c) ¿Cuál es la distancia entre los dos rufianes, de acuerdo a los pasajeros en *reposo con respecto al tren*?

Respuesta

a.- Del gráfico I.32 se desprende que los eventos A y B son simultáneos en el sistema de los rufianes. En el sistema de la nave S' , la simultaneidad está fijada por la pendiente del eje x' . Los eventos A y C son simultáneos. De igual forma, el evento B y t'_B son simultáneos en S' . Con estos datos podemos calcular la diferencia de tiempo con la cual dispararon los rufianes de acuerdo a los pasajeros en la nave. Vemos que B ocurre antes que A en S' .

Calculemos esta diferencia de tiempo. En el sistema fijo a la tierra los eventos A y B son simultáneos y ocurren a una distancia L

$$\Delta x \equiv x_B - x_A = L, \text{ y } \Delta t = t_B - t_A = 0.$$

Por otro lado, su equivalente en S'

$$\Delta t' \equiv t'_B - t'_A = t'_B - 0 = t'_B.$$

La transformada de Lorentz entre estas coordenadas es

$$\Delta t' = t'_B = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\gamma \frac{v L}{c^2}.$$

$$\text{Evaluamos } \Delta t' \equiv [t'_B - t'_A] = -\gamma \frac{L v}{c^2}.$$

$$c t'_B = 0 - 5 \frac{3}{5} \frac{5}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$t'_B = -1,25 \times 10^{-8}.$$

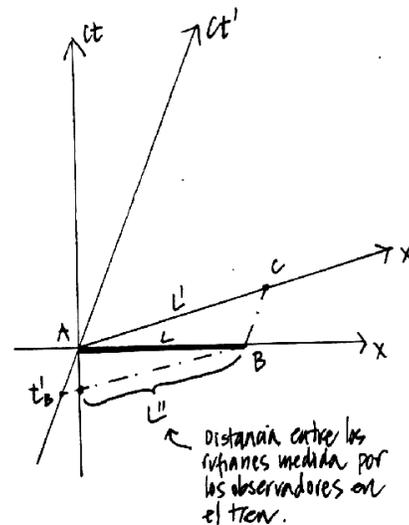


Figura I.32: Gráficos s-t para pasajeros y rufianes.

Las dos manchas una vez en el tren se propagan rígidamente con él, es decir su línea de universo nace en A y B pero a partir de entonces se propaga paralela a la línea t' . La distancia entre las

manchas, medida con un metro por un observador en la tren es AC , que definimos como L' .

¿Cuánto vale L' ?

i) *Primer método.*

Usamos las transformaciones de Lorentz para relacionar las coordenadas del evento C en el sistema S' con las coordenadas del mismo evento en S ,

$$x'_C = \gamma [x_C - V t_C],$$

en el sistema S , x_C es la posición del extremo de la barra en el instante t_C con $t_B = t_A = 0$,

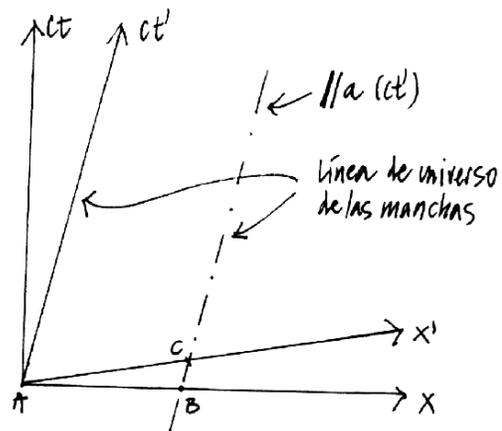
$$x_C = x_B + V t_C, \text{ además } x_B \equiv L, \quad x_C = L + V t_C.$$

$$\text{de modo que: } x'_C = \gamma [L + V t_C - V t_C] = \gamma L \implies L' = \gamma L.$$

ii) *Segundo método.*

Las manchas una vez instaladas en la nave permanecen siempre a la misma distancia entre ellas. La línea de universo de ambas son la recta ct' y la recta que cruza el evento C y B . De hecho B es el evento donde aparece la mancha en la nave. La coordenada en S' de estos puntos es $x'_B = x'_C = L'$. Notando que en S : $x_B \equiv L$, la distancia entre los rufianes, se desprende que tenemos las coordenadas del evento (o punto, si Ud. prefiere) B en ambos sistemas de referencia. De acuerdo al protocolo de la relatividad especial, sus valores deben estar relacionadas mediante la transformación de Lorentz correspondiente. Así

$$L' = \gamma L.$$



$x'_B = \gamma [x_B - V t_B]$, pero $t_B = 0, \implies L' = \gamma L$. **Figura I.33: Distancia entre manchas. Las manchas comienzan en A y B . Antes no existen.**

$L' = 1,25 L = 6m$. Note que $AC > AB$.

c.- De acuerdo al enunciado, la distancia que separa los dos rufianes en la estación (Fig.I.34) es $x_B - x_A = L$. La línea de universo en S de cada uno de ellos es una línea vertical en el diagrama de espacio-tiempo I.34. Una coincide con el eje ct y la otra, paralela, cruza el evento B .

De acuerdo a los pasajeros del tren la distancia entre los rufianes medida en forma simultánea desde su sistema de referencia es la distancia $AC = L''$, (ver figura I.34), que es el eje x' y corresponde a las líneas de simultaneidad en S' .

Por la forma como planteamos la medición, ocurre que $x_A = x'_A = 0$, es el origen común a ambos sistemas de referencia. De este modo para calcular el valor de L'' solo se requiere el valor de la coordenada x'_C .

Revisemos otros datos conocidos a través de la geometría: $t_B = t_A = 0$. De igual forma $t'_C = t'_A = 0$. Además $x'_C = L''$. También $x_B = L = x_C$.

$$x'_C = \gamma [x_C - V t_C],$$

$$x'_C = x_C - x'_A = L'',$$

$$L'' = \gamma [L - V t_C]$$

$$\text{pero } t'_C = \gamma \left[t_C - \frac{V}{c^2} x_C \right] = 0.$$

$$t_C = \frac{V}{c^2} L$$

$$L'' = \gamma \left[L - \frac{V^2}{c^2} L \right] = \frac{1}{\gamma} L. \square$$

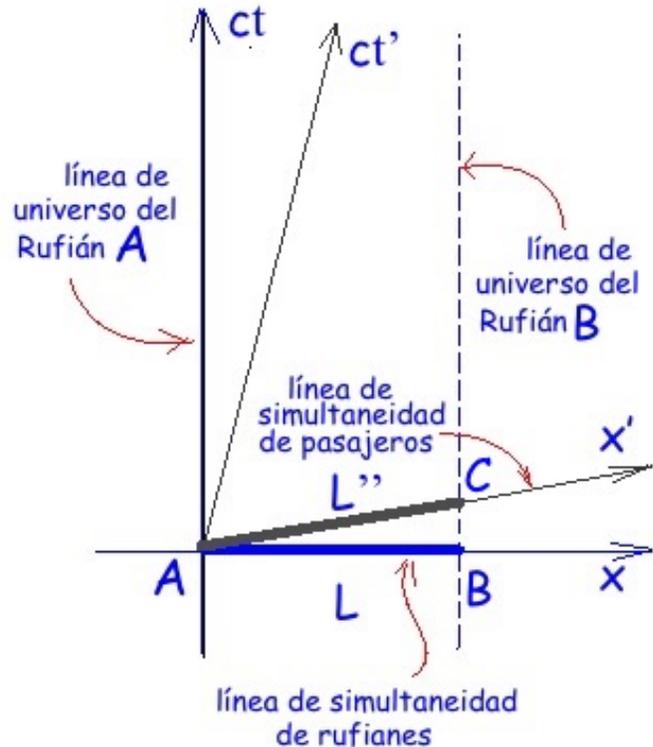


Figura I.34: Distancia entre los rufianes de acuerdo a los pasajeros en el tren.

Ejemplo

Sean S y S' , dos sistemas inerciales que coinciden en un instante. S' se desplaza con una velocidad V constante con respecto a S .

En el origen de S' existe una pantalla de cine que proyecta una película de T' minutos, de duración de acuerdo a un observador ubicado en el origen de S' .

¿Cuánto dura la película para un observador en situado en el origen de S ? Suponga $V = 0,6c$.

Solución

Para concretar ideas supongamos que no se proyecta una película sino que el observador en S' envía regularmente señales 0 ó 1 a su amigo en S . Es la misma idea sólo que la película contiene más información.

El diagrama $s-t$ ilustra la situación. T_{End} representa el tiempo total de la duración de la comunicación en el sistema fijo. Conocemos las coordenadas del evento P , el instante en que termina la comunicación, en el sistema móvil. Con esta información podemos encontrar T_P y ΔT .

$x_P = V T_P$. Utilizando las transformaciones de Lorentz y recordando que $x'_P = 0$,

$$\mathbf{T}_P = \gamma [\mathbf{T}'_P + V \mathbf{x}'_P / c^2] \Rightarrow \mathbf{T}_P = \gamma \mathbf{T}'_P$$

Como $\mathbf{T}_{\text{End}} = \mathbf{T}_P + \Delta \mathbf{T}$, procedemos con este último término.

$\Delta \mathbf{T}$ es lo que tarda la señal en viajar desde **P** a **Q**. La distancia recorrida es x_p , de modo que $x_p = c \Delta \mathbf{T}$, despejando $\Delta \mathbf{T}$ y reemplazando x_p por el valor obtenido previamente, se llega a $\Delta \mathbf{T} = [V \mathbf{T}_P] / c = [V \gamma \mathbf{T}'_P]$.

$$\mathbf{T}_{\text{End}} = \mathbf{T}_P + \Delta \mathbf{T} = \gamma \mathbf{T}'_P + [V \gamma \mathbf{T}'_P] / c.$$

Escribiendo explícitamente la expresión de γ y simplificando

$$\mathbf{T}_{\text{End}} = \left[\frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \mathbf{T}'_P = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{T}'_P.$$

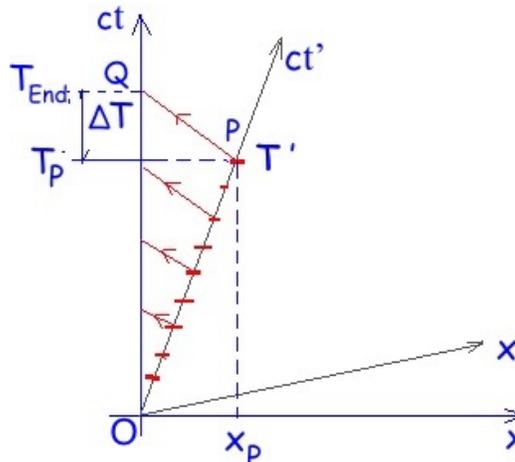


Figura I.35: Diagrama del mecanismo propuesto. El evento **P** indica el fin del envío de los mensajes. **Q** representa el último mensaje recibido por el observador en reposo. Esto último ocurre $\Delta \mathbf{T}$ segundos más tarde.

Notamos que $\mathbf{T}_{\text{End}} > \mathbf{T}'_P$.

Podemos relacionar este resultado con el efecto Doppler. El observador en movimiento envía una señal al observador en reposo.

La señal enviada tiene una frecuencia $\nu_{\text{fuente}} = 1 / \mathbf{T}'_P$.

El observador en reposo la recibe con una frecuencia $\nu_{\text{receptor}} = 1 / \mathbf{T}_{\text{End}}$.

Acá ocurre que $\nu_{\text{receptor}} < \nu_{\text{fuente}}$.

Este fenómeno lo observamos en la radiación que recibimos desde las galaxias lejanas que se están alejando de nuestra galaxia. Como se están alejando la radiación que recibimos, de acuerdo a nuestro resultado, llega con una frecuencia más baja que lo esperado. La frase que ilustra este fenómeno es *corrimiento al rojo*. Este resultado supone, con una muy fuerte base experimental, que los átomos que habitan estas galaxias lejanas son los mismos que tenemos en la Tierra.

Vamos a volver a este resultado al estudiar el efecto Doppler. En verdad, este resultado es el efecto Doppler.

I.9. Composición de Velocidades

De qué se trata esto. Si el sistema **S'** se desplaza con velocidad **V** con respecto a un sistema **S**. Supongamos que en **S'** existe un móvil que se desplaza, con respecto a este sistema, con una velo-

cidad $U' = \Delta x' / \Delta t'$. La pregunta es: ¿Cuál es la velocidad de este móvil medida por el observador S , $\Delta x / \Delta t$?

