Serway

Vol. 2

FÍSICA

SOLUCIONARIO

SAN MARCOS

22-50

Solucionario
Física de Serway

Vol. 2

Solucionario
Física de Serway

Vol. 2

SAN MARCOS

Solucionario - Física de Serway, Volumen 2

Primera Edición: 2005

Hecho el depósito legal ley n.° 26905
Biblioteca Nacional del Perú
REG. n.° 2005-2513
ISBN 9972-34-254-9

© Aníbal Paredes Galván - Editor.
Editorial San Marcos
Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304 Jesús María, Lima
Telefax 330-8553 / 332-0153
E-mail: san-marcos@terra.com.pe

Solucionario a cargo de Juan Garibay Calderón

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 974 Of. 404, Lima, telf.: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220 Of. 304, Jesús María, telf.: 423-1297

Impreso en Perú / Printed in Peru

Composición, diagramación y montaje
Editorial San Marcos

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L., Lima, Perú (RUC 10090984344).

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Debido al papel preponderante de la física en disciplinas como la ingeniería, la química y la medicina, y a la trascendencia de las aplicaciones de las leyes físicas en la moderna tecnología y en los avances científicos, en ese sentido el SOLUCIONARIO FÍSICA DE SERWAY *tiene como principal objetivo brindarle al estudiante la posibilidad de comprender y consolidar los conocimientos teóricos aprendidos, esto es, reforzar el aprendizaje de conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones en el mundo real.*

La obra está desarrollada en tres volúmenes que hacen un total aproximado de 2 400 problemas resueltos, en 34 capítulos; abarca temas fundamentales de la física clásica que se dividen en 4 partes. La parte I (capítulos 1 - 15) se abordan los fundamentos de la mecánica newtoniana y de la física de fluidos; la parte II (capítulos 16 -18) que comprende el movimiento ondulatorio y el sonido; la parte III (capítulos 19 - 22) considera el calor y la termodinámica y la parte IV (capítulos 23-34) comprende la electricidad y el magnetismo.

Cada uno de los capítulos se ha desarrollado siguiendo un orden coherente de temas con el propósito de llegar didácticamente al estudiante, por lo que esperamos que esta obra sirva como un libro de consulta práctica, dentro de esa gran senda del conocimiento científico que le toca a Ud. descubrir.

El editor

Capítulo 13

MOVIMIENTO OSCILATORIO

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. El desplazamiento de una partícula en t = 0,25 s está dado por la expresión $x = (4,0\ \text{m})\cos(3,0\ \pi t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine, a) la frecuencia y el período del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, y d) el desplazamiento de la partícula en t = 0,25 s.

Resolución :

$$x(t) = (4,0)\cos(3\pi t + \pi)$$

Parte (a)

Sabemos que: $\omega = 2\pi.f \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{3\pi}{2\pi} = 1,5\ \text{Hz}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,5} = 0,66\ \text{s}$$

Parte (b) $\quad A = 4,0\ \text{m}$

Parte (c) $\quad \phi = \pi$

Parte (d) $\quad x(0,25\ \text{s}) = 4,0\cos[1,75\pi + \pi] = 4,0\cos(\pi/4) = 2,83\ \text{m}$

2. Una bola pequeña se pone en movimiento horizontal haciéndola rodar con una velocidad de 3,00 m/s a través de un cuarto de 12,0 m de largo, entre dos paredes. Supóngase que los choques con cada pared son perfectamente elásticos y que el movimiento es perpendicular a las dos paredes. a) Demuestre que el movimiento es periódico, y b) determine su período. ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

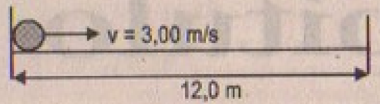
Resolución :

Por dato: La bola realiza un choque perfectamente elástico entonces:

$$E_{K\ inicial} = E_{K\ final} \qquad \therefore \quad v_{inicial} = v_{final}$$

$\Rightarrow$ «v» no cambia en el tiempo

Por otro lado: $x = 0$



El máximo desplazamiento de la partícula es 12 m, y como la velocidad no cambia en el tiempo entonces el tiempo en el recorrido no cambiará en consecuencia el movimiento «es periódico».

Parte (b)

En un M.A.S. $\quad E_{mecánica} = cte = \frac{1}{2}\,k.A^2$

En un choque P. elástico $\quad E_{mecánica} = E_K = \frac{1}{2}\,m.v^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}\,mv^2 \qquad \therefore \quad \frac{k}{m} = \frac{9}{144}$$

Entonces: $\quad T = 2\pi\,.\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\,.\sqrt{\frac{144}{9}} \qquad \therefore \quad T = 25,1\text{ s}$

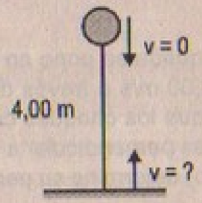
Parte (c)
Por analogía en choque perfectamente elástico horizontal la energía mecánica es constante, y como en un M.A.S. también lo es. Entonces por analogía:

$\frac{k}{m}$ = cte. Luego el movimiento es armónico.

3. Una bola que se deja caer desde una altura de 4,00 m efectúa un choque perfectamente elástico con el suelo. Suponiendo que no se pierde energía debido a la resistencia del aire, a) demuestre que el movimiento es periódico, y b) determine el período del movimiento. c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

Resolución:

Parte (a)



Por conservación de la energía:

$$E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuando la bola choca con el suelo por primera vez, rebota con la misma velocidad por consiguiente recorrerá la misma altura en «tiempos iguales» por lo tanto el tiempo no cambia. Luego el período no cambia, entonces «es periódico».

Parte (b)
Por analogía: En un péndulo que realiza un M.A.S.

Entonces: $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Depende de la longitud en la que se encuentra del punto más bajo la partícula (P.E.)

Entonces: $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{4,00\text{ m}}{9,81}}$

$$\therefore \quad T = 2(3,1416)\sqrt{\frac{4}{9,81}} = 4,01\text{ s}$$

4. Si la posición y velocidad iniciales de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple son x_o, v_o y a_o, y si la frecuencia angular de oscilación es ω, a) demuestre que la posición y la velocidad del objeto para todo el tiempo puede escribirse como

$$x(t) = x_o\cos\omega t + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}\,\omega t$$

$$v(t) = -x_o\text{sen}\,\omega t + v_o\cos\omega t$$

b) Si la amplitud del movimiento es A, demuestre que

$$v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$$

Resolución:

Datos: $\quad$ En $t = 0$ x_o; v_o, a_o
$\quad$ «ω» frecuencia angular

Parte (a)

Por demostrar: $\quad x(t) = x_o\cos\omega t + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}\,\omega t$

Sabemos que la posición de un armónico simple es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A[\cos(\omega t)\cos\phi - \text{sen}\,\omega t\,.\,\text{sen}\,\phi]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos\omega t.\cos\phi - A\text{sen}\,\omega t.\text{sen}\,\phi \qquad \text{... (1)}$$

Por otro lado: (por dato)

$$x(t = 0) = x_0 = A\cos(\phi) \quad \text{... (2)}$$

$$v_o = \frac{dx}{dt}(t = 0) = -A\omega\text{sen}(\phi) \qquad \Rightarrow \quad -A\text{ sen}(\phi) = \frac{v_o}{\omega} \quad \text{... (3)}$$

$$a_0 = \frac{dv}{dt}(t = 0) = -A\omega^2\cos(\phi)$$

Luego: (3) y (2) en (1)

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)\text{sen}(\omega t) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar: $v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$

Sabemos que:

$$x_o^2 = A^2\cos^2(\phi) \qquad \Rightarrow \quad x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi))$$

$$v_o^2 = A^2\omega^2\,\text{sen}^2(\phi)$$

$$\therefore \quad x_o^2\omega^2 + v_o^2 = A^2\omega^2$$

Por otro lado: $a_o = -\omega^2(x_o) \quad \Rightarrow \quad -a_o x_o = \omega^2 x_o^2$

Luego: $v^2 - ax = v_o^2 - a_o x_o = A^2\omega^2$ l.q.q.d.

5. El desplazamiento de un objeto es $x = (8{,}0\ \text{cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$, donde x está en centímetros y t está en segundos. Calcule, a) la velocidad y aceleración en $t = \pi/2$ s, b) la velocidad máxima y el tiempo anterior (t > 0) en el cual la partícula tiene esta velocidad y c) la aceleración máxima y el tiempo anterior (t > 0) en el cual la partícula tiene esta aceleración.

