Repaso de Cálculo

Derivadas

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliares: Gabriel Aguayo, Leslie Cancino, Sebastián Vargas
Ayudante: Rafael Inostroza

1. Derivadas importantes

Saberse estas derivadas es muy necesario.

1.1. Derivada de una constante

$$\frac{d}{dx}C = 0 \tag{1}$$

1.2. Derivada de exponenciales

$$\frac{d}{dx}a^x = ln(a) \cdot a^x \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{3}$$

1.3. Derivada del logaritmo natural

$$\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x} \tag{4}$$

1.4. Derivada de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x) \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}tan(x) = sec^2(x) \tag{7}$$

2. Reglas importantes

Para no saturar con tantas derivadas por lo general se adoptan notaciones que acorten lo que tenemos que escribir y faciliten la lectura. Una notación general es usar una prima para denotar que se está derivando con respecto a la variable de la que depende la función. Esto es

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = [f(x)]' \tag{8}$$

Es usual usar la notación de Newton que usa un punto para denotar derivadas con respecto al tiempo. Por ejemplo la segunda ley de Newton en una dimensión se puede escribir.

$$\vec{F} = m \cdot \ddot{x} \tag{9}$$

2.1. Multiplicación por constante

Las derivadas no ven las constantes multiplicando.

$$\frac{d}{dx}[C \cdot f(x)] = C \cdot \frac{d}{dx}f(x) \tag{10}$$

$$[C \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x) \tag{11}$$

Ej.:

$$\frac{d}{dx}[-sen(x)] = -cos(x)$$

2.2. Regla de la potencia*

Una de las reglas más importantes, no olvidarla. También funciona con exponentes fraccionarios, como por ejemplo, las raíces.

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Ej.:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.3. Regla de la suma

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{12}$$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x) \tag{13}$$

2.4. Regla del producto*

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)] \tag{14}$$

2.5. Regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]}{g(x)^2} \tag{15}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{16}$$

2.6. Regla de la cadena **

La regla de la cadena es muy importante tenerla dominada.

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}[f(g(x))]\cdot\frac{d}{dx}[g(x))] \tag{17}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{18}$$

Para entender lo que significa hacer lo anterior lo importante es notar que hay que diferenciar f sin tener en consideración $g(x)$, después de computar la derivada de $f(x)$ se evalúa la función $g(x)$ (en la derivada) y luego se multiplica esto por la derivada de $g(x)$. Esto es decir que para hacer la regla de la cadena se debe hacer por çapasïdentificando cual es la función que engloba a las otras. La regla de la cadena se puede hacer múltiples veces de la misma forma, cada vez que se entra a otra capa.

Otra forma de entender esta regla es la siguiente. Sea $y = f(u)$ con $u = g(x)$. De este modo la regla de la cadena es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{19}$$

De este modo podemos verificar que esto es correcto pues pareciera que los "du"se pudieran cancelar dejando bien la igualdad. De este modo podemos entender la regla de la cadena del siguiente modo.

Si **y** *cambia* **a** *veces tan rápido como* **u**
y **u** *cambia* **b** *veces tan rápido como* **x**,
entonces **y** *cambia* **ab** *veces tan rápido como* **x**

3. Problemas

Computar las derivadas de las siguientes funciones con respecto a la variable de la que depende la función.

1. $$f(x) = 666$$
2. $$g(x) = 1313\cdot x$$
3. $$x(t) = x_0 + v_0\cdot t + \frac{g\,t^2}{2}$$
4. $$U(x) = -\frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2$$
5. $$h(x) = \pi\cdot e^x$$
6. $$n(x) = 2^x$$
7. $$\tilde{n}(x) = x\cdot ln(x)$$
8. $$\eta(x) = x^x$$
9. $$\phi(x) = A\cdot sen(x) - B\cdot cos(x)$$

10.
$$V(r) = \frac{GM}{r}$$

11.
$$\vartheta(r) = r^2 \cdot ln(r)$$

12.
$$\xi(x) = \sqrt{ln(x)}$$

13.
$$\Xi(x) = \sqrt{ln(\sqrt{x})}$$

14.
$$\psi(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

15.
$$\zeta(t) = \frac{1}{1 + (x - ct)^2}$$

16.
$$\varepsilon(t) = A \cdot sen(x - ct) + B \cdot cos^2(x + ct)$$

17.
$$\varphi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$$

18.
$$p(t) = \frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}$$

19.
$$\smiley(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

20.
$$\blacksmiley(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

4. Temperatura de un agujero negro

Stephen Hawking calculó que la entropía de un agujero negro que no rota y sin carga es:

$$S = \frac{k_B\, c^3\, A}{4\, G\, \hbar}$$

donde

$$A = 4\pi R_s^2$$

Es el área del horizonte de eventos del agujero negro, con $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ el radio de Schwartzschild del mismo.

(a) Si la temperatura se define como $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$. Y usando que $E = Mc^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial M}$. Calcular la temperatura del agujero negro.

(b) La ley de Stefan-Boltzmann nos dice la cantidad de energía emitida por unidad de tiempo en función de la temperatura. Y tiene la forma.

$$\frac{dE}{dt} = \sigma T^4$$

Calcule cuanta masa pierde el agujero negro por unidad de tiempo ($\frac{dM}{dt}$).

Propuesto: Integrar $\frac{dM}{dt}$ en el tiempo para obtener la masa en función del tiempo $M(t)$. Darse una masa inicial (del agujero negro de nuestra galaxia por ejemplo) y calcular cuanto tiempo demora en "evaporarse".