Esto debe ser motivo de análisis. Basta pensar que si $V = 0.6c$ y $U = 0.6c$, y las velocidades se sumaran directamente, el observador en S mediría una velocidad de $1.2c$, en abierta contradicción con los postulados de la relatividad especial.

Distinguiremos dos casos. El más simple es el caso en que las velocidades introducidas en el párrafo anterior apuntan en la misma dirección. En seguida veremos el caso en que estas velocidades son perpendiculares.

I.9.1. Velocidades Paralelas.

A continuación incluimos una derivación que relaciona las dos velocidades que se mencionan en el párrafo anterior.

Considere un cuerpo P que viaja con velocidad U' con respecto a un sistema S' . A su vez, este sistema viaja con una velocidad V con respecto al sistema S que consideramos en reposo. Queremos calcular la velocidad U de este cuerpo con respecto al sistema S .

Designamos las coordenadas de P con respecto a S' como (t'_p, x'_p) . Las coordenadas de este punto con respecto al sistema S son (t_p, x_p) . La relación entre ambas coordenadas está dada por la transformación de Lorentz (donde hemos suprimido el subíndice p).

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - V\Delta t), \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x).\end{aligned}$$

Por definición

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad u = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \equiv u' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$u' = \frac{u - V}{1 - \frac{V \cdot u}{c^2}}$$

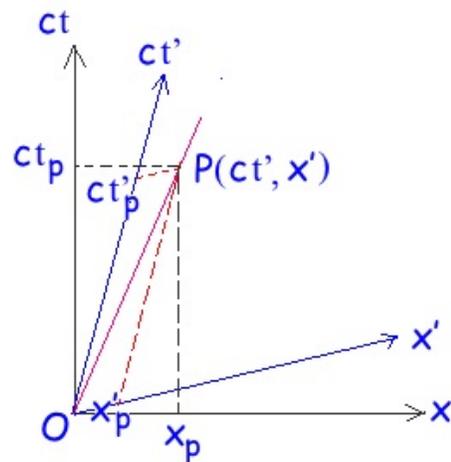


Figura I.36: Diagrama $s-t$ de la composición de velocidades. El evento P indica la posición de la partícula en un cierto instante.

Despejando U de esta ecuación, recordando que U es $\parallel U'$ y que ambos son positivos,

$$U' \left(1 - \frac{V \cdot U}{c^2}\right) = U - V,$$

$$\left(1 + \frac{V \cdot U'}{c^2}\right) U = U' + V,$$

$$U = \frac{U' + V}{1 + \frac{V \cdot U'}{c^2}}.$$

Esta es la ley de composición de velocidades.

Es directo comprobar que si $U' = c$, y $V = c \Rightarrow U = c$.

Esta expresión obtenida para la composición de velocidades relativistas, nos garantiza que su suma no arroja valores mayores que la velocidad de la luz c .

Velocidades Perpendiculares

Supongamos que la partícula en S' se mueve en un eje perpendicular a la dirección de de la velocidad relativa de este sistema con respecto a S .

En este caso usaremos el Postulado # 5 planteado previamente: las barras perpendiculares al movimiento mantienen su largo inicial. No se ven afectadas por el movimiento: $\Delta y' = \Delta y$.

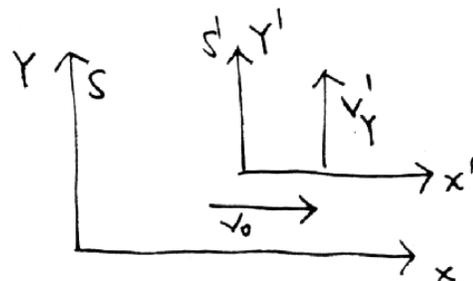
Repetiendo el protocolo del caso anterior, transformaciones de Lorentz de las diferencias entre estos dos sistemas de referencia,

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left[\Delta t - \frac{V_0 \Delta x}{c^2} \right]},$$

sacando Δt como factor común en el denominador del lado derecho y definiendo

$$V'_y \equiv \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \quad y \quad V_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \text{obtenemos:}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left[1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right]} = \gamma V_y.$$



Esta es la fórmula que relaciona una velocidad perpendicular a la dirección de movimiento en el sistema S' , con la velocidad medida desde el sistema de referencia en reposo.

Ejemplo

Un sistema S' está en movimiento uniforme con respecto a otro S . En S' se ubica una barra que forma un ángulo θ' con respecto a la dirección del movimiento.

¿Cuál es la dirección de la barra medida por un observador en S ?

Solución

De la figura se obtiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta y'} = \cot \theta'.$$

Como $\Delta y'$ es perpendicular al movimiento relativo, ocurre que: $\Delta y' = \Delta y$.

El valor de $\cot \theta$, que refleja la inclinación de la barra en el sistema S es $\Delta x/\Delta y$. Se requiere conocer la relación entre $\Delta x'$ y Δx . I.37:

Como $\Delta y'$ permanece constante, sólo debemos analizar el cambio de $\Delta x'$ al cambiar de sistema de referencia. Esto se representa en el cambio de la coordenada de A (ver Fig. I.9.1):

$$x'_C \equiv x'_A, y\Delta t \equiv (t_B - t_A) \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x.$$

$$x'_A = \gamma x_A \quad (\text{puesto que } \Delta t = 0 \text{ en } S)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x'}{\gamma \Delta y'} = \frac{1}{\gamma} \cot \theta', \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \cot \theta$$

$$\cot \theta = \sqrt{1 - \beta^2} \cot \theta', \quad \cot \theta' = \gamma \cot \theta.$$

Ejemplo

Si apuntamos con un telescopio a una estrella fija, mostraremos aquí que debemos inclinar la orientación del telescopio debido al movimiento relativo de la Tierra con respecto a la estrella. Este fenómeno se denomina *aberración de la luz* y determina el cambio en la orientación del telescopio para considerar la dirección de la propagación de la luz, al pasar de un sistema en reposo a otro en movimiento relativo.

Esto ocurre si el ángulo de incidencia no es paralelo a la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia.

Calcule la inclinación θ' con que debe posicionar el telescopio, de acuerdo a la Figura

a.- Calcule el valor del ángulo θ' , en forma no-relativista: sin usar relatividad especial.

b.- Calcule θ' usando relatividad y compare con el resultado anterior.

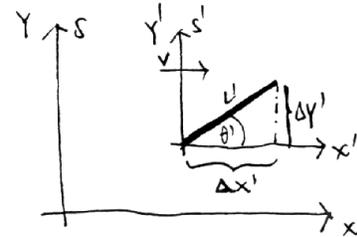


Figura I.37

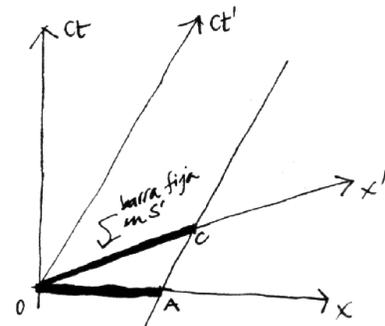


Figura I.38: Sólo $\Delta x'$ cambia al pasar del sistema S' a S .

Solución

a.- Debemos usar las transformaciones de coordenadas establecidas por Galileo. El tiempo vuelve, momentáneamente, a ser absoluto. Este es la aproximación no-relativista. La aberración de la luz es la pequeña corrección en el ángulo del telescopio $\theta \rightarrow \theta'$. Este efecto se genera debido a la velocidad del telescopio con respecto a la estrella fija. Se trata de alinear la dirección del telescopio con la dirección aparente del rayo de luz que lo atraviesa. El ángulo θ está determinado por la posición relativa de la estrella y el telescopio. Acá es un dato del problema para el cálculo de la aberración.

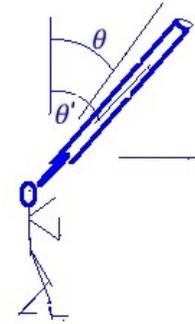


Figura I.39

Calculamos la composición de la velocidad de la luz y la del telescopio para obtener la dirección efectiva del rayo de luz con respecto al telescopio. Como se indica en la figura I.41 la Tierra se está acercando a la estrella, la velocidad relativa *aumenta*: $(u + c \text{ sen } \theta)$. Recordemos que no consideramos acá los postulados de la relatividad especial.

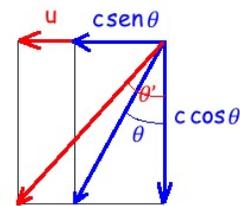


Figura I.40: Diagrama de la superposición de velocidades.

$$\tan \theta' = \frac{u + c \text{ sen } \theta}{c \text{ cos } \theta}$$

$$\tan \theta' = \left[\tan \theta + \frac{u}{c \text{ cos } \theta} \right]$$

Las velocidades se suman usando las transformaciones de galileo I.1. siguiendo a En forma no-relativista en forma usual.

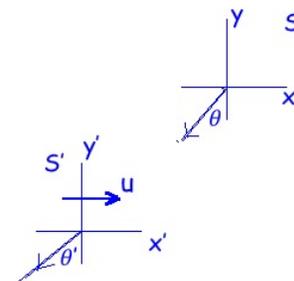


Figura I.41: Esquema de los sistemas **S** (estrella fija) y **S'** (Tierra). Se definen los ángulos θ y θ' .

b.- En el formalismo relativista debemos usar la suma relativista de las velocidades:

$$V'_x = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u V_x}{c^2}} \quad V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left[1 - \frac{u V_x}{c^2} \right]}$$

$$V_x = -c \text{ sen } \theta \quad V_y = -c \text{ cos } \theta$$

$$V'_x = -\frac{[c \operatorname{sen} \theta + U]}{1 + \frac{U \operatorname{sen} \theta}{c}}, \quad V'_y = -\frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{U \operatorname{sen} \theta}{c}\right]} \quad (\text{I.29})$$

Se puede comprobar que $(V'_x)^2 + (V'_y)^2 = c^2$. La inclinación del telescopio está determinada por tangente el ángulo con la vertical y que corresponde a la razón entre la componente horizontal de la velocidad y la componente vertical

$$\tan \theta' = \frac{V'_x}{V'_y} = \frac{U + c \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{U \operatorname{sen} \theta}{c}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{c \cos \theta}{\gamma \left[1 + \frac{U \operatorname{sen} \theta}{c}\right]} \right\}}$$

$$\tan \theta' = \gamma \frac{U + c \operatorname{sen} \theta}{c \cos \theta} = \gamma \left[\tan \theta + \frac{U}{c \cos \theta} \right]. \quad (\text{I.30})$$

La diferencia con el tratamiento no-relativista es sólo un factor γ en frente de la expresión.

Ejemplo

La contracción del largo de un objeto no ha sido medida en un laboratorio hasta hoy. Un análisis de este fenómeno aparece en el artículo *The invisibility of length contraction*, en el número de Agosto 2019, de la revista Physics World.

Esto marca una diferencia con la dilatación del tiempo, que es un fenómeno usual en el funcionamiento del GPS.

Este ejemplo, basado en la referencia mencionada, ilustra lo complejo que se torna *ver* esta contracción del largo. Adelantamos la respuesta para este caso simple: un marco que se mueve a una velocidad relativista en una dirección paralela a uno de sus ejes, no se *ve* contraído en la dirección del movimiento si no *rotado en un cierto ángulo*.

Son dos los efectos a considerar: la contracción del largo y el hecho que dos fotones (o pulsos de luz) que salen simultáneamente de un objeto *no* impactan al ojo -o al detector de una cámara fotográfica-, en forma simultánea. Para que el ojo *vea* o la cámara grabe, los fotones deben llegar simultáneamente. Este efecto, pasado por alto, incluso por Einstein, fue analizado por primera vez en 1957 por un físico americano llamado Terrell y, en forma independiente, por un matemático inglés Roger Penrose en 1959. El efecto se denomina hoy *Terrell-Penrose*.

A continuación con la ayuda de unas figuras describimos este fenómeno.

Considere un cuadrado de lado L que se traslada con rapidez U hacia la derecha. Este será nuestro sistema S' . Un observador en reposo (sistema S), se ubica en la dirección perpendicular a la velocidad relativa y a una gran distancia del cuadrado. (Esto no se refleja en la Figura adyacente) El observador *ve* el cuadrado a través de lo que se indica como *rayos de luz* emergiendo del lado más cercano del cuadrado. Como se ubica a gran distancia del cuadrado, dibujamos todos los rayos de luz paralelos y en la dirección perpendicular a la rapidez U . es una buena aproximación que simplifica los cálculos y mantiene el fenómeno que queremos describir.