Resolución:

$$x(t) = (8{,}0\ \text{cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$$

Parte (a) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = (-16{,}0\ \text{cm})\text{sen}(2{,}0t + \pi/3)$

Luego: $v(t = \pi/2) = (-16{,}0\ \text{cm})\text{sen}\,[\pi + \pi/3]$

$$\therefore \quad v(t = \pi/2) = 8\sqrt{3}\ \text{cm/s} = 13{,}86\ \text{cm/s}$$

Parte (b) $v_{máx} = (-16{,}0\ \text{cm})\text{sen}[2{,}0t + \pi/3]$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = +16{,}0\ \text{cm/s}$$

Luego: $2{,}0t + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{12}\ \text{s} = 0{,}262\ \text{s}$$

Parte (c) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -(32{,}0\ \text{cm})\cos(2{,}0t + \pi/3)$

$\Rightarrow$ $a_{máx}$ será cuando $\cos[2{,}0t + \pi/3] = -1$

$$\Rightarrow \quad 2{,}0t + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{3} = 1{,}04\ \text{s}$$

En consecuencia: $a_{máx} = +32\ \text{cm/s}^2$

6. Una partícula de 20 g se mueve en un movimiento armónico simple con una frecuencia de 3,0 oscilaciones /s y una amplitud de 5,0 cm. a) ¿Qué distancia total se mueve la partícula durante un ciclo de su movimiento? b) ¿Cuál es su velocidad máxima? ¿Dónde ocurre ésta? c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. ¿En qué parte del movimiento ocurre la aceleración máxima?

Resolución:

$$m = 20\ \text{g} \quad ; \quad f = 3\,\frac{\text{oscilaciones}}{\text{s}} \quad ; \quad A = 5\ \text{cm}$$

Parte (a)

Como: $f = \dfrac{3}{s} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{3}\ \text{s}$

Como parte del origen: $x(t) = A\cos(\omega t)$

Por otro lado: $\omega = 2\pi.f \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi(3) = 6\pi$ rad/s

Luego: $x(t = 1/3\ \text{s}) = (5\ \text{cm})\cos\left[6\pi\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$

$$\therefore \quad x(t = 1/3) = (5\ \text{cm})\cos(2\pi) = 5\ \text{cm}$$

Parte (b) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = A\omega = 5\ \text{cm}\,(6\pi) = 30\pi = 94{,}25\ \text{cm/s}$$

$$\omega t = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad 6\pi.t = \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore \quad t = 0{,}25\ \text{s}$$

Parte (c) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad a_{máx} = A\omega^2 = (5\ \text{cm})(94{,}25)^2$$

$$\therefore \quad a_{máx} = 17{,}76\ \text{m/s}^2$$

Luego: $\omega t = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\pi}{6\pi} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}17\ \text{s}$

7. Una partícula se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x en un movimiento armónico simple a partir del origen en t = 0. Si la amplitud de su movimiento es de 2,00 cm y la frecuencia es 1,50 Hz, a) pruebe que su desplazamiento está dado por $x = (2{,}00\ \text{cm})\text{sen}(3{,}00\ t)$. Determine b) la velocidad máxima y el tiempo más anterior (t > 0) en el cual la partícula tiene esta velocidad, c) la aceleración máxima y el

tiempo más anterior ($t > 0$) en el cual la partícula tiene esta aceleración, y d) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1{,}00$ s.

Resolución :

Parte (a)
Por demostrar $\quad x(t) = (2{,}00 \text{ cm}) \operatorname{sen}(3{,}00t)$

Sabemos que la partícula tiene M.A.S. entonces:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Por otro lado: $\quad f = 1{,}50 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 3\pi \text{ rad/s}$

Luego: como parte del origen: $\quad x(t = 0) = 0 = 2{,}00\cos(\phi)$

$$\therefore \quad \phi = \pi/2 \quad ó \quad 3\pi/2$$

Además: $\quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t) \, . \cos\phi - A\operatorname{sen}(\omega t) \, . \operatorname{sen}\phi$

Si: $\quad \phi = 3\pi/2$
$\quad x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t)$

Reemplazando: $\quad x(t) = 2{,}00 \text{ cm} \operatorname{sen}(3{,}00\,\pi t) \qquad$ l.q.q.d

Parte (b) $\quad v(t) = \dfrac{dx}{dt} = 2{,}00.\omega \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad v_{máx} = (2{,}00)(3\pi) = 6\pi = 18{,}85 \text{ cm/s}$$

$$3\pi.t = 2\pi \qquad \therefore \quad t = 2/3 = 0{,}667 \text{ s}$$

Parte (c) $\quad a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -2{,}00 \, . \, \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad a_{máx} = (2{,}00)(3\pi)^2 \approx 1{,}776 \text{ m/s}^2$$

Entonces: $\quad \omega t = 3\pi/2 \qquad \therefore \quad t = 1/2 = 0{,}5 \text{ s}$

8. Un émbolo en un motor de automóvil efectúa un movimiento armónico simple. Si su amplitud de oscilación a partir de la línea central es ±5,0 cm y su masa es de 2,0 kg, encuentre la velocidad y la aceleración máximas del émbolo cuando el motor trabaja a una tasa de 3 600 rev/min.

Resolución :

Dato: $\quad A = +5 \text{ cm} \quad ; \quad m = 2{,}0 \text{ kg}$
$\quad f = 3\,600 \text{ rev/min}$

$v_{máx} = A\omega$

- Por otro lado: $\quad \omega = 2\pi.f \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \times 3\,600 \times \dfrac{1}{60 \text{ s}}$

$$\therefore \quad \omega = 377 \text{ rad/s}$$

Luego: $\quad v_{máx} = (5 \times 10^{-2}) \times 377$

$$\therefore \quad v_{máx} = 18{,}85 \text{ m/s}$$

- Por otro lado: $\quad a_{máx} = A.\omega^2$

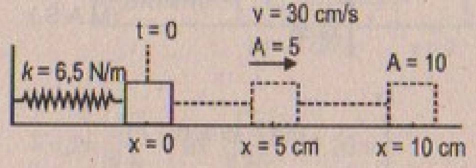
$$\Rightarrow \quad a_{máx} = (5 \times 10^{-2}) \times (377) \qquad \therefore \quad a_{máx} = 2\,842{,}58 \text{ m/s}^2$$

UNA MASA UNIDA A UN RESORTE

(*Nota:* ignore la masa del resorte en todos estos problemas)

9. Un bloque de masa desconocida se une a un resorte de constante igual a 6,50 N/m y experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 10,0 cm. Cuando la masa está a la mitad del camino entre su posición de equilibrio y el punto extremo, se mide su velocidad y se encuentra un valor igual a + 30,0 cm/s. Calcule a) la masa del bloque, b) el período del movimiento y c) la aceleración máxima del bloque.

Resolución :



Parte (a)

Sabemos que en un M.A.S.: $\quad E_{mecánica} = \dfrac{1}{2} kA^2 = cte$

$$\Rightarrow \quad \text{En} \quad x = A/2 = 5 \text{ cm}$$

La $\quad E_K + E_p = \dfrac{1}{2} k.A^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m)\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = kA^2$$

$$\Rightarrow \quad m(30)^2 + (5)^2(6{,}5) = (6{,}5)(10)^2 \qquad \therefore \quad m = 0{,}542 \text{ kg}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi \times \sqrt{\frac{0{,}542}{6{,}5}} = 2\,(3{,}1416)\sqrt{\frac{0{,}542}{6{,}5}}$$

$$\therefore \quad T = 1{,}81 \text{ s}$$

Parte (c)
Sabemos que en un movimiento armónico simple: $\quad a_{máx} = A\omega^2$

Como: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{(6,5)}{0,542} = 11,993\ \text{rad}^2/\text{s}^2$

y como: $A = 10\ \text{cm} = 0,1\ \text{m}$

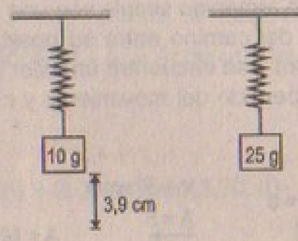
Entonces: $a_{máx} = \dfrac{(0,1)(6,5)}{0,542}$

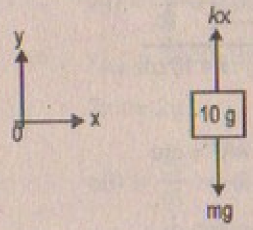
$\therefore\ a_{máx} = 1,199\ \text{m/s}^2 = 1,2\ \text{m/s}^2$

10. Un resorte se extiende 3,9 cm cuando cuelga de él una masa de 10 g. Si una masa de 25 g unida a este resorte oscila en un movimiento armónico simple, calcule el período del movimiento.

Resolución:

g = 9,81





$mg - kx = 0$

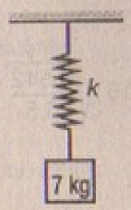
$\Rightarrow\ k = \dfrac{mg}{x} = \dfrac{10 \times 9,81}{3,9}$

Por otro lado: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{25 \times 3,9}{10 \times 9,81}}$

$\therefore\ T = 0,63\ \text{s}$

11. Una masa de 7,00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical fijo a una viga volada. La masa se pone a oscilar verticalmente con un período de 2,60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

Resolución:



$T = 2,60\ \text{s}$

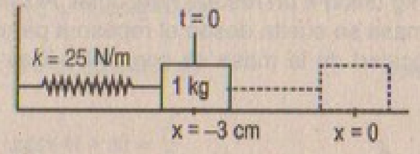
En un M.A.S. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$\Rightarrow\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7}{k}} \Rightarrow (2,6)^2 = 4\pi^2 . \dfrac{7}{k}$

$\Rightarrow\ k = \dfrac{28}{(2,6)^2}.\pi^2 \quad \therefore \quad k = 40,9\ \text{N/m}$

12. Una masa de 1,0 kg unidad a un resorte de constante de fuerza igual a 25 N/m oscila sobre una pista horizontal sin fricción. En t = 0, la masa se suelta desde el reposo en x = –3,0 cm. (Es decir, el resorte se comprime 3,0 cm.) Encuentre: a) el período de su movimiento, b) los valores máximos de su velocidad y aceleración, y c) el desplazamiento, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

Resolución:



Parte (a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{25}} = 1,26\ \text{s}$

Parte (b) $v_{máx} = \omega A = A\sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow v_{máx} = 3 \times \sqrt{\dfrac{25}{1}} = 15\ \text{cm/s}$

$a_{máx} = A\omega^2 = A\dfrac{k}{m} \Rightarrow a_{máx} = 3 \times 25 = 75\ \text{cm/s}^2$

Parte (c) $x(t) = (3\ \text{cm})\cos\left[\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right]$

$x(t = 0) = -3 = 3\cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = -1$

$\therefore\ \phi = \pi$

Luego: $x(t) = (3\ \text{cm})\cos[5t + \pi]$

Por otro lado: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -(3\ \text{cm}) . \omega\text{sen}[5t + \pi]$

$v(t) = -(15\ \text{cm})\text{sen}[5t + \pi]$

Por último: $\dfrac{dv}{dt} = a(t) = (-15\ \text{cm}).\omega\cos[5t + \pi]$

$\therefore\ a(t) = (-75\ \text{cm})\cos[5t + \pi]$

13. Un oscilador armónico simple tarda 12,0 s para efectuar cinco vibraciones completas. Encuentre: a) el período de su movimiento, b) la frecuencia en Hz, y c) la frecuencia angular en rad/s.

Resolución:

Dato: En 12 s (efectúa 5 vibraciones)

Parte (a) $f = \dfrac{5}{12\ s} \Rightarrow T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4\ s$

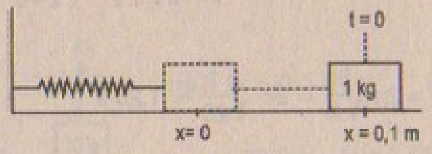
Parte (b) $f = \dfrac{5}{12} = 0{,}417\ Hz$

Parte (c) $\omega = 2\pi . f = 2(3{,}1416)\ (0{,}417)$

$\therefore \quad \omega = 2{,}62\ rad/s$

14. Una masa de 1,0 kg unida a un resorte horizontal. Al principio el resorte está extendido 0,10 m y la masa se suelta desde el reposo a partir de esa posición. Después de 0,50 s, la velocidad de la masa es cero. ¿Cuál es la velocidad máxima de la masa?

Resolución:



$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow \quad x(t_o) = 10\ cm = 10\ cm\ \cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi) = 1$

$\therefore \quad \phi = 0°$

Luego: $x(t) = (10\ cm)\cos(\omega t)$

Entonces: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) = -(10\ cm)\ \omega \text{sen}(\omega t)$

En t = 0,5 s la velocidad es cero

$\Rightarrow \quad v(0{,}5\ s) = 0 = (-10\ cm\ \omega)\text{sen}(0{,}5\ \omega)$

$\Rightarrow \quad -10\omega = 0 \ \vee \ \text{sen}(0{,}5\ \omega) = 0$ (No cumple)

ó también $-10\omega = \pi \ \vee \ \text{sen}(0{,}5\ \omega) = \pi$ (cumple)

$\Rightarrow \quad \omega = 2\pi \quad \therefore \quad v_{máx} = \omega A = 2\pi(10) = 62{,}8\ cm/s$

15. Una masa de 0,50 kg unida a un resorte de 8,0 N/m de constante de fuerza vibra en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10 cm. Calcule, a) el valor máximo de su velocidad y aceleración, b) la velocidad y aceleración cuando la masa

está a 6,0 cm de la posición de equilibrio, y c) el tiempo que tarda la masa en moverse de x = 0 a x = 8,0 cm.

Resolución:

Datos: (M.A.S.) m = 0,5 kg ; k = 8,0 N/m ; A = 10 cm

Parte (a) $v_{máx} = A\omega = A\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\sqrt{\dfrac{8{,}0}{0{,}5}} \quad \therefore \quad v_{máx} = 40\ cm/s$

$a_{máx} = A\omega^2 = A\ \dfrac{k}{m} = 10 \times \dfrac{8}{0{,}5} \quad \therefore \quad a_{máx} = 160\ cm/s^2$

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 4\ rad/s$

Entonces: $x(t) = 10\cos(4t + \phi)$

$\Rightarrow \quad 6 = 10\cos(4t + \phi) \quad \therefore \quad \cos(4t + \phi) = \dfrac{3}{5}$

Entonces: $\text{sen}(4t + \phi) = \dfrac{4}{5}$

Luego: $\dfrac{dx}{dt} = v(t) = -40\ \text{sen}(4t + \phi)$

$\therefore \quad v = (-40)\left(\dfrac{4}{5}\right) = -0{,}32\ m/s$

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -160\cos(4t + \phi)$

$\Rightarrow \quad a = -160\left(\dfrac{3}{5}\right) = -0{,}96\ m/s^2$

Parte (c) Tiempo de x = 0 $\rightarrow$ x = 8,0 cm

$x(t = 0) = 0 = 10\cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$

$x(t = ?) = 8\ cm = 10\ cm\ \cos(4t) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{5} = \cos(4t)$

$\therefore \quad 4t = 37 \times \dfrac{\pi}{180} \quad \therefore \quad t = 0{,}16\ s$

16. a) Un bloque de 100 g se coloca sobre un bloque de 200 g, como se muestra en la figura P13.16. El coeficiente de fricción estático entre los dos bloques es 0,20. El bloque de abajo se mueve después hacia delante y hacia atrás horizontalmente en

un movimiento armónico simple que tiene una amplitud de 6,0 cm. Si se mantiene la amplitud constante, ¿cuál es la frecuencia más alta para la cual el bloque superior no deslizará respecto del bloque inferior? b) Suponga que el bloque inferior se mueve verticalmente en un movimiento armónico simple y no horizontalmente. La frecuencia se mantiene constante en 2,0 oscilaciones / s mientras la amplitud se incrementa en forma gradual. Determine la amplitud a la cual el bloque superior ya no mantendrá contacto con el bloque inferior.

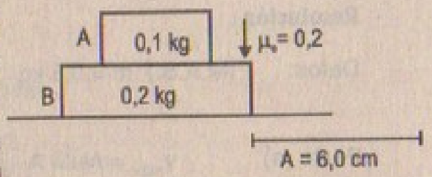
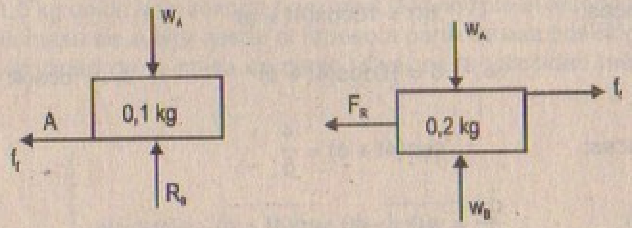


Figura P13.16

Resolución:

Parte (a) D.C.L. (de cada bloque)



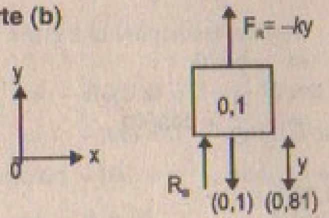
$$f_r = \mu_e.N = (0,2)(R_B) = (0,2)(0,1) \qquad \therefore \qquad F_R = f_r$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = (0,2)(0,1) \quad \Rightarrow k(0,06) = (0,2)(0,1) \quad \therefore \quad k = 0,3 \text{ N/m}$$

Luego: $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_B}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0,3}{0,2}}$$

Luego: $$\omega = 2\pi.f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0,3}{0,2}} = 0,195 \text{ Hz}$$

Parte (b)



$$\Rightarrow \quad 2,0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad k = 16 \text{ N/m}$$

Luego: $$+ky = (0,1)(9,81) - R_B = (0,1)(9,81) - (0,2)(9,81)$$

$$\Rightarrow \quad y = \text{amplitud} = \frac{(0,1)(9,81)}{16} - \frac{(0,2)(9,81)}{16} = 0,06 \text{ am}$$

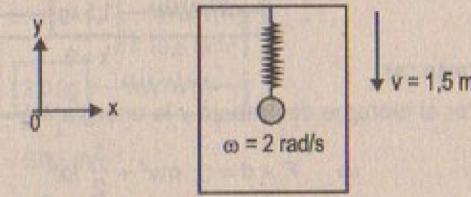
17. Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular de 2,00 rad/s. El resorte está suspendido del techo de la caja de un elevador y cuelga sin moverse (respecto de la caja de un elevador) conforme la caja desciende a una velocidad constante de 1,50 m/s. La caja se detiene repentinamente. a) ¿Con qué amplitud oscila la partícula? b) ¿Cuál es la ecuación de movimiento para la partícula? (Elija la dirección hacia arriba como positiva).