Los rayos de luz provenientes del cuadrado emanan en todas las direcciones, pero sólo aquellos apuntando en la dirección indicada llegan al observador.

Si consideramos sólo los efectos de relatividad especial, entonces el observador podrá *medir* la contracción del largo: $L \sqrt{1 - (U/c)^2}$.

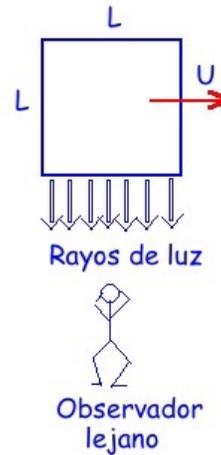


Figura I.42

Consideremos el otro factor relevante: los fotones deben llegar simultáneamente a la cámara para ver el cuadrado. Supongamos un fotón saliendo desde el punto D en el vértice del cuadrado en la Figura I.43 y en el instante $t=0$. De todos los fotones que se reflejan en ese vértice, nos interesan aquellos que se deslizan por el lado del cuadrado.

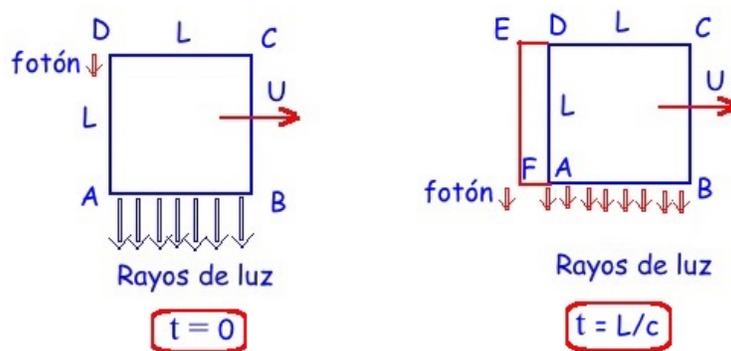


Figura I.43: .

Para $t = L/c$, este fotón alcanzó el punto F que era la posición del vértice A en $t = 0$. El cuadrado se ha desplazado una distancia $L U/c$ hacia la derecha.

Note que en cada uno de los puntos del tramo FA existe un fotón apuntando verticalmente hacia el observador. Proviene de cada uno de los puntos del tramo DA . Han despegado oportunamente del lado AD y han viajado menos tiempo pero han recorrido una distancia menor.

A partir de la Figura I.44 , donde incluimos los efectos del retardo en el tiempo y la contrac-

ción del largo, podemos definir $U/c \equiv \sin \theta$ y $\sqrt{1 - (U/c)^2} = \cos \theta$. Esto corresponde a *ver* el cuadrado girado en un ángulo θ .

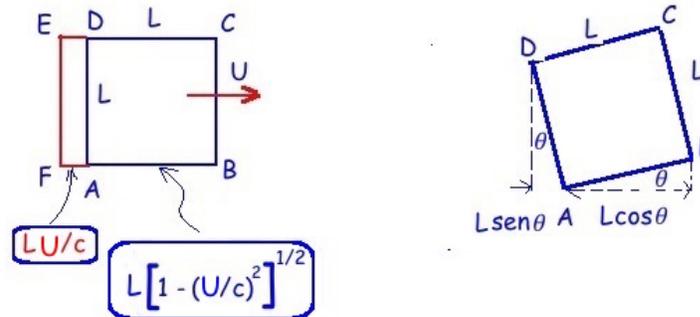


Figura I.44: la figura de la derecha es la imagen que capta el observador. Si sabía que era un cuadrado, considera que se giró en un ángulo θ .

I.10. El Efecto Doppler Relativista

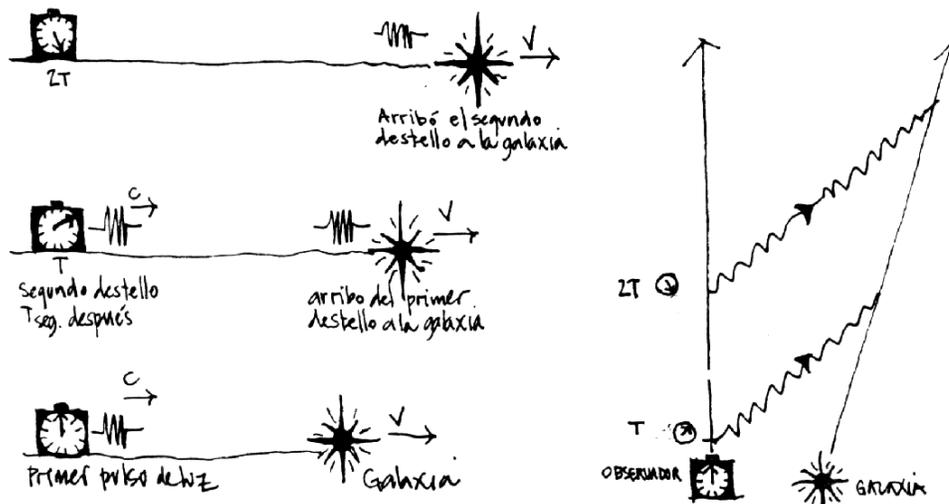


Figura I.45: En la figura de la izquierda se aprecia cómo un observador en reposo envía señales hacia otro observador en movimiento. A la derecha se incluye el diagrama $s-t$ para este mismo caso.

Considere un observador, que definimos en reposo, que envía una señal cada T segundos de acuerdo a su reloj. Un observador en movimiento relativo, por ejemplo alejándose con velocidad

V , recibiría la señal periódicamente y con una regularidad de T' . Estos dos tiempos relacionan directamente la frecuencia de emisión con la frecuencia de recepción. Procedemos entonces a calcular la relación entre estos dos tiempos.

Dos comentarios previos: en el ejemplo I.4.2 (página 18) calculamos algo similar pero con un tiempo absoluto. El caso relativista se analiza en I.8.2 (página 44).

Suponemos dos observadores S y S' que se alejan. En el instante $t=0$, el evento O , ambos coinciden. T segundos más tarde, en el evento A , S envía un fotón (o señal) hacia S' . Éste la recibe en el evento B y su reloj en el origen, marca T' . Para calcular la relación entre estos dos tiempos necesitamos el valor de T_D en el sistema S .

$$DB = VT_B = V(T + AD) = c AD, \quad (I.31)$$

donde AD es el tiempo que demora el fotón en recorrer la distancia DB . Despejando el intervalo AD de esta última ecuación, obteniendo

$$(1 - V/c)AD = V/c T, \Rightarrow AD = \frac{V/c}{1 - V/c} T$$

Despejando AD desde la ecuación anterior I.31, obtenemos una expresión para T_B

$$AD = \frac{V}{c} T_B = \frac{V/c}{1 - V/c} T \Rightarrow T_B = \frac{1}{1 - V/c} T. \quad (I.32)$$

Del gráfico inferimos que $T_B = T_D$ son simultáneos en S , y las coordenadas del evento B en S' son ($t'_B = T'$, $x'_B = 0$). Relacionando T_B con $t'_B \equiv T'$, a través de la transformaciones de Lorentz

$$T_B = \gamma \left[T' + \frac{V}{c^2} x'_B \right] = \gamma T',$$

combinando este resultado con el obtenido en la ecuación I.32

$$T_B = \gamma T' = \frac{1}{1 - V/c} T \Rightarrow T' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c} T \quad (I.33)$$

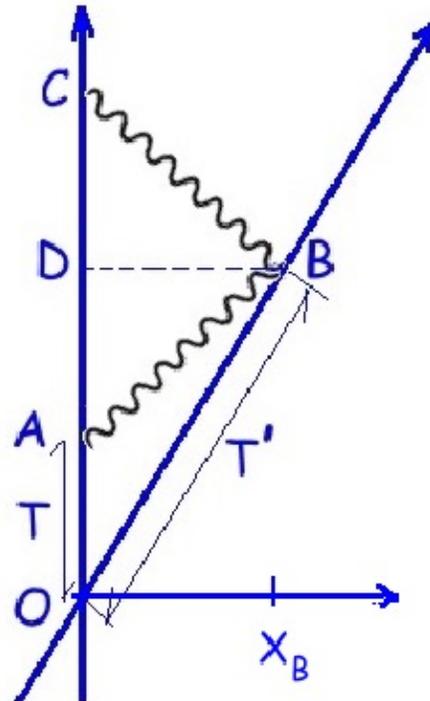


Figura I.46: .

$$T' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} T \quad (\text{I.34})$$

Este fenómeno describe la variación de la frecuencia de una onda ($\nu' \equiv 1/T'$) que percibe un receptor en movimiento relativo con respecto a la frecuencia emitida por la fuente. Esta variación puede ser positiva cuando los observadores se acercan o negativa, si se alejan.

Como la velocidad de la luz es una constante, la variación no puede deberse a un cambio en la velocidad de propagación de la luz. Se debe a que el tiempo transcurre en forma diferente en cada uno de los dos observadores en movimiento relativo. Esto se ve en el factor γ en la ecuación I.33. Otro factor es el hecho que S' al estar alejándose, la onda requiere más tiempo para cruzar a este observador. Esto se manifiesta en el factor $(1 - V/c)$ en la ecuación I.32. Note que ambos factores actúan en oposición: En la ecuación I.33 el factor $1/\gamma$ disminuye el valor de T , y $1/(1 - V/c)$ lo aumenta. Éste último es mayor (proporcional a V/c) que el primero y ocurre que $T' > T$ si los observadores se están alejando. La desigualdad se invierte si los observadores se están acercando.

Otro punto de interés es el efecto Doppler no-relativista (ver ecuación I.8). Si desarrollamos en serie la ecuación I.34 hasta primer orden en V/c , obtenemos el efecto Doppler no-relativista. Esto aparece más obvio si recurrimos a la ecuación I.33. Si eliminamos el numerador hemos eliminado el factor de la dilatación del tiempo que es un efecto relativista. Si desarrollamos el denominador a primer orden en V/c , re-obtenemos el Doppler no-relativista.

Ejemplo

Grafique la evolución de una onda desplazándose a lo largo del eje-x vista en un diagrama espacio-tiempo. Detalle su paso a través del observador S' .

Solución

En la Figura I.47 se describe un pulso viajando en la dirección del eje-x desde el instante $t=0$ hasta que termina de cruzar al observador S' en el evento **B**. El evento **A** indica el instante cuando el pulso termina de cruzar al observador en reposo ($X=0$).

Acá se describe un pulso, pero si fuera una onda periódica la que se propagara, la distancia desde el origen hasta el evento **A** correspondería a la longitud de onda λ : $c \mathbf{OA} = \lambda$ donde \mathbf{OA} es el tiempo que tarda la onda en atravesar al observador **S**, como ya se señaló.

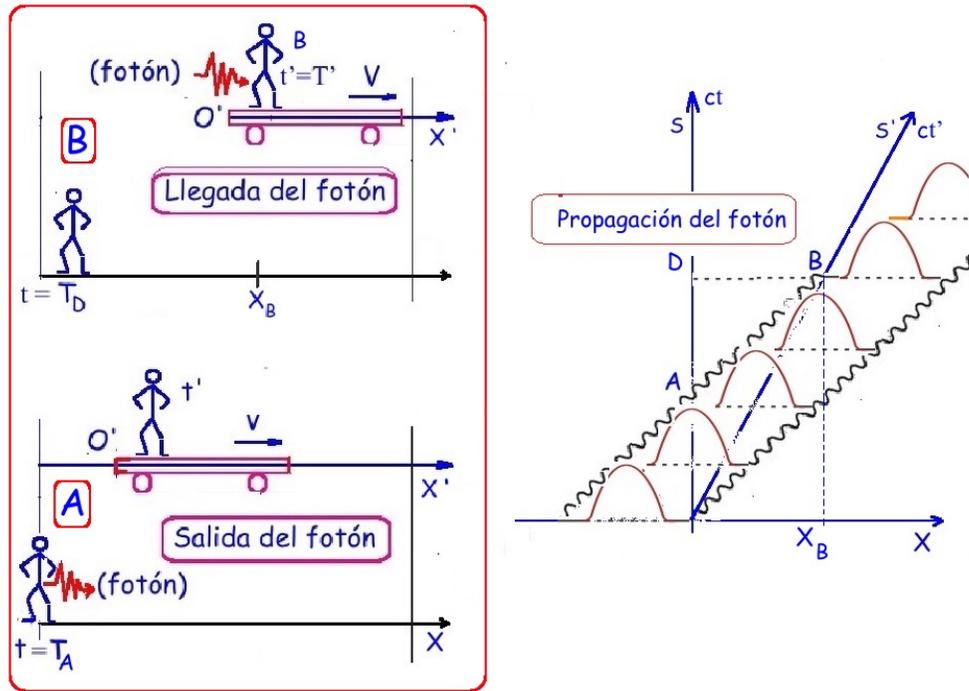


Figura I.47: El pulso se ubica inicialmente (en $t = 0$) detrás del origen. En el diagrama $s-t$, los extremos del pulso se propagan apoyado en las dos líneas onduladas tipo luz -dibujadas en 45° .

Ejemplo

En el ejemplo anterior, calcule el tiempo **OC** en función del tiempo **OA**. (Ver Figura I.48)

El tiempo **OC** representa lo que demora la onda *reflejada* en atravesar el observador en reposo. Como lo ilustra la figura de la izquierda en I.48, lo que demora el pulso, tanto el incidente como el reflejado, nos da la respectiva longitud de onda mediante el factor c : la velocidad de la luz.

Solución

A partir del gráfico $s-t$, a la derecha de la Figura I.48, se observa que **OC** = **T** + **AC**, pero **AC** = **AD** + **DC**. Los intervalos **AD** y **DC** son iguales, es el tiempo que el fotón tarda en viajar -ida o vuelta-, entre el origen **O** y el punto **B**. Esto es una consecuencia del Postulado 0 (Sección I.7): La isotropía del espacio, las mismas propiedades independiente de la dirección del espacio.

Podemos calcular su valor: $c \text{ AD} = X_B$. Del punto de vista de **S**, $X_B = v T_B$. Por tanto $\text{AD} = \frac{v}{c} T_B$. Identificamos $T_B = T_D$ por ser simultáneos.

$$\text{OC} = \text{T} + \text{AC} = \text{T} + 2 \text{AD} = \text{T} + 2 \frac{v}{c} T_D.$$

Lo que se busca es una relación entre \mathbf{OC} y \mathbf{T} , debemos entonces despejar \mathbf{T}_D en función de estas variables.

La Figura I.48 indica que $\mathbf{T}_D = \mathbf{T} + \mathbf{AD} = \mathbf{T} + \frac{V}{c} \mathbf{T}_D \Rightarrow \mathbf{T}_D \left(1 - \frac{V}{c}\right) = \mathbf{T}$.

$$\mathbf{OC} = \mathbf{T} + 2 \frac{V}{c} \mathbf{T}_D = \mathbf{T} + 2 \frac{\frac{V}{c} \mathbf{T}}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \mathbf{T}. \quad (\text{I.35})$$

$$\mathbf{OC} = \frac{1 + V/c}{1 - V/c} \mathbf{OA}. \quad (\text{I.36})$$

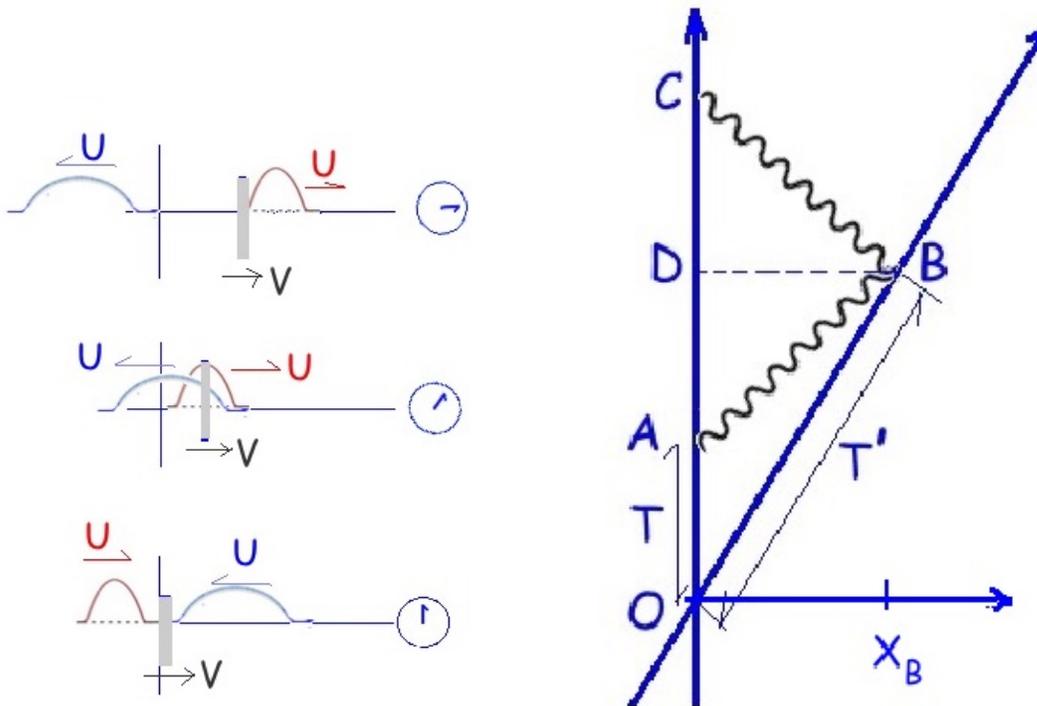


Figura I.48: Los pulsos incidente y reflejado (figura de la izquierda) se dibujan en armonía con el diagrama $s-t$ que aparece en la derecha. El hecho que ambos pulsos estén a punto de atravesar el observador ubicado en el origen, permite simplificar los cálculos. El tramo \mathbf{OC} , si obviamos la constante c , es el tiempo que el pulso reflejado tarda en cruzar el observador \mathbf{S} . El tramo \mathbf{OA} , a su vez, es el tiempo que tarda la onda incidente en cruzar el observador en reposo.

Este resultado tiene una aplicación interesante. Es la operación de la pistola con la cual la policía mide la velocidad de los autos en carretera. (Ver Problema 25 al final del capítulo). La pistola envía una onda electromagnética con la velocidad de la luz con una frecuencia conocida y recibe de vuelta la onda reflejada en el vehículo con otra frecuencia. Utilizando la ecuación I.36, donde

un observador (S) detecte que otro sistema de referencia (S') se está *alejando*, los intervalos de tiempo se relacionaran con la función $k(v)$ como se ha especificado aquí.

La distancia espacial \overline{EG} que aparece en el gráfico se puede calcular de dos formas:

Primer Método: podemos calcular cuánto se demoró el rayo de luz en llegar al punto G que, como es simultáneo con E en el sistema S, es equivalente a calcular el tiempo que marca el reloj del observador en E. Este valor es:

$$\overline{EG} = c \cdot \frac{DB}{2} = c \cdot [k^2 - 1] \frac{T}{2}. \quad c \equiv \text{velocidad de la luz.} \quad (\text{I.37})$$

Recuerde que la simultaneidad es un concepto relativo en esta teoría, por lo tanto cuando decidimos comparar dos eventos simultáneos para el observador O_1 , hemos quebrado la simetría entre los dos sistemas inerciales O_1 y O_2 . Los resultados son válidos sólo para el sistema de referencia O_1 .

Volviendo a nuestro cálculo, sabemos que la distancia que se alejó O_2 a partir del punto en que ambos coincidían, (A) es:

$$\overline{EG} = v \cdot \overline{AE} = v \cdot (k^2 + 1) \frac{T}{2}. \quad (\text{I.38})$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos:

$$v \cdot [k^2 + 1] \frac{T}{2} = c(k^2 - 1) \frac{T}{2}, \quad \text{despejando } (v/c), \text{ se obtiene:}$$

$$\beta \equiv \left(\frac{v}{c}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Notemos que, si $k = 1$, entonces $\beta \rightarrow 0$, lo cual equivale a que la velocidad de la luz c , sea infinita. Este es el límite Newtoniano: en este caso las transformaciones de Lorentz, que deduciremos más adelante, toman la forma de las transformaciones de Galileo (I.1).

Ya hemos encontrado k como función de la velocidad. Podemos explicar brevemente como podemos detectar la velocidad de un objeto mediante pulsos enviados con un intervalo de tiempo T . Estos al rebotar en el objeto que se aleja con velocidad v_0 vuelven en un intervalo $(k^2 - 1) \cdot T$. Al medir este intervalo y conociendo T y la expresión –ya obtenida– de k^2 podemos conocer la velocidad. Este es el principio físico que regula el funcionamiento de los radares de velocidad de la policía.

$$\text{Para dos sistemas alejándose: } k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$\text{Para dos sistemas acercándose: } \bar{k} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Ejercicio

Demuestre que:

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2\gamma, \quad \text{donde hemos definido } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{I.39})$$

Ejemplo

Demuestre que el tiempo transcurrido entre dos eventos depende de la trayectoria seguida para ir de uno a otro: La Paradoja de los Gemelos. (Revisión).

A continuación demostraremos que el tiempo no es absoluto y por lo tanto transcurre de forma diferente para distintos observadores en movimiento relativo.

Este problema tradicionalmente se conoce como la paradoja de los gemelos. Consiste lo siguiente: uno de los gemelos permanece en Tierra mientras el otro emprende un viaje interestelar y posteriormente, al volver, se compara con su hermano.

La dificultad técnica que plantea este problema es la aceleración que experimenta el gemelo interestelar en el momento de invertir el sentido en la dirección de su viaje con el objeto de retornar. Las expresiones que hemos usado no se pueden aplicar de acuerdo a los postulados, que excluyen los sistemas acelerados. Para eliminar este problema usaremos tres sistemas inerciales sincronizados y concluiremos que el tiempo, efectivamente transcurre más lentamente en uno de los sistemas de referencia.

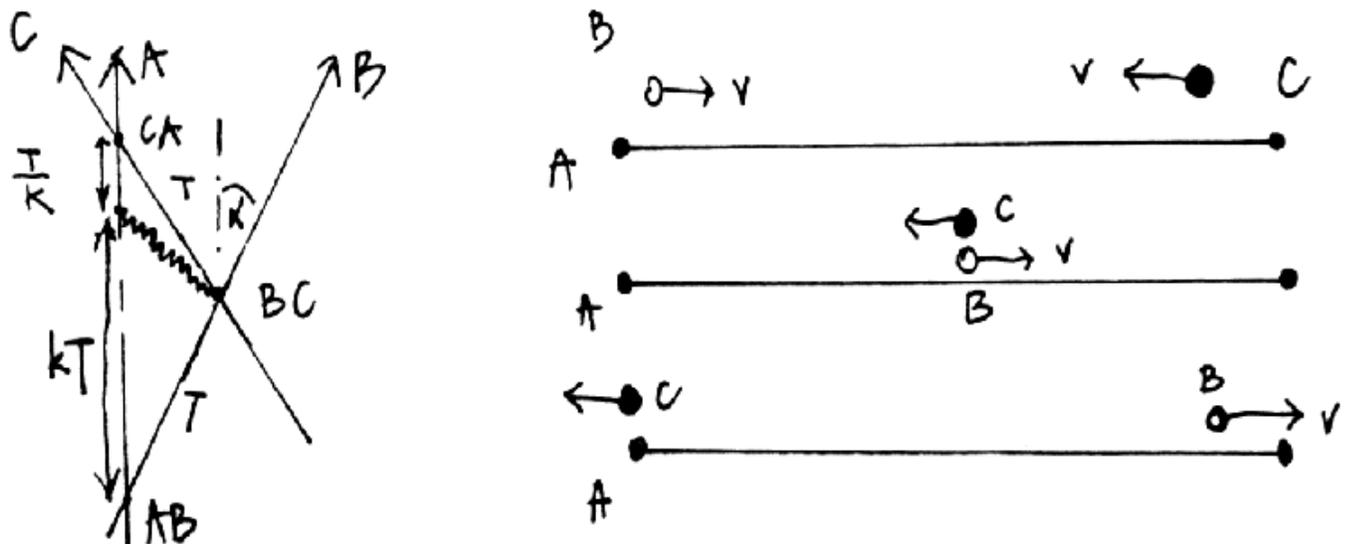


Figura I.50: Nos ubicamos en el sistema A en reposo. B se aleja de A con una velocidad relativa V y el observador C se aproxima hacia A con una velocidad V (según A). A la izquierda se indica el gráfico ct versus x , y a la derecha el esquema habitual con la coordenada x en el eje horizontal.

Antes de plantear este problema hagamos un ejercicio cuyo resultado será de utilidad más tarde.

Encontramos la expresión de k en función de V/c en las páginas anteriores. Note que $k(-V) = 1/k(V)$, es decir que cuando dos observadores se aproximan debemos usar $(1/k)$ en lugar de k para relacionar los intervalos correspondientes de tiempo. Para demostrar que el tiempo NO es absoluto y depende del camino recorrido necesito los tres observadores (o relojes) A, B y C.

En el desarrollo del problema distinguimos 3 eventos:

- A coincide con B definido como: AB,
- B coincide con C definido como: BC,
- C coincide con A definido como: CA.

Denominamos T al tiempo indicado por el reloj de B que transcurre entre el evento: [A coincide con B] y el otro evento

[B coincide con C]. El intervalo que transcurre entre el evento: [B coincide con C] y el evento [C coincide con A] es también T , según el reloj de C.

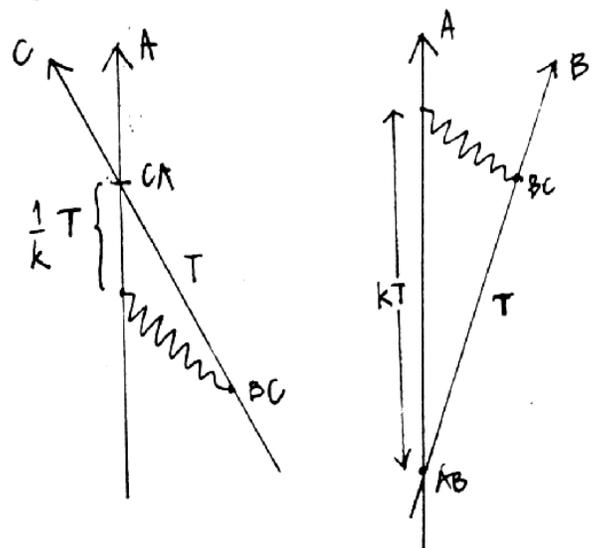


Figura I.51: El factor k aparece cuando los dos observadores se alejan y $1/k$ cuando se están acercando.

Esto se puede notar en la Figura, las líneas de universo de C y B son simétricas con respecto a la vertical, porque los trazos que van desde [AB], hasta [BC] y desde [BC] hasta [CA], son idénticos y por lo tanto ambos toman el valor T.

De acuerdo al álgebra de los k el tramo entre los eventos [AB] y [AC] es $[kT + T/k]$.

Por otra parte, si en [BC], el observador B accionó el reloj de C y lo dejó marcando T segundos, cuando C llegue al encuentro con A marcará un tiempo 2T. Comparando ambas cantidades, podemos concluir:

$$(k + \frac{1}{k}) T \geq 2T$$

Estas expresiones son iguales sólo si $k = 1 \Rightarrow v_0 = 0$, ó $c = \infty$.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 2.$$

De esta forma el tiempo que marca el reloj C es menor que el indicado por A. El tiempo no es absoluto, no transcurre igual para todos los observadores.

En el caso de los gemelos la respuesta es similar a la obtenida aquí. El gemelo de viaje llega más joven al encuentro con su hermano. La diferencia de edad no es la que obtuvimos, puesto que es necesario considerar la aceleración que experimenta durante parte del viaje. En este caso no tiene sentido intentar utilizar el argumento de la simetría de los sistemas inerciales para invalidar el resultado. El gemelo que estuvo de viaje sabe perfectamente que su sistema de referencia, al menos por unos segundos, no fue inercial.

También se puede objetar que en el caso propuesto no se comparan los mismos relojes en A, pero lo esencial es que el reloj C al compararlo con el de A, traía información acerca del tiempo empleado por un reloj B al recorrer el trayecto que le correspondía. Se demostró entonces que el tiempo contabilizado a lo largo del camino $AB \rightarrow BC \rightarrow CA$, es menor que el tiempo contabilizado por S entre $AB \rightarrow CA$.

I.11. Ejercicios Resueltos

El siguiente ejemplo ilustra lo que sucede con un objeto *macroscópico* que viaja con una velocidad cercana a la de propagación de la luz. También podemos considerar esta situación como lo que sucedería si la velocidad de la luz tuviera un valor más pequeño y todo el resto de la física no experimentara cambios.

Si un avión se acerca a una muralla iluminándola con un foco, como se ilustra en la Figura, la zona iluminada se acerca desde infinito hacia la muralla. Mostraremos en este ejemplo, que es posible que el movimiento de la sombra proyectada por una muralla debido al foco en movimiento,

puede desplazarse desde la muralla hacia infinito, si el foco (o el avión) se acerca a velocidades muy cercanas (pero inferiores) a la velocidad de propagación de la luz.

Ejemplo

Un avión viaja en forma rectilínea a una velocidad u , cercana a la velocidad de la luz y a una altura H sobre el suelo. Una linterna, encendida al pasar el avión, emite un rayo de luz pasando apenas sobre el muro.

Dos observadores A y B en reposo, descansan detrás del muro de altura h . B se ubica justo detrás del muro, mientras que A permanece a una distancia ℓ de B .

Al pasar sobre la muralla (punto D , en la figura) el avión enciende otra linterna que ilumina al observador B . En este ejemplo, nos interesa sólo estas dos linternas, la situada en el punto P y apuntando sobre el borde superior de la muralla y la situada en el punto D , justo sobre la muralla y apuntando en forma vertical sobre B .

a) Encuentre el valor que debe tomar la velocidad u del avión de modo que el destello (fotón) emitido desde la linterna en P , al ser encendida por el paso del avión, alcance al observador A justo en el instante en que el fotón, emitido desde la linterna situada en el punto D , alcanza al observador B .

Hallar el rango de valores del ángulo ϕ para el cual ocurre esta situación.

b) Demuestre que si la velocidad del avión es mayor que el valor encontrado en la pregunta anterior (pero siempre menor que la velocidad de la luz), entonces la oscuridad que hay en el lado izquierdo del muro se propaga desde B , al lado de la muralla, hacia A . Justo lo opuesto a lo que dicta el sentido común.

Este es un ejercicio de cinemática no-relativista.

Solución

a) Para encontrar el valor buscado para u , calcularemos el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer los dos caminos propuestos en el enunciado (ver Figura):

$$T(P \rightarrow C \rightarrow A) \equiv T_A,$$

$$T(P \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B) \equiv T_B.$$

Calculemos T_A .

Como los triángulos rectángulos $\Delta CDP \sim \Delta CBA$, entonces

$$\frac{\bar{A}P}{\bar{A}C} = \frac{H}{h}, \quad \text{de aquí se obtiene } \bar{A}P = \frac{H}{h} \bar{A}C = \frac{H}{h} \sqrt{\ell^2 + h^2},$$

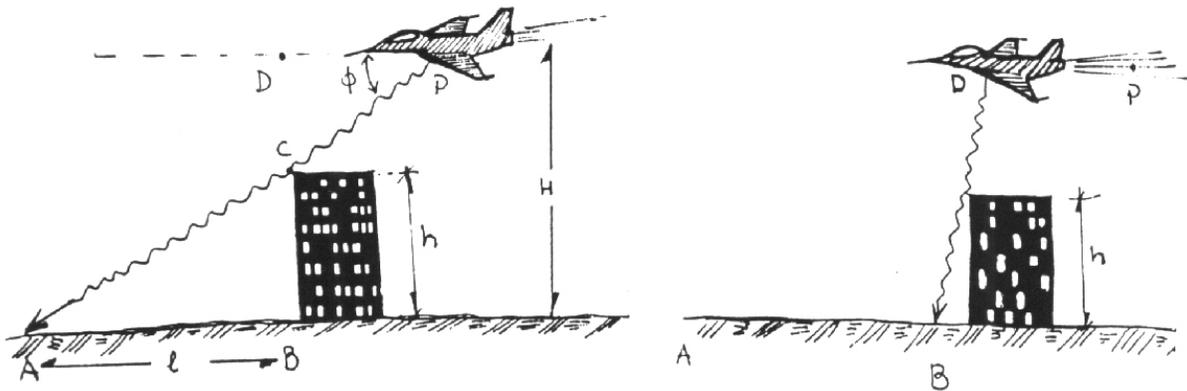


Figura I.52: Al pasar por los puntos P y D el avión enciende una linterna ubicada en cada uno de dichos puntos y que apunta en la forma indicada.

donde hemos usado $\bar{CA} = \sqrt{h^2 + l^2}$.

Pero T_A es el tiempo que el fotón demora en recorrer la distancia \bar{PA} , de modo que:

$$T_A = \frac{H}{h} \sqrt{h^2 + l^2} \cdot \frac{1}{c}. \quad (\text{I.40})$$

Para calcular la velocidad u de modo que el destello emitido en D llegue a B simultáneamente con el fotón que salió desde P y alcanza A , debo considerar el tramo PD que recorrió el avión.

$$T_B = T(P \rightarrow D) + T(D \rightarrow C \rightarrow B).$$

El tiempo que transcurrió entre $P \rightarrow D$ es

$$T(P \rightarrow D) = \frac{\bar{PD}}{u}.$$

De la Figura se tiene:

$$\frac{\bar{PD}}{\bar{DC}} = \frac{l}{h},$$

de modo que

$$\bar{PD} = \frac{l}{h} \bar{DC} = \frac{l}{h} (H - h), \quad (\text{I.41})$$

de esta forma

$$T(P \rightarrow D) = \frac{l(H - h)}{h u}.$$

El tiempo de viaje del destello entre D y B es:

$$T(D \rightarrow B) = \frac{H}{c}$$

de donde se puede obtener el tiempo que tarda el rayo en alcanzar el punto B, contando el instante desde que el avión encendió la linterna en el punto P:

$$T_B \equiv T(P \rightarrow B) = \frac{\ell(H-h)}{hu} + \frac{H}{c}.$$

Si imponemos la condición que A y B reciban los destellos simultáneamente, se debe cumplir que $T_A = T_B$, y de esta ecuación obtenemos la condición buscada:

$$\frac{\ell(H-h)}{hu} + \frac{H}{c} = \frac{H}{c} \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2}}{h},$$

despejando u/c , obtenemos:

$$\frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\ell}\right)^2} - \frac{h}{\ell}}$$

$$\text{como } \frac{h}{\ell} \equiv \tan \phi, \quad \text{entonces: } \frac{u}{c} = \frac{\left(1 - \frac{h}{H}\right)}{\left[\frac{1}{\cos \phi} - \tan \phi\right]}. \quad (\text{I.42})$$

El ángulo ϕ debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \implies \quad \frac{1 - \text{sen } \phi}{\cos \phi} > \left(1 - \frac{h}{H}\right).$$

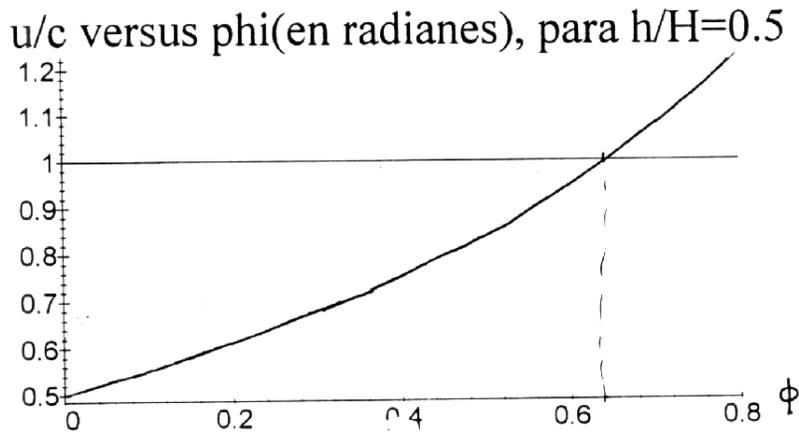
En el gráfico que se acompaña se puede estimar el rango de valores posibles que puede tomar ϕ .

b) Es claro que si la velocidad del avión U aumenta, entonces el destello emitido en P , llega al punto A después que el emitido desde C , puesto que el avión viaja más rápido y el tiempo T_{PD} se acorta.

Si el avión viaja con una velocidad $U = U(\phi)$ que se ajusta a la ecuación I.42, la región \overline{AB} se ilumina en forma instantánea.

Si

$$1 > \frac{U}{c} > \left(\frac{1 - h/H}{1 - \text{sen } \phi}\right) \cos \phi.$$



entonces la zona \overline{AB} se ilumina desde **B** hacia **A**, siempre que no emita destellos cuando $\phi < 0,6$. Para $\phi > 0,6$ no se cumple que $U/c < 1$.

Ejemplo

La Paradoja del Granero

Un atleta corre llevando una garrocha de largo propio igual a 20 m. La velocidad del atleta con respecto al granero es $U = \frac{\sqrt{3}c}{2}$. La garrocha se mantiene paralela a la dirección de movimiento del atleta. Su trayectoria cruza de lado a lado una bodega de longitud propia igual a 10 m. ¿Es posible que el portero del lugar cierre los portones de los dos extremos de esta bodega simultáneamente de forma que el atleta y su garrocha queden atrapados en su interior?

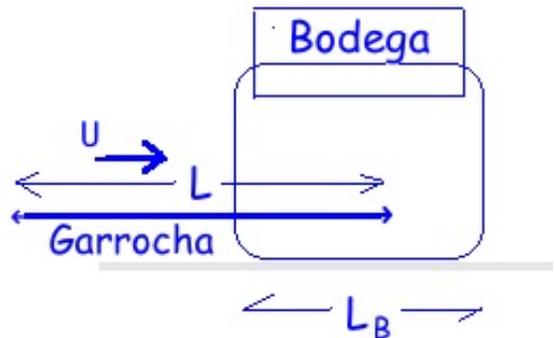


Figura I.53:

Analice su respuesta desde el punto de vista del atleta y del portero de la bodega.

Solución:

Sea $L_B \equiv$ longitud propia del granero: longitud medida por el portero del granero: $L_B = 10$ m.

$L_G \equiv$ longitud propia de la garrocha: medida en el sistema de referencia del atleta, $L_G = 20$ m.

De acuerdo a la expresión de la contracción del largo encontrada en la ecuación I.12: $L' = \gamma L$, donde, por convención, L representa el largo de un objeto medido en el sistema S , considerado en reposo y L' , el largo propio del objeto en reposo en S' que se desplaza con velocidad V con respecto a S .

A continuación consideraremos alternativamente el atleta como sistema en reposo primera y después adoptamos el punto de vista de la bodega como sistema en reposo y discutiremos los

resultados.

En cada caso definiremos con cuidado cuáles son las equivalencias entre L y L' definidos en la fórmula anterior y los largos propios del problema: L_B y L_G .

i.- Análisis considerando al atleta como sistema de referencia en reposo:

El atleta, en su sistema de referencia, ve acercarse la bodega con un velocidad $\left(-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$.

En este problema se identifica $L' \equiv L_B$, el largo propio de la bodega en su sistema de referencia, y L representa entonces el largo de esta bodega medido por el atleta, en su sistema de referencia que definimos como L'_B . Este último es el largo que debemos comparar con el largo propio de la garrocha. Por tanto

$$L'_B = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2} \frac{1}{c^2} L_B = \frac{L_B}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{m},$$

y como la longitud de su garrocha es $L = 20$ m, el atleta concluye que es imposible quedar atrapado en el interior de la bodega, puesto que: $L > L'_B = \frac{L_B}{2}$.

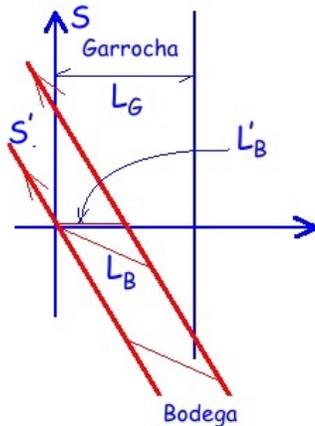


Figura I.54: L'_B es el largo de bodega la medido por el atleta, considerado en reposo. L_B es el largo propio de la bodega. L'_B corresponde a la distancia entre los dos extremos de la bodega (líneas rojas) en forma simultánea en el sistema S.

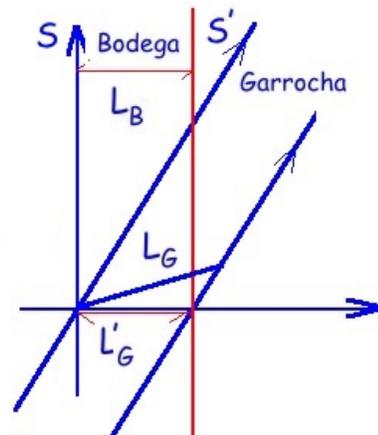


Figura I.55: Los valores de la velocidad de la garrocha y los largos propios de la garrocha y la bodega permiten que ocurra lo que se ilustra en esta Figura: aparentemente la garrocha calza justo en la bodega. Pero esto no es real, como se discute en el texto.

ii.- Análisis con respecto al observador en reposo con respecto a la bodega.

El observador en la bodega, en su sistema en reposo, ve aproximarse al atleta con $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$.

Identificamos L' como el largo de la garrocha medido por el atleta $L' \equiv L_G$, el largo propio de la garrocha. L corresponde al largo de la garrocha medido por el portero de la bodega: $L \equiv L'_G$. De este modo

$$L'_G = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2} \frac{1}{c^2} L_G = \frac{L_G}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m.}$$

y como $L_B = 10 \text{ m}$, (largo propio del granero) entonces para el observador en la bodega es posible que el atleta quede atrapado en el granero, ya que el largo de la garrocha -medido por el portero-, es igual al largo propio de la bodega:

$$L'_G = L_B \quad L'_G \equiv \text{largo de la garrocha medido por el portero de la bodega.}$$

Sin embargo esto no es correcto. Un argumento es el siguiente: la garrocha NO puede cambiar de longitud al ser medida desde diferentes sistemas inerciales en movimiento relativo. Lo que ocurre en este caso, de acuerdo al atleta, es que el portero primero midió la punta de la garrocha y unos instantes más tarde su cola, cuando ya la garrocha se desplazó hacia la derecha. Si esta puerta estuviera cerrada, la punta de la garrocha la despedaza.

I.12. Ejercicios Propuestos

- 1.- Dos barras **A** y **B**, cuyo largo propio (medido en su propio sistema de referencia) es L , se desplazan con rapidez constante en el mismo sentido y dirección. Las respectivas velocidades son $4c/5$ para **A** y $3c/5$ para **B** se miden con respecto a un sistema fijo **S**. Al comienzo **A** viaja detrás de **B**.
 - a.- Si hay un observador externo, que denominamos **C** en reposo en **S**. Dibuje un diagrama de s-t que grafique la situación.
 - b.- ¿Cuánto tarda **A** en sobrepasar a **B**. Esto quiere decir el intervalo medido por **C**, entre el instante que el frente de **A** coincide con la cola de **B** y el instante en que la cola de **A** coincide con el frente de **B**.
- 2.- Existe una familia de partículas elementales llamadas **muones** que son similares a los electrones pero tienen una masa 200 veces mayor y que, a diferencia del electrón, decaen en otras partículas (electrones y neutrinos) después de una vida media de $2 \times 10^{-6} \text{ s}$ medido en

su propio sistema de coordenadas. La vida media es el tiempo que debe transcurrir para que el número de partículas que existía inicialmente disminuye a la mitad de su valor inicial. Los muones (identificados como μ) que se crean en la parte alta de la atmósfera se mueven hacia la superficie de la Tierra con una alta velocidad $V = 0.9999 c$.

Suponga que un muón μ se crea a 20 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si esta partícula μ no colisiona con ninguna otra partícula cuando se aproxima a la Tierra: Decida si este muón alcanza la superficie de la Tierra antes de decaer en un electrón y neutrino.

- 3.- Retomando los datos presentados en el problema 1, acerca de los dos carros **A** y **B**, moviéndose en una dimensión con uno de ellos adelantando al otro.
 - a.- ¿Cuánto demora **A** en adelantar **B** según un observador en reposo en cada uno de ellos? Lo que afirma **A** y lo que afirma **B**.
 - b.- Definimos el evento **P** como aquel en que el frente de **A** coincide con la cola de **B**. Analogamente el evento **Q** representa el instante en que la cola de **A** coincide con el frente de **B**. Un observador **D** camina con rapidez constante sobre **B** de forma que coincide con **P** en la partida y con **Q** al final de su caminata sobre la barra **B**. ¿Cuánto demora, según **D**, el adelanto de **A** a **B**?
- 4.- Dos trenes de largo propio **L** viajan en líneas paralelas con velocidad **V** con respecto al piso común. Cuando los frentes de ambos trenes se cruzan, ambos conductores ponen su relojes en $t=0$. De ese modo todos los relojes de cada uno de los trenes quedan sincronizados con el de su conductor.
 - a.- Unos instantes más tarde, cuando la cola de ambos trenes coinciden, qué tiempo marca el reloj de cada uno de los trenes. Refiera los tiempos al sistema fijo al piso.
 - b.- La misma pregunta anterior pero ahora tome como referencia el reloj del conductor **B**.
- 5.- Un vagón de tren se mueve sobre una vía a velocidad constante **v**. **A** y **B** están en los extremos del vagón y los observadores **C** y **D** están de pie junto a la vía. Definimos el evento AC como en que **A** pasa frente a **C**. Las otras coincidencias se definen en forma similar.
 - a.- De los cuatro eventos BD, BC, AD, AC, ¿Cuáles de éstos sirven para que los dos observadores sobre la vía puedan determinar el paso del reloj llevado por A?
 - b.- Sea Δt el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?
 - c.- Supóngase que los eventos BC y AD son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón?. Si no lo son, ¿cuál ocurre primero?
- 6.- Determine el desplazamiento de longitud de onda por efecto Doppler relativista para la línea 6563 Å del Hidrógeno H_{α} , emitida por una estrella que se aleja de la Tierra a una velocidad relativa de $10^{-3}c$, $10^{-2}c$, y $10^{-1}c$. ¿Es una buena aproximación el resultado obtenido a primer orden en v/c ?

- 7.- Un aeroplano de 40 m de longitud en su sistema de reposo se mueve a velocidad uniforme de $630 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, con respecto a la Tierra.
- ¿Qué fracción de su longitud de reposo parecerá acortarse, con respecto a un observador sobre la Tierra?
 - ¿Cuánto tiempo tardará, según los relojes en tierra, para que el reloj del aeroplano se retrase un microsegundo?
- 8.- El radio de reposo de la Tierra puede considerarse como de 6400 km, y la velocidad a que gira alrededor del Sol, como de 30 km/seg. ¿Cuánto parece acortarse el diámetro de la Tierra con respecto a un observador en el Sol, debido al movimiento orbital de la Tierra?
- 9.- Se mide la longitud de una nave espacial y se encuentra un valor exactamente igual a la mitad de su longitud propia.
- ¿Cuál es la velocidad de la nave con respecto al sistema del observador?
 - ¿Cuál es la dilatación del tiempo unitario de la nave?

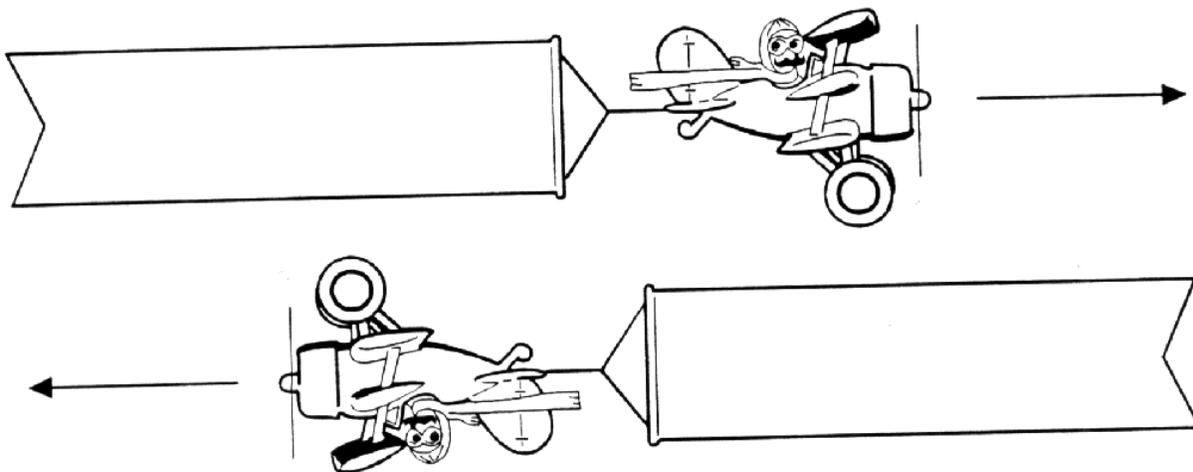


Figura I.56

- 10.- Dos naves espaciales tienen una longitud de 100 m cada una, medidos en su sistema propio. Se desplazan en sentidos opuestos, cruzándose en el vuelo. El astronauta que va en la nariz de una nave, que la designamos por A, mide el tiempo que transcurre entre el paso de la nariz y la cola de la otra nave (B) desde su puesto de observación. Encuentra que este intervalo es $2,50 \times 10^{-6}$ segundos. A partir de este dato, encuentre:
- ¿Cuál es la velocidad relativa de las naves?
 - ¿Cuál sería el intervalo medido en la primera nave (A), si ahora registrara el intervalo que transcurre entre que la nariz de la nave (B) pasa frente a la nariz de (A) y la cola de (B) pasa frente a la cola de (A)?

Acompañe ambas respuestas con un gráfico espacio-tiempo.

- 11.- Considere la existencia de partículas que tienen vida finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_0 \exp \frac{-t \ln 2}{\tau}.$$

Siendo N_0 el número de partículas que existen en $t = 0$ y es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_0, \quad N(\tau) = \frac{N_0}{2}.$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula de rayo cósmico primario y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8}$ s. Suponiendo que N_0 mesones π^+ se han formado a la altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez $0,9999c$ llegando solamente el 1 %:

(i) Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.

(ii) Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si no se hicieran correcciones relativistas.

- 12.- a.- Si la vida (propia) promedio de un mesón μ es $2,3 \times 10^{-6}$ segundos, ¿qué distancia promedio viajaría éste en el vacío antes de morir, de acuerdo con mediciones en diferentes sistemas de referencia, donde su velocidad es de $0,00c$, $0,60c$, $0,90c$, y $0,99c$ respectivamente.

b.- Compare cada una de estas distancias con la distancia que el mismo mesón mediría.

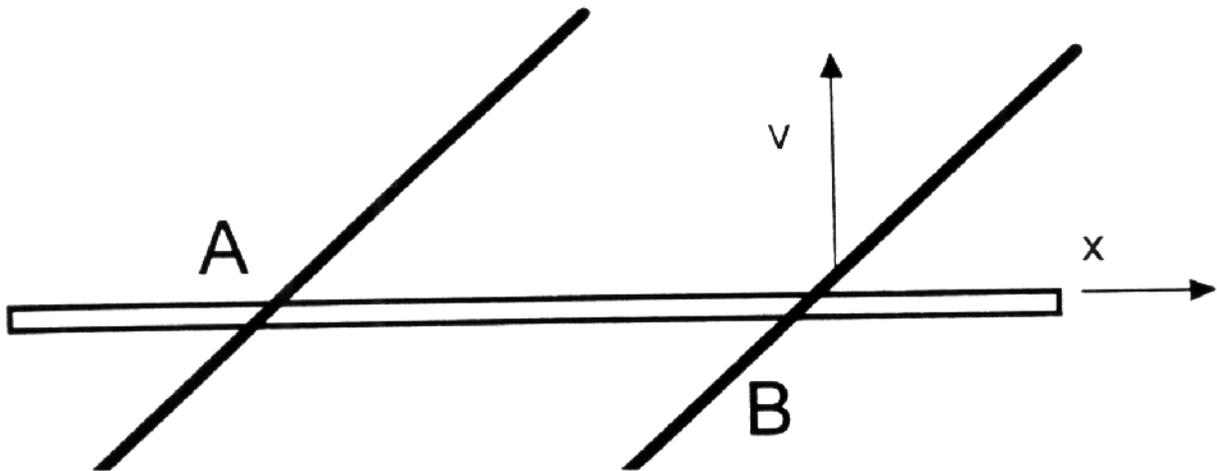
- 13.- A 200 km sobre el nivel del mar, un rayo cósmico primario (una partícula) choca contra la atmósfera de la Tierra; en esta colisión de alta energía se produce un mesón π^+ , el cual desciende verticalmente a una velocidad de $0,99c$ y, en su sistema propio, se desintegra $2,5 \times 10^{-8}$ s después de producido. Según se ve desde la Tierra, ¿a qué altura sobre el nivel del mar se desintegra el mesón?

- 14.- En la Figura, A y B son los puntos de intersección del eje \underline{x} (varilla estacionaria) con una varilla inclinada (varilla en movimiento) en dos instantes diferentes. La varilla inclinada se está moviendo en la dirección $\underline{+y}$ (sin cambiar de inclinación) a una velocidad \underline{v} .

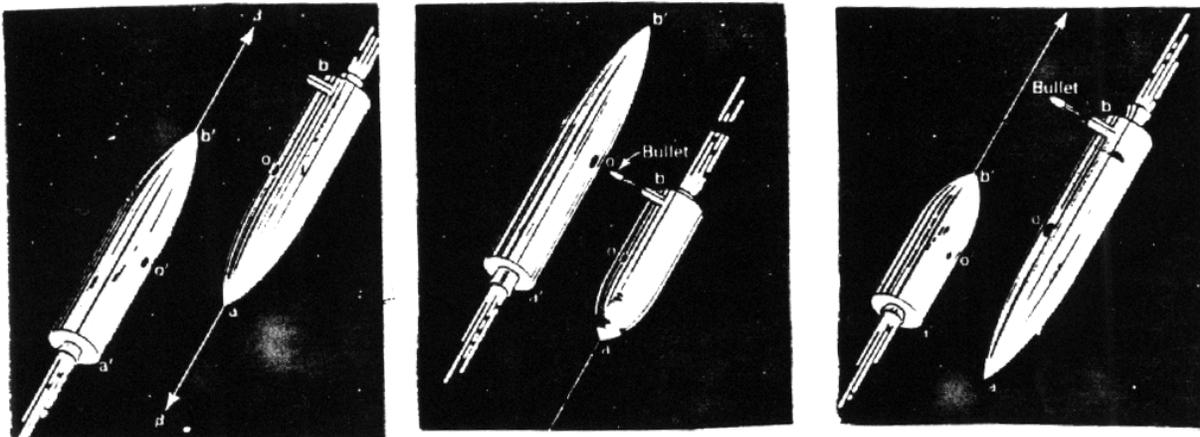
(a) Demuestre que el punto de intersección de las varillas tiene una velocidad $\underline{u} = v \cot \theta$ hacia la izquierda.

(b) Sea $\theta = 30^\circ$ y $v = \frac{2}{3}c$. Demuestre que, en este caso, \underline{u} excede a \underline{c} y explique por qué no existe ninguna contradicción con la relatividad.

- 15.- Un observador en un sistema inercial \underline{S} informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, paralelamente uno respecto del otro; el primero a una velocidad de $0,9c$ y el segundo a una velocidad de $0,7c$. Encuentre la velocidad de un proyectil con respecto al otro.



- 16.- Un observador sobre la Tierra que llamamos A, manda una señal con una linterna cada seis minutos. Otro observador, B está en una estación espacial estacionaria con respecto a la Tierra. Designamos con C a un astronauta que viaja en un cohete de A a B, con una velocidad constante de $0,6c$, con respecto a A.
- ¿A qué intervalos recibe B las señales de A?
 - ¿A qué intervalos recibe C las señales de A?
 - ¿A qué intervalos recibe B los destellos de C?



- 17.- Dos misiles de igual largo propio pasan en sentido contrario a velocidades relativistas. El observador O tiene un cañón en la cola de su nave apuntando en dirección perpendicular al movimiento relativo.
- Como indica la figura, O dispara cuando la punta A coincide con A'. En el sistema de referencia de O, el otro misil sufre una contracción de Lorentz. En consecuencia O sospecha que su bala no dará en el blanco. Pero en el sistema de referencia de O', es el misil O el que

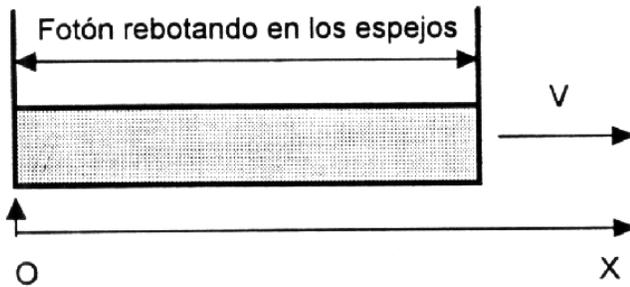
aparece contraído y por lo tanto, cuando A y A' coinciden el observador ve lo que aparece en la tercera figura.

(a) Uno de los diagramas contiene un error. Descúbralo.

b.- Usando las transformaciones de Lorentz descubra lo que realmente sucede en este encuentro.

Nota: $L \equiv$ largo propio de los misiles. $u \equiv$ velocidad del misil O con respecto a O' .

- 18.- Se tiene una barra de largo L que se desplaza con velocidad v . En los extremos de esta barra se ubican dos espejos como se muestra en la figura. Suponga que un fotón se encuentra entre ellos. Si en $t = 0$ el espejo de la izquierda coincide con el punto $x = 0$ y justo en ese instante el fotón está siendo reflejado en ese mismo espejo, dibuje la trayectoria del fotón y de la barra en un diagrama espacio-tiempo $c = 1$.



- 19.- En el sistema S' , un sujeto corre en la dirección del eje y' con velocidad constante $V = \frac{L'}{T'}$, donde L' es la distancia propia con respecto a S' y T' es el tiempo que marca un reloj estático con respecto a S' .

A su vez, S' se mueve con una velocidad U con respecto a otro sistema de referencia inercial S .

a) De acuerdo a un observador en reposo en el sistema S , calcule las dos componentes de la velocidad de este sujeto y a partir de este resultado encuentre la tangente del ángulo con que éste se aproxima.

b) Suponga que en el sistema S' hay una serie de interruptores separados por una distancia propia L' . A medida que el sujeto avanza los va encendiendo. Al ser activados, estos envían un fotón (o un pulso de luz, si Ud. lo prefiere) que *viaja directamente hacia S en la dirección del eje x del sistema S*.

Calcule la velocidad ω_y con que los detectores se encienden en el sistema S , a medida que van recibiendo la señal luminosa proveniente de S' . Suponga, si le ayuda utilizar este dato, que inicialmente el sistema S' se encontraba a una altura H sobre S . Recuerde que la distancias perpendiculares al movimiento relativo no sufren alteraciones.

c) Si el observador en S , $U = \bar{V} \cos \theta$, $V = \bar{V} \sin \theta$, representan las componentes de la velocidad \bar{V} con la cual se aproxima el sujeto, demuestre que la velocidad con que se encienden los detectores en el sistema S es:

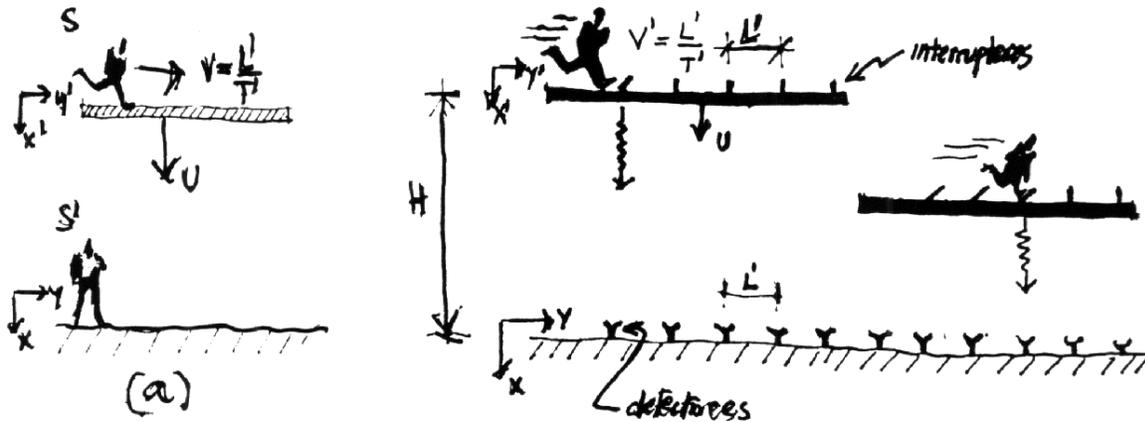


Figura I.57: Ejercicio # 19

$$w_y = \frac{\bar{V} \operatorname{sen} \theta}{1 - \frac{\bar{V} \cos \theta}{c}}$$

d) Demuestre que si $\bar{V} \approx c$ (es decir, $\beta \approx 1$) y el ángulo θ es muy pequeño, la velocidad w_y toma su máximo valor para $\theta^2 = 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$.

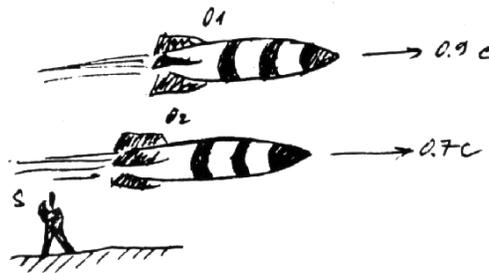
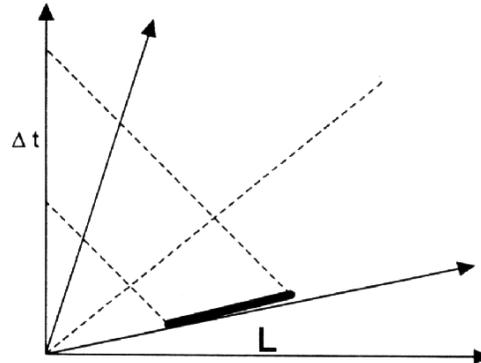


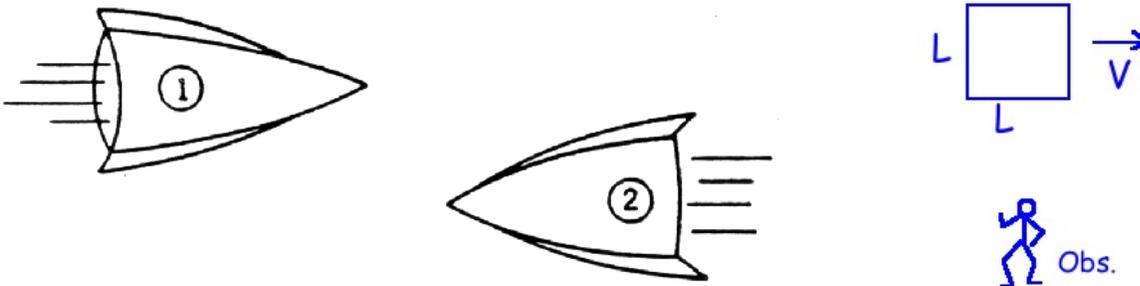
Figura I.58: Ejercicio # 16

- 20.- Un observador en un sistema inercial S informa que dos proyectiles se están moviendo en línea recta, en forma paralela y en el mismo sentido. Si denominamos uno de los proyectiles por O_1 y le asociamos la velocidad $V_1 = 0,9c$ y al otro, O_2 la velocidad $V_2 = 0,7c$:
- Encuentre la velocidad de O_1 con respecto a O_2 .
 - Si los largos propios son L_1 y L_2 respectivamente, cuál es el largo del cohete L_2 , de acuerdo a O_1 .
- 21.- Una barra de largo L' con respecto a su sistema en reposo, se aleja con una velocidad V_0 de un observador en reposo. Si desde cada uno de los extremos de la barra se envían dos

destellos en forma *simultánea con respecto al sistema fijo en la barra*, calcule la diferencia de tiempo Δt con la cual arriba cada uno de los destellos al observador S.



Nota: El intervalo Δt , *no* depende de la distancia a la cual se ubica la barra del origen de S. Ud. puede posicionarla donde más le acomode, respetando las condiciones impuestas en el enunciado del problema.



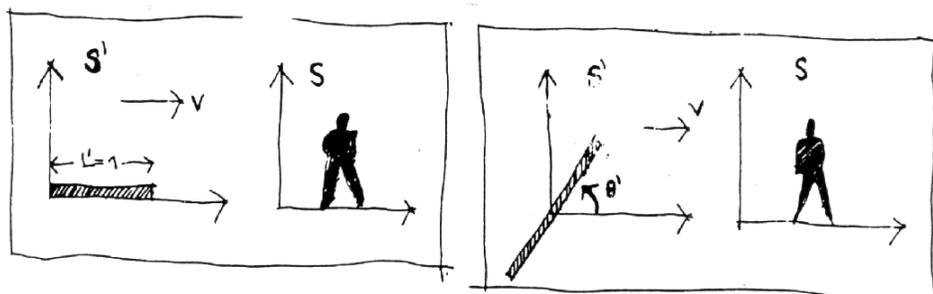
- 22.– Un cuadrado de largo propio L pasa frente a un observador con una velocidad V , como indica la figura. Para los efectos que nos interesan acá, el observador es un punto. El cuadrado y el punto se encuentran en el mismo plano. Cuando el cuadrado pasa frente al observador, éste lo ve rotado en vez de contraído. Muestre que efectivamente se ve rotado y encuentre el ángulo de rotación aparente.

NOTA: Acá se trata de VER y puede suponer que el largo L es mucho menor que la distancia que separa al cuadrado del observador, de modo que los rayos provenientes de los extremos de L se pueden considerar paralelos.

La historia de este problema es interesante. Lo resolvió R. Penrose en 1959. Einstein estimó que sólo había contracción del largo. Para más detalles y dibujos muy interesantes y la solución, puede ver el sitio

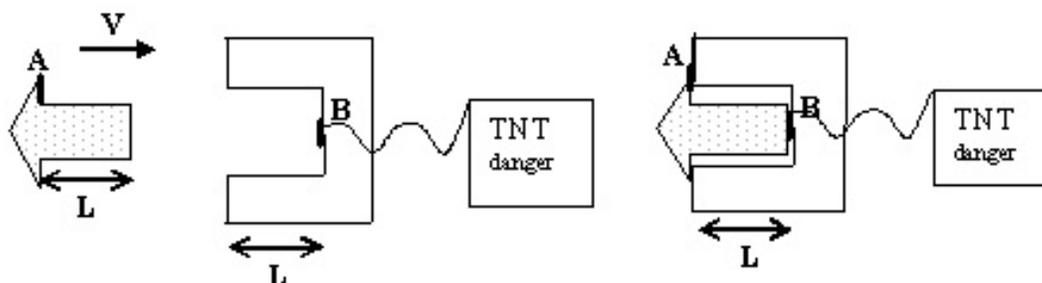
<https://physicsworld.com/a/the-invisibility-of-length-%e2%80%afcontraction/>

aparece en la revista Physics World 13 Aug 2019, "Taken from the August 2019 issue of Physics World. Members of the Institute of Physics can enjoy the full issue via the Physics World app."



23.- Una varilla de un metro de longitud en su sistema propio, se aproxima a un observador en reposo con una velocidad $\frac{24}{25}c$, como se indica en la Figura.

- a.- ¿Cuál es el largo de esta varilla en el sistema del observador?
- b.- Suponga ahora que la varilla está inclinada en un ángulo $\theta' = \arccos(5/6)$, en el sistema de referencia que viaja con la varilla. Calcule el ángulo de inclinación de la varilla medido en el sistema de referencia del observador fijo en tierra.
- c.- Calcule el largo de la varilla en el sistema de referencia del observador en reposo, para esta segunda configuración.



24.- La estructura de la izquierda (remache) tiene una protuberancia de largo L que al insertarse en el objeto con forma de U a la derecha alcanza justo a tocar el interruptor B ubicado al fondo de la cavidad. Esto ocurre cuando ambos objetos están en reposo (primera figura). B es un interruptor que, al ser tocado, gatilla la bomba de TNT señalada. Note que la cabeza del remache (por ejemplo el borde A) se apoya en los bordes del objeto en U al ser insertado.

- i.- Suponga que el mismo remache se acerca con una rapidez V , con respecto a un observador en reposo en la estructura en U, como aparece en la figura. Explique cuantitativamente qué sucede con el extremo del remache cuando A toca el borde de U: también toca B , lo tocó antes, a qué distancia se encuentra según qué observador ¿ Explota la bomba? Debe acompañar un gráfico espacio-tiempo de la situación donde se especifique qué midió y su valor.

- ii.- Considere las mismas preguntas, pero ahora desde el punto de vista de un observador en reposo con respecto al remache que ve acercarse al objeto en U. Siendo un observador sistema inercial, opina que la estructura en U se acerca con rapidez V . ¿ Explota o no la bomba, de acuerdo a este observador?
- iii.- En definitiva, si la bomba explota NO puede depender del observador. ¿ Cómo resuelve Ud. esta paradoja?
- iv.- En el caso i.- suponga que se conectó un dispositivo al punto A del remache tal que si A es presionado dispara un laser que corta el cable que une B con la bomba. En este nuevo escenario: ¿ Explota ésta o no?

25.- El diagrama representa un policía midiendo la velocidad de un auto mediante el efecto Doppler. Nos instalamos en el sistema de referencia de la autoridad. Del auto sólo indicamos la flecha del tiempo para no complicar el dibujo. Se indica la trayectoria de dos nodos separados por una longitud de onda (λ) emitida por la pistola del policía y la recibida después de reflejarse en el auto, unos instantes más tarde. (recuerde que los largos, como la longitud de onda, se miden en intervalos tipo espacio).

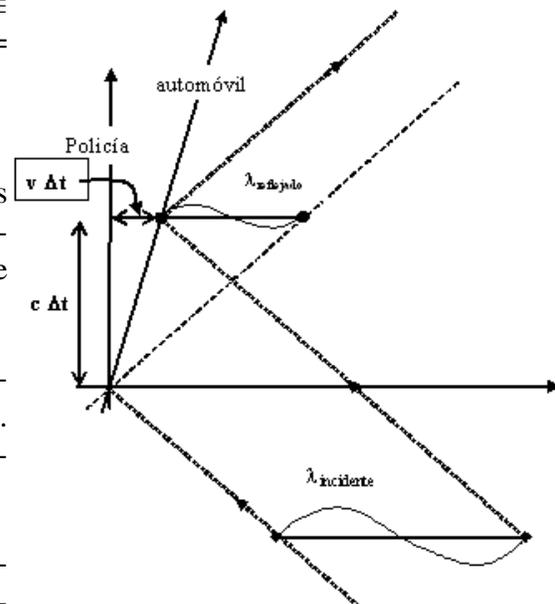
a.- A partir de la Figura 25, demuestre por qué: $c\Delta t = V\Delta t + \lambda_{\text{reflejado}}$, y que $c\Delta t = \lambda_{\text{incidente}} - V\Delta t$, donde V es la velocidad del auto con respecto al policía.

b.- A partir del resultado anterior obtenga ($f \equiv$ frecuencia), $f_{\text{reflejada}} = k f_{\text{incidente}}$, con $k = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}$.

c.- Suponiendo que el cambio de frecuencia es pequeño debido a que el valor de V/c es muy pequeño, muestre que $(\Delta f/f) \approx 2 V/c$. Encuentre este valor si $V = 120$ km/h.

d.- El radar de la policía de Santiago, opera con una frecuencia de 10.525×10^9 ciclos/s. ¿Cuántos ciclos por segundo cambia el haz reflejado comparado con el incidente (o enviado)?

e.- ¿Qué resolución debe tener la pistola que opera la policía para poder discriminar entre un automovilista que viaja a 120 km/h y otro, infractor, que guía a 121 km/h?



Bibliografía

- [1] **Spacetime Physics**, 1998, fifth printing, R. Taylor and J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company.
- [2] **Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica**, R. Resnik. 1976, Ed. Limusa, México.
- [3] **A First Course in General Relativity**, Bernard Schutz, Cambridge Press University, 2004.
- [4] **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**, James B. Hartle, Addison Wesley, 2003.
- [5] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.
- [6] **Feynman Lectures on Physics**, R. P. Feynman, R. Leighton and M. Sands, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Sección 18-6.
- [7] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.
- [8] **The illustrated Longitude**, Dava Sobel and Williams J. D. Andrews, Walker and Company, New York, 1998.
- [9] **Espacio, tiempo y Gravitación**, R. Wald, Fondo de Cultura Económica # 14315.
Carter et al., Sci., **224**, 1 June, page 957.
- [10] **Time Too Good to Be True**, D. Kleppner, Physics Today, **Reference Frame**, March 2006, page 10.
- [11] **Around the world Atomic clocks: Predicted and Observed Relativistic time gains**, J. C. Hafele y R. E. Keating, Science, **177**, 166, 1972, pag 166.
- [12] **On the electrodynamics of moving bodies**, A. Einstein, June 30, 1905
- [13] **Splitting the second**, Tony Jones, IoP publishing, Bristol, 2001.
- [14] **It's About Time: Understanding Einstein's Relativity**, N. David Mermin, Princeton University Press, 2005.

- [15] **Special Relativity for the Enthusiastic Beginner**, David Morin, Copyright DMorin 2017. Es un libro auto editado. Está en Amazon y todas las otras compañías.
- [16] <https://physicsworld.com/a/the-invisibility-of-length-contraction/> The invisibility of length Contraction. 13Ag2019.