17A. Una partícula que cuelga de un resorte oscila con una frecuencia angular ω. El resorte está suspendido del techo de la caja de un elevador y cuelga sin moverse (respecto de la caja del elevador) conforme la caja desciende a una velocidad constante v. La caja se detiene repentinamente. a) ¿Con qué amplitud oscila la partícula? b) ¿Cuál es la ecuación de movimiento para la partícula? (Elija la dirección hacia arriba como positiva).

Resolución:

Parte (a)

Como el resorte oscila, entonces emplea un M.A.S.



Luego:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Con respecto del elevador (observador adentro)

$$x(t = 0) = x_o = 0 \qquad x(t = 0) = -v = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = A\cos(\phi) \qquad \therefore \qquad \phi = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad -v = -A.\omega \text{ sen}(\phi) \text{ (Baja)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{\omega} = A\text{sen}(\pi/2) \qquad \therefore \qquad A = \frac{v}{\omega} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ m}$$

Parte (b)

La ecuación del movimiento será:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \therefore \qquad x(t) = \left(\frac{v}{\omega}\right)\cos(\omega t + \pi/2)$$

Reemplazando: $$x(t) = (0,75)\cos(2t + \pi/2)$$

ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

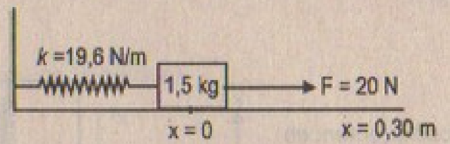
(*Nota: ignore la masa del resorte en todos estos problemas.*)

18. Un bloque de 1,5 kg en reposo sobre una mesa se une a un resorte horizontal con una constante de 19,6 N/m. Al principio el resorte no está extendido. Se aplica una fuerza constante horizontal de 20,0 N al objeto causando que el resorte se extienda.

a) Determine la velocidad del bloque después de que se ha movido 0,30 m a partir del equilibrio si la superficie entre el bloque y la mesa no presenta fricción. b) Conteste el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es 0,20.

18A. Un bloque de masa m en reposo sobre una mesa se une a un resorte horizontal con una constante k. El resorte no está extendido inicialmente. Se aplica una fuerza constante F al objeto causando que el resorte se extienda. a) Determine la velocidad del bloque después de que se ha movido una distancia d a partir del equilibrio si la superficie entre el bloque y la mesa no presenta fricción. b) Conteste el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es μ.

Resolución :



Parte (a)

Por el teorema del trabajo y la energía: $W_f = \Delta E_M$

$$\Rightarrow \quad F \times d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad 20(0,3) = \frac{1}{2}(1,5)v^2 + \frac{1}{2}(19,6)(0,3)^2$$

$$\therefore \quad v = 2,61 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Si hay fricción y el $\mu_k = 0,20$

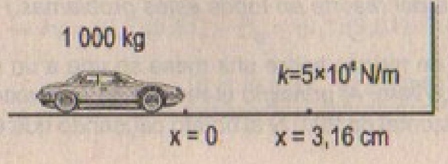
$$20(0,3) - f_f(0,3) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k.x^2$$

$$\Rightarrow \quad 20(0,3) - (0,20)(1,5)(9,81)(0,3) - \frac{1}{2}(19,6)(0,3)^2 = \frac{1}{2}(1,5)v^2$$

$$\therefore \quad v = 2,376 \text{ m/s}$$

19. Un automóvil que tiene una masa de 1 000 kg se dirige hacia un muro de ladrillos en una prueba de seguridad. El parachoques se comporta como un resorte de constante igual a 5,0 × 10⁶ N/m y se comprime 3,16 cm cuando el auto se lleva al reposo. ¿Cuál fue la velocidad del auto antes del impacto, suponiendo que no se pierde energía durante el impacto con la pared?

Resolución :



Por conservación de energía

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(10^3).v^2 = \frac{1}{2}(5 \times 10^6)(0,0316)^2$$

$$\therefore \quad v = 2,23 \text{ m/s}$$

20. Una bala de 10,0 g de masa se dispara contra y queda incrustada en un bloque de 2,0 kg unido a un resorte con constante igual a 19,6 N/m. a) ¿Cuánto se comprime el resorte si la velocidad de la bala justo antes de incidir en el bloque es de 300 m/s y el bloque se desliza a lo largo de una pista sin fricción? b) Responda el inciso a) si el coeficiente de fricción entre la pista y el bloque es 0,200.

Resolución :

Parte (a) $\quad v_{bala} = 300$ m/s

Por choque inelástico: $\quad P_{inicial} = P_{final}$

Entonces: $\quad m_B \cdot v_{bala} = (m_B + m_{bloque}) \cdot v_{final}$

$$\therefore \quad v_{final} = \frac{(3,00)(0,01)}{2,01} = 1,49 \text{ m/s}$$

Por conservación de energía: $\quad \frac{1}{2}mv^2_{final} = \frac{1}{2}kA^2$

$$\Rightarrow \quad (2,01)(1,49)^2 = 19,6A^2$$

$$\therefore \quad A = 0,477 \text{ m}$$

Parte (b) $\quad \mu_k = 0,2 \quad \Rightarrow \quad f_f = (0,2)(2)(9,81) = 3,924$ N

por el teorema del trabajo y la energía:

$$-f_f\,(d) = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}M_{total} \cdot v^2_{final}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(9,6)A^2 + 3,924\,A - \frac{1}{2}(2,01)(1,49)^2$$

Desarrollando la ecuación de segundo grado resulta que:

$$A = 0,32 \text{ m}$$

21. La amplitud de un sistema que se mueve en un movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en: a) la energía total, b) la velocidad máxima, c) la aceleración máxima, y d) el período.

Resolución :

Si la amplitud de un sistema es «A» entonces: $E_{total} = \frac{1}{2}kA^2$

a) Si «A» se duplica entonces:

$$E_{total} = \frac{1}{2}\,k(2A)^2 = 4\left(\frac{1}{2}k\,A^2\right)$$

$$\therefore \quad E_{total\ final} = \text{se cuadruplica}$$

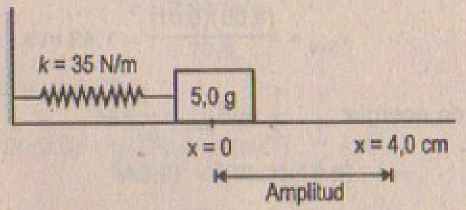
b) Si la amplitud es «A» entonces: $v_{máx} = A.\omega$
Si la amplitud es «2A» entonces: $v_{máx}$ = se duplica

c) Si la amplitud es «A» entonces: $a_{máx} = A.\omega^2$
Si la amplitud es «2A» entonces: $a_{máx}$ = se duplica

d) Si la amplitud es «A» entonces: $T = 2\pi/\omega$
Si la amplitud es «2A» entonces: T = es el mismo

22. Una masa de 50 g conectada a un resorte de 35 N/m de constante de fuerza oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4,0 cm. Encuentre, a) la energía total del sistema, y b) la velocidad de la masa cuando el desplazamiento es 1,0 cm. Cuando el desplazamiento es 3,0 cm, encuentre c) la energía cinética, y d) la energía potencial.

Resolución :



Parte (a) $E_{total} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(35)(4 \times 10^{-2})^2$

$$\therefore \quad E_{total} = 0{,}028 \text{ J}$$

Parte (b) $E_{total} = E_K + E_p$

$$\Rightarrow \quad 0{,}028 = \frac{1}{2}(50 \times 10^{-3})v^2 + \frac{1}{2}(35)(0{,}01)^2$$

$$\therefore \quad v = 1{,}02 \text{ m/s}$$

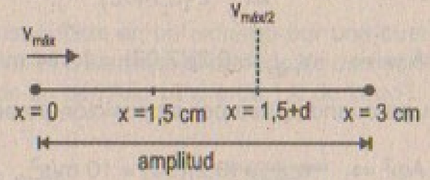
Parte (c) $0{,}028 = E_K + \frac{1}{2}(35)(3 \times 10^{-2})^2 \quad \therefore \quad E_K = 0{,}01225$ joules

Entonces: $E_p = 0{,}01575$ joules

23. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con una amplitud de 3,00 cm. ¿A qué desplazamiento desde el punto medio de su movimiento su velocidad es igual a la mitad de su velocidad máxima?

Resolución :

Amplitud = 3,0 cm



$E_{total} = E_K + E_p$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m.\left(\frac{v_{máx}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k(1{,}5+d)^2$$

$\therefore$ Por otro lado: $\frac{1}{2}k(3{,}0)^2 = \frac{1}{2}m.v_{máx}^2$

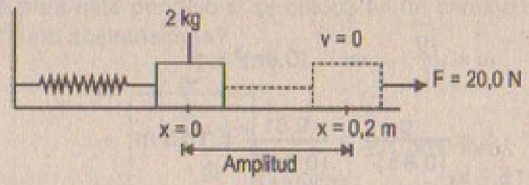
$$\therefore \quad v_{máx} = 3{,}0\sqrt{k/m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(3{,}0)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3{,}0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 + \frac{1}{2}k(1{,}5+d)^2$$

$$\Rightarrow \quad 9 - \frac{9}{4} = (1{,}5+d)^2 \qquad \therefore \quad 1{,}5 + d = \pm\,2{,}60 \text{ cm}$$

24. Una masa de 2,00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie lisa horizontal. Se necesita una fuerza horizontal de 20,0 N para mantener la masa en reposo cuando se jala 0,200 m a partir de su posición de equilibrio (el origen del eje x). La masa se suelta después desde el reposo con un desplazamiento inicial de x_0 = 0,200 m y subsecuentemente experimenta oscilaciones armónicas simples. Encuentre, a) la constante de fuerza del resorte, b) la frecuencia de las oscilaciones, y c) la velocidad máxima de la masa. ¿Dónde ocurre esta velocidad máxima? d) Encuentre la aceleración máxima de la masa. ¿Dónde ocurre? e) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Cuando el desplazamiento es igual a un tercio del valor máximo, encuentre f) la velocidad y g) la aceleración.

Resolución :



Parte (a) $\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - kx = 0 \quad \therefore \quad k = \frac{20}{0{,}2} = 100$ N/m

Parte (b) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{2}}$ $\therefore$ $\omega = 7{,}07$ rad/s

Como: $\omega = 2\pi.f \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{7{,}07}{2\,(3{,}1416)} = 1{,}12$ Hz

Parte (c) $v_{máx} = A.\omega \Rightarrow v_{máx} = (0{,}2)(7{,}07) = 1{,}414$ m/s

Esta velocidad ocurre cuando pasa por su posición de equilibrio.

Parte (d) $a_{máx} = A\omega^2 \Rightarrow a_{máx} = (0{,}2)(50) = 10$ m/s^2

Esta aceleración ocurre cuando pasa por su posición de equilibrio

Parte (e) $E_{total} = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}(100)(0{,}2)^2 = 2$ joules

Parte (f) Cuando desplazamiento $= \dfrac{A}{3} = \dfrac{0{,}2}{3}$

$$E_{total} = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{0{,}2}{3}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(2)v^2 + \frac{1}{2}(100)\left(\frac{0{,}2}{3}\right)^2$$

$$\therefore \quad v = 1{,}33 \text{ m/s}$$

Parte (g) $k.\left(\dfrac{A}{3}\right) = m.a \Rightarrow a = \dfrac{100\times(0{,}2)}{3\times(2)} = 3{,}33$ m/s^2

El péndulo:

EL PÉNDULO

25. Un péndulo simple tiene un período de 2,50 s. a) ¿Cuál es su longitud? b) ¿Cuál sería su período en la Luna, donde $g_{Luna} = 1{,}67$ m/s^2?

Resolución:

$T_{péndulo} = 2{,}5$ s

Sabemos que: $T\omega = 2\pi \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{2{,}5} = 0{,}8\,\pi$ rad/s

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \Rightarrow (0{,}8\pi)^2 = \dfrac{g}{L}$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{g}{(0{,}8\pi)^2} = \frac{9{,}81}{(0{,}8\pi)^2} = 1{,}55 \text{ m}$$

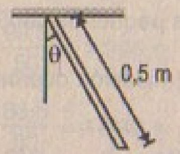
Parte (b) $g_{Luna} = 1{,}67$ m/s^2

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g_L}{L}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g_L}} = \frac{2\,(3{,}1416)\sqrt{1{,}55}}{\sqrt{1{,}67}} \quad \therefore \quad T = 6{,}05 \text{ s}$$

26. Una regla métrica suspendida en un extremo por una cuerda ligera de 0,50 m de largo, se pone a oscilar. a) Determine el período de oscilación. b) ¿En qué porcentaje difiere lo anterior de un péndulo simple de 1,0 de largo?

Resolución:

Considerar: $g = 9{,}81$ m/s^2



Parte (a)

$T.\omega = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} = 2\,(3{,}1416)\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} = 1{,}42 \text{ s}$$

Parte (b) Si: L = 1,0 m

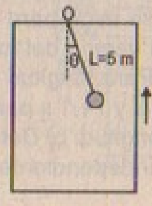
$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2\,(3{,}1416)\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} = 2{,}00 \text{ s}$$

Difiere en: 29%

27. Un péndulo simple mide 5,0 m de largo. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5,0 m/s^2? b) ¿Cuál es la respuesta del inciso a) si el elevador acelera hacia abajo a 5,0 m/s^2? c) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5,0 m/s^2?

27A. Un péndulo simple tiene una longitud L. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se ubica en un elevador que se mueve hacia arriba con una aceleración a? b) ¿Cuál es la respuesta del inciso a) si el elevador se mueve hacia abajo con una aceleración a? c) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se coloca en un camión que se mueve horizontalmente con una aceleración a?

Resolución:



Considerar: g: 9,81 m/s^2

Parte (a)

Inicialmente cuando el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio y acelera hacia arriba y se cumple:

$$T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g + a) = m.g_{ef}$$

Entonces «T» es el peso aparente dentro del ascensor. Luego la componente del peso aparente, es la fuerza restauradora que realiza el M.A.S. entonces:

$$\Sigma \tau_0 = I_0 \, . \, \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -m.g_{ef} \operatorname{sen}\theta \, . \, L = mL^2\ddot{\theta}$$

Para desplazamientos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g_{ef}}{L}\theta = 0 \quad \text{(ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

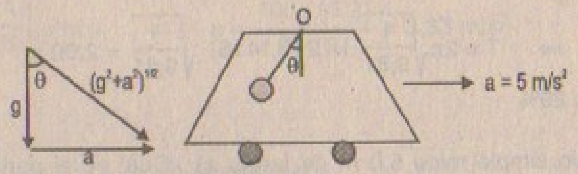
$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}} = 2(3,1416)\sqrt{\frac{5,00}{9,81+5}} = 3,65 \text{ s}$$

Parte (b)

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g-a}} = 2(3,1416)\sqrt{\dfrac{5}{9,81-5}}$

$$\therefore \quad T = 6,41 \text{ s}$$

Parte (c)



Entonces: La F_R para el M.A.S. es: $-m\left(g^2 + a^2\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta$

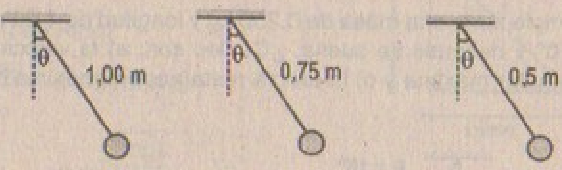
Luego: $\Sigma \tau_0 = mL^2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -m(g^2 + a^2)^{1/2}\theta L = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\left(g^2 + a^2\right)^{1/2}}}\text{; reemplazando: } T = 4,23 \text{ s}$$

28. Una masa se une al extremo de una cuerda para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para desplazamientos angulares pequeños y tres longitudes, midiendo el tiempo del movimiento en cada caso con un cronómetro durante 50 oscilaciones. Para longitud de 1,00 m; 0,75 m y 0,50 m, se miden tiempos totales de 99,8 s; 86,6 s y 71,1 s para 50 oscilaciones. a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelo con el valor aceptado. c) Grafique T_2 contra L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta mejor ajustada. Compare este valor con el obtenido en el inciso b).

Resolución :



Parte (a) $f_1 = \dfrac{50}{99,8} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \dfrac{99,8}{50} = 1,996 \text{ s}$

$$f_2 = \frac{50}{86,6} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{86,6}{50} = 1,732 \text{ s}$$

$$f_3 = \frac{50}{71,1} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{71,1}{50} = 1,422 \text{ s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g_1}} \quad \Rightarrow \quad g_1 = \left(\dfrac{2\pi}{T_1}\right)^2 L_1 \quad \therefore \quad g_1 = 9,90 \text{ m/s}^2$

Sabemos que: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_2}{g_2}} \quad \Rightarrow \quad g_2 = \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 L_2 \quad \therefore \quad g_2 = 9,87 \text{ m/s}^2$

Sabemos que: $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_3}{g_3}} \quad \Rightarrow \quad g_3 = \left(\dfrac{2\pi}{T_3}\right)^2 L_3 \quad \therefore \quad g_3 = 9,76 \text{ m/s}^2$

En consecuencia: $g_{media} = \dfrac{g_1 + g_2 + g_3}{3} = \dfrac{9,90 + 9,87 + 9,76}{3} = 9,84 \text{ m/s}^2$

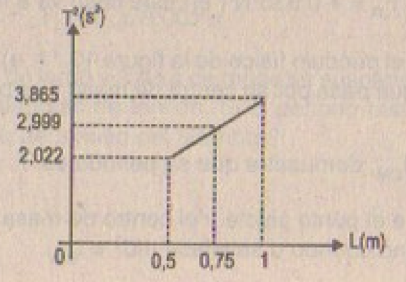
Parte (c) $T_1^2 = 3,865 \text{ s}^2$ para L = 1,00 m

$T_2^2 = 2,999 \text{ s}^2$ para L = 0,75 m

$T_3^2 = 2,002 \text{ s}^2$ para L = 0,50 m

Luego:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L$$

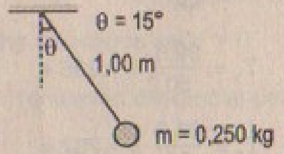


Sabemos que:

$$m = \frac{3,865 - 2,022}{1,00 - 0,50} = \frac{1,843}{0,5} = \frac{4\pi^2}{g} \qquad \therefore \quad g = 10,71 \text{ m/s}^2$$

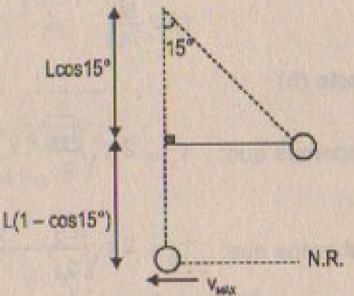
29. Un péndulo simple tiene una masa de 0,250 kg y longitud de 1,00 m. Se desplaza un ángulo de 15,0° y después se suelta. ¿Cuáles son: a) la velocidad máxima, b) la aceleración angular máxima y c) la fuerza restauradora máxima?

Resolución:



sen15° = 0,259
cos15° = 0,966

Parte (a)



Por energía: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow \quad mgL(1 - \cos 15°) = \frac{1}{2}mv^2_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2gL\,(1 - \cos 15°)} = v_{máx}$$

Reemplazando:

$$v_{máx} = \sqrt{2\,(9,81)\,(1 - 0.966)}$$

$$\therefore \quad v_{máx} = 0,817 \text{ m/s}$$

Parte (b)

$$\Sigma\tau_o = I_o \,.\, \alpha$$

$$\Rightarrow \quad mg\,L\text{sen}15° = mL^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g\,\text{sen}15°}{L} = \alpha \qquad \therefore \quad \alpha = 2,54 \text{ rad/s}^2$$

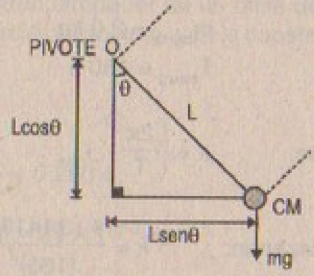
Parte (c) $F_{restauradora} = -mg\text{sen}15° = (0,250)(9,81)(0,259)$

$\therefore$ $F_R = +\,0,635$ N (en este caso va a favor del desplazamiento)

30. Considere el péndulo físico de la figura 13.11. a) Si su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es paralelo al eje que pasa por su punto pivote, es I_{CM}, demuestre que su periodo es $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$ donde d es la distancia entre el punto pivote y el centro de masa. b) Muestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{CM}$.

Resolución:

Sabemos: $\Sigma\tau_o = I_o \,.\, \alpha$



$$\Rightarrow \quad -mgL\text{sen}\theta = I_o . \ddot{\theta}$$

Si sen$\theta \approx \theta$ (pequeño)

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mg\,L}{I_o} . \theta = 0 \text{ (M.A.S.)}$$

Entonces: $\quad \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_o}}$

Luego: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mg\,L}}$

Por ejes paralelos: $I_o = I_{CM} + m.L^2$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m\,.\,L^2}{mgL}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b) Si: $I_{CM} = m.L^2$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2 + mL^2}{mgL}} \qquad \therefore \quad T_{mín} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

31. Un péndulo simple tiene una longitud de 3,00 m. Determine el cambio en su periodo si éste se toma desde un punto donde g = 9,80 m/s² hasta una elevación donde la aceleración en caída libre disminuye a 9,79 m/s².

Resolución:

L = 3,00 m

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2(3,1416)\sqrt{\frac{3,00}{9,80}} = 3,476 \text{ s}$$

si: g = 9,80

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_2}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2(3,1416)\sqrt{\frac{3,00}{9,79}} = 3,478 \text{ s}$$

si: g = 9,79

$$\therefore \quad T_2 - T_1 = 0,002 \text{ s}$$

32. Una barra horizontal de 1,0 m de largo y 2,0 kg de masa se suspende de un alambre en su centro para formar un péndulo de torsión. Si el periodo resultante es de 3,0 minutos, ¿cuál es la constante de torsión del alambre?

Resolución:

Sabemos que: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM}}{k}}$

Por dato: $L_{barra} = 1{,}0$ m

$m_{barra} = 2{,}0$ kg $\qquad I_{barra} = \dfrac{1}{12} ML^2$

$T_{barra} = 180$ s

Entonces: $k = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 I_{CM}$

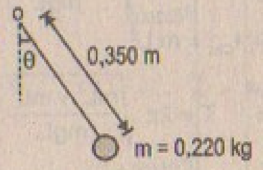
Reemplazando: $k = \dfrac{4\,(3{,}1416)^2}{(180)^2} \cdot \dfrac{1}{12}\,(2)(1)^2$

$\therefore \quad k = 203 \times 10^6$ N.m

33. Un péndulo físico en la forma de un cuerpo plano efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia de 0,450 Hz. Si el péndulo tiene una masa de 2,20 kg y el pivote se localiza a 0,350 m del centro de masa, determine el momento de inercia del péndulo.

Resolución :

f = 0,450 Hz



$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mg\,d}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{0{,}450}\right)^2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \times mg\,.\,d = I_o$$

Entonces: $I_o = \dfrac{1}{(0{,}450)^2} \times \dfrac{1}{(2\pi)^2} \times (2{,}20)(9{,}81)(0{,}350) = 0{,}944$ kg.m²

34. El desplazamiento angular de un péndulo se representa por la ecuación $\theta = 0{,}32 \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4{,}43$ rad/s. Determine el periodo y la longitud del péndulo.

Resolución : 34

$\theta(t) = 0{,}32\cos(\omega t)$

$\omega = 4{,}43$ rad/s

Sabemos que: $\omega . T = 2\pi$

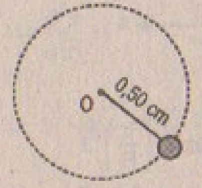
$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{4{,}43} \qquad \therefore \quad T = 1{,}42 \text{ s}$$

Por otro lado: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad L = \dfrac{g}{(4{,}43)^2} = \dfrac{9{,}81}{(4{,}43)^2}$

$\therefore \quad L = 0{,}499$ m

35. Un volante de reloj tiene un periodo de oscilación de 0,250 s. La rueda se construye de modo que 20,0 g de masa se concentren alrededor de un orilla de 0,500 cm de radio. ¿Cuáles son: a) el momento de inercia del volante, y b) la constante de torsión del resorte unido?

Resolución :



$T = 0{,}250$ s

$m = 20 \times 10^{-3}$ kg

Parte (a)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mg\,d}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 .\, mgd = I_o$$

Reemplazando: $I_o = \left[\dfrac{0{,}250}{2\,(3{,}1416)}\right]^2 \times (20 \times 10^{-3})(9{,}81)(0{,}5 \times 10^{-2})$

$\therefore \quad I_o = 15 \times 10^7$ kg.m²

Parte (b)

Por otro lado: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_o}{k}}$

$$\Rightarrow \quad k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_o = \left(\frac{2\pi}{0{,}250}\right)^2 \times 15 \times 10^7$$

$\therefore \quad k = 9{,}47 \times 10^{10}$ N.m

COMPARACIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE CON EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

36. Mientras usted viaja atrás de un carro que se desplaza a 3,0 m/s, observa que una de las llantas del automóvil tiene una pequeña protuberancia hemisférica sobre su borde, como muestra la figura P13.36. a) Explique por qué la protuberancia, desde su punto de visión detrás del auto, ejecuta un movimiento armónico simple. b) Si los radios de las llantas del auto son iguales a 0,30 m, ¿cuál es el periodo de oscilación de la protuberancia?

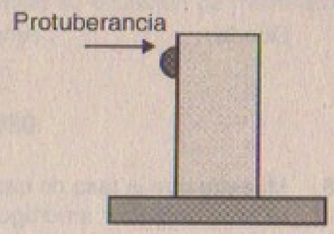


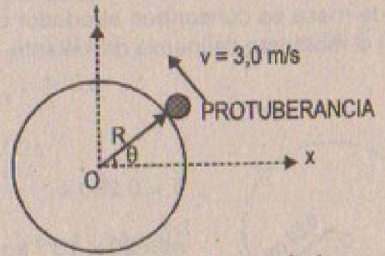
Figura P13.36

Resolución :

$R = 0{,}30$ m

$v = 3{,}0$ m/s

Vista frontal de la llanta



$\Rightarrow$ Por M.C.U. $\quad x(t) = R\cos(\omega t) = R\cos\left(\dfrac{v}{R}\right).t$

En consecuencia: $\quad x(t) = 0{,}3\cos(10t)$ (M.A.S.) Ecuación de movimiento en x

Por consiguiente: $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2(3{,}1416)}{10} = 0{,}63$ s

37. Considere el motor simplificado de un solo émbolo de la figura P13.37. Si la rueda gira a una velocidad angular constante ω, explique por qué la barra del émbolo oscila en un movimiento armónico simple.

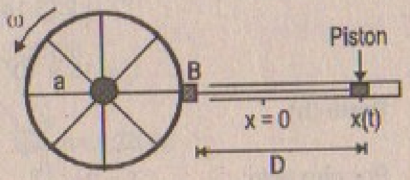


Figura P13,37

Resolución :

$x_B(t) = a\cos(\omega t)$ (Ecuación de un M.A.S.)

$x_B(t = 0) = a\cos(0) = a$

Inicialmente la barra del embolo está en la misma linea de acción de «B» de la rueda, entonces tendrá arcos iguales en tiempos iguales con la misma «ω»

Luego: $\quad x_{embolo}(t) = (a + D)\cos(\omega.t)$

Donde $\quad$ Amplitud = a + D $\quad \therefore$ Realiza un M.A.S.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

38. Muestre que la tasa de cambio en el tiempo de la energía mecánica correspondiente a un oscilador amortiguado sin accionamiento está dada por $dE/dt = -bv^2$ y, en consecuencia, siempre es negativa. (Sugerencia: Diferencie la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ y utilice la ecuación 13.29.)

Resolución :

Por demostrar: $\quad \dfrac{dE}{dt} = -bv^2$

Por la ecuación: 13,29

$$-kx - \frac{b\,dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} \quad \text{(por v)}$$

$$\therefore \quad -kx.v = mv\frac{d^2x}{dt^2} + bv\frac{dx}{dt} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado: $\quad E = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = mv\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} \quad \ldots (2)$$

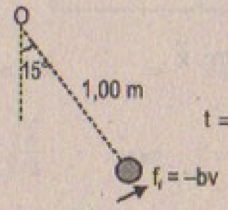
Igualando (1) y (2)

Entonces: $kx = b$

En consecuencia: $\quad \dfrac{dE}{dt} = -bv^2 \quad$ l.q.q.d.

39. Un péndulo 1,00 m de longitud se suelta desde un ángulo inicial de 15,0°. Después de 1 000 s, debido a la fricción su amplitud se ha reducido a 5,5°. ¿Cuál es el valor de b/2 m?

Resolución :



Considerar: $\quad \text{sen}15° = 0{,}259$, $\quad \cos15° = 0{,}966$

$t = 1\,000$ s

La fuerza de fricción es una fuerza amortiguadora, entonces el movimiento es un movimiento oscilatorio amortiguador. En consecuencia su ecuación de movimiento está dada por:

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Luego: $\quad \Sigma\tau_o = I_o.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -mgL\text{sen}\theta - bL^2.\dot{\theta} \doteq mL^2\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{b}{m}\right)\dot{\theta} + \left(\dfrac{g}{L}\right)\theta = 0 \qquad$ (Ecuación diferencial del movimiento)

Donde: $2\beta = \dfrac{b}{m} \Rightarrow \beta = \dfrac{b}{2m}$

Luego: $\theta(t) = \theta_{máx} \cdot e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$

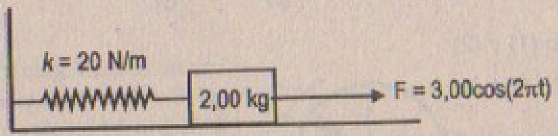
$\Rightarrow \theta(t = 1\,000\text{ s}) = 5{,}5° = 15\, e^{-b(1000)}$

$\Rightarrow \ln(2{,}72) = -\beta\,(1\,000) = 1 \quad \therefore \quad \beta = b/2m = 1 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$

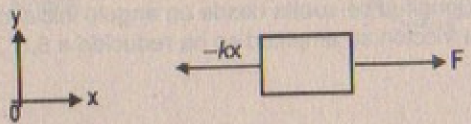
OSCILACIONES FORZADAS

40. Una masa de 2,00 kg unida a un resorte es accionada por una fuerza externa $F = (3{,}00\text{ N})\cos(2\pi t)$. Si la constante de fuerza del resorte es 20,0 N/m determine, a) el periodo, y b) la amplitud del movimiento. (Sugerencia: Suponga que no hay amortiguamiento, es decir, que $b = 0$, y utilice la ecuación 13.34.)

Resolución:



Parte (a)



$$\Sigma F_x = m\,.\,\ddot{x}$$

$\Rightarrow F(t) - kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\dfrac{k}{m}\right)x = \left(\dfrac{3}{m}\right)\cos(2\pi + t) \quad \ldots (1)$

Luego: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \left(\dfrac{3}{m}\right)\cos(2\pi t)$

donde: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

donde: $x(t)$ = solución general = $x_{particular} + x_{homogénea}$

$x_p(t) = D\cos(2\pi t)$

$x_H(t) = A\cos(\omega t + f)$

Luego: $D = \dfrac{\frac{3}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2}$

En consecuencia: $x_{total} = \left[\dfrac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{20}{2}\right) - (2\pi)^2}\right]\cos(2\pi t) + A\cos(\omega_o t + \phi)$

Donde: frecuencia angular: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

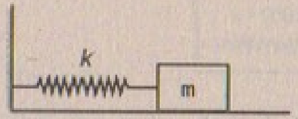
$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{20}} \quad \therefore \quad T = 1{,}98\text{ s}$

Parte (b) $A = \dfrac{1{,}5}{\left|10 - (2\pi)^2\right|} = \dfrac{1{,}5}{|-29{,}5|} = +\,0{,}05\text{ m}$

41. Calcule las frecuencias resonantes de: a) una masa de 3,00 kg unida a un resorte de 240 N/m de constante de fuerza, y b) un péndulo simple de 1,50 m de longitud.

Resolución:

Parte (a)



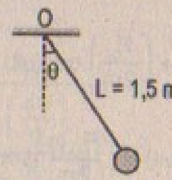
$k = 240$ N/m
$m = 3{,}00$ kg

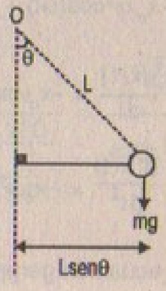
$-kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ (Ecuación diferencial del M.A.S.)

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Reemplazando: $f = \dfrac{1}{2\,(3{,}1416)}\sqrt{80} \approx 1{,}42\text{ Hz}$

Parte (b)





Para desplazamientos pequeños: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

Entonces: $\Sigma\tau_o = I_o \cdot \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -mgL\operatorname{sen}\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \text{(Ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

En consecuencia: $f = \dfrac{1}{2\pi} \times \omega = \dfrac{1}{2\,(3{,}1416)}\sqrt{\dfrac{9{,}81}{1{,}5}}$

$\therefore \quad f = 0{,}41\ \text{Hz}$

42. Considere un oscilador forzado subamortiguado en resonancia de modo que $\omega = \omega_0 = \sqrt{h/m}$. La ecuación de movimiento es $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \left(\dfrac{F_0}{m}\right)\cos\omega t$.

Demuestre, por sustitución directa, que la solución de esta ecuación es

$$x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t) + \left(\frac{F_o}{2m\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t)$$

donde x_0 y v_0 son su posición y velocidad iniciales.

Resolución:

Por dato: $\omega = \omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

La ecuación del mov. oscilatorio forzado subamortiguado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos\omega t$$

Por demostrar: $x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\dfrac{v_o}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t) + \left(\dfrac{F_o}{2m\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t)$ ... (α)

Por sustitución directa: de la ecuación (α)

$$\omega^2 x = x_o.\omega^2\cos(\omega t) + \omega v_o\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\omega F_o}{2m}\operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{... (1)}$$

Por otro lado: $\dfrac{dx(t)}{dt} = -x_o\omega\operatorname{sen}(\omega t) + v_o\cos(\omega t) + \left(\dfrac{F_o}{2m}\right)\cos(\omega t)$

Entonces: $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -x_o\omega^2\cos(\omega t) - v_o\omega\operatorname{sen}(\omega t) - \left(\dfrac{F_o.\omega}{2m}\right)\operatorname{sen}(\omega t)$ ... (2)

Sabemos que la ecuación general para un mov. oscilatorio forzado es:

$$x(t) = \frac{\dfrac{F_o}{m}}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\,.\cos(\omega t) + A\cos(\omega_o t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \text{Como } \omega = \omega_o$$

Luego: $x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$ (M.A.S.)

Donde: $\ddot{x} + \omega^2.x = 0$ (ecuación diferencial)

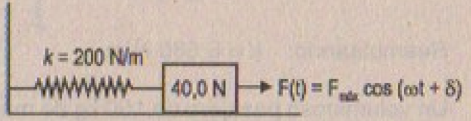
Sumando (1) + (2): $0 = \dfrac{F_o}{m}\cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_o}{m}\cos(\omega t) \quad \text{cumple}$$

$$\therefore \quad x(t) = x_o\cos(\omega t) + \left(\frac{V_o}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t) + \left(\frac{F_o}{2m\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{l.q.q.d.}$$

43. Un peso de 40,0 N se suspende de un resorte cuya constante de fuerza es de 200 N/m. El sistema es subamortiguado y se somete a una fuerza armónica de 10,0 Hz de frecuencia, lo que origina una amplitud de movimiento forzado de 2,00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza.

Resolución:



Amplitud = 2,00 cm

$\omega = 2\pi f = 2\pi\,(10) = 20\pi$ rad/s

Por mov. forzado: $F(t) - kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} = \left(\frac{F_{máx}}{m}\right)\cos(\omega t + \delta) \qquad \text{(ecuación diferencial)}$$

Sabemos que: $x(t)_{total} = \left[\dfrac{\dfrac{F_{máx}}{m}}{\omega^2 - \omega_0^2}\right]\cos(\omega t + \delta) + A\cos(\omega_o t + \phi)$

Por dato:

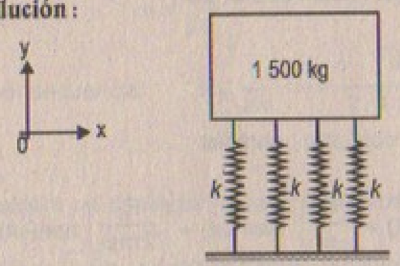
$$0{,}02 = \frac{\dfrac{F_{máx}}{\left(\dfrac{40}{g}\right)}}{(20\pi)^2 - \left(\dfrac{k}{m}\right)} \Rightarrow 0{,}02 = \frac{\dfrac{F_{máx}}{\left(\dfrac{40}{9{,}81}\right)}}{400\pi^2 - \dfrac{200}{\left(\dfrac{40}{9{,}81}\right)}} = \frac{\dfrac{(F_{máx})\,.\,(9{,}81)}{40}}{400\pi^2 - \dfrac{(200)\,(9{,}81)}{40}}$$

Despejando resulta que: $F_{máx} = 318$ N

PROBLEMAS ADICIONALES

44. Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un periodo de 1,5 s después de golpear un tope. El carro tiene una masa de 1 500 kg y es soportado por cuatro resortes cuyas constantes de fuerza *k* son iguales. Determine un valor para *k*.

Resolución :



$T = 1{,}5\ \text{s}$

$\Sigma F_y = m\ddot{y} \;\Rightarrow\; -4ky = m\ddot{y}$

$\Rightarrow\; \ddot{y} + \dfrac{4k}{m}\,y = 0$

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{4k}{m}} = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\Rightarrow\; T = \dfrac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \;\Rightarrow\; k = 1\,500 \times \left(\dfrac{\pi}{1{,}5}\right)^2$

Reemplaando: $k = 6\,580\ \text{N/m}$

45. Un voluminoso pasajero de 150 kg de masa viaja en el carro del problema 44. ¿Cuál es el nuevo periodo de oscilación?

Resolución :

Sabemos que: $T = \dfrac{2\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_{total}}{k}}$

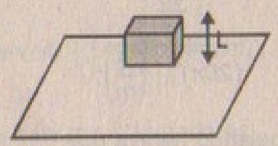
$\Rightarrow\; T = (3{,}1416)\cdot\sqrt{\dfrac{1\,500 + 150}{6\,580}} \;\Rightarrow\; T = (3{,}1416)(0{,}5)$

$\therefore\; T = 1{,}57\ \text{s}$

46. Un bloque descansa sobre una placa plana que ejecuta un movimiento armónico simple vertical con un periodo de 1,2 s. ¿Cuál es la amplitud máxima del movimiento en el cual el bloque no se separa de la placa?

Resolución :

El bloque ejecuta un M.A.S. como si fuera un péndulo.



Entonces:

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \;\Rightarrow\; g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = L = \text{amplitud}$

Luego: Amplitud $= (9{,}81)\left(\dfrac{1{,}2}{2\pi}\right)^2 = 0{,}36\ \text{m}$

47. Cuando el péndulo simple mostrado en la figura P13.47 forma un ángulo con la vertical su velocidad es v. a) Calcule la energía mecánica total del péndulo como una función de v y θ. b) Pruebe que cuando θ es pequeña, la energía potencial puede expresarse como $1/2\ mg\ L\theta^2 = 1/2\ m\omega^2 s^2$. (Sugerencia: En el inciso b) aproxime cosθ por $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$.)

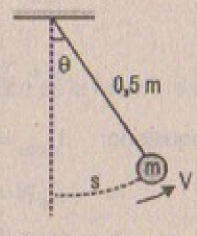
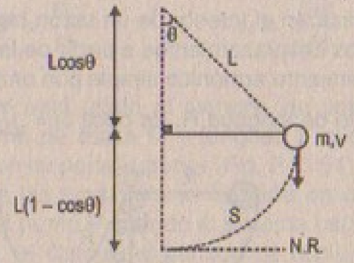


Figura P13.47

Resolución :

Parte (a)



$S = \theta.L$

$\omega = \sqrt{g/L}$

$E_{\text{mecánica total}} = E_K + E_p \;\Rightarrow\; E_{total} = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgL\,(1 - \cos\theta)$

Parte (b)

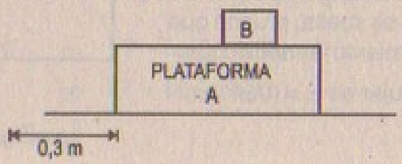
Como: $E_{potencial} = mgL\,(1 - \cos\theta)$ si $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

$\Rightarrow\; E_{potencial} = mgL\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}m\,(\theta L)^2\left(\dfrac{g}{L}\right)$

$\therefore\; E_{potencial} = \dfrac{1}{2}\,mgL\,(\theta)^2 = \dfrac{1}{2}\,ms^2\omega^2$ l.q.q.d.

48. Una plataforma horizontal vibra con movimiento armónico simple en la dirección horizontal con un periodo de 2,0 s. Un cuerpo sobre la plataforma empieza a deslizarse cuando la amplitud de la vibración alcanza 0,30 m. Encuentre el coeficiente de fricción estática entre el cuerpo y la plataforma.

Resolución :



D.C.L.

Sabemos:

$T = 2{,}0\ s \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2{,}0} = f \;\Rightarrow\; f = 0{,}5\ Hz \quad \therefore \quad \omega = 2\pi f = 3{,}1416\ rad/s$

Pero: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_A}} \;\Rightarrow\; k = (3{,}1416)^2\,(m_A) \quad \dots (1)$

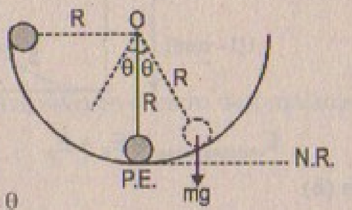
Por equilibrio: $f_{emáx} = F_R$

$\Rightarrow \quad \mu_e.N = \mu_e.m_A.g = (0{,}3)(3{,}1416)^2 \times m_A$

$\therefore \quad \mu_e = (0{,}3)(3{,}1416)^2/(9{,}81) = 0{,}302$

49. Una partícula de masa m se desliza en el interior de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que, para pequeños desplazamientos a partir de la posición de equilibrio, la partícula efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual a la de un péndulo simple de longitud R. Es decir $\omega = \sqrt{g/R}$.

Resolución:



$\Sigma \tau_o = I_o . \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -mg\ L\operatorname{sen}\theta = mL^2.\ddot{\theta}$

Para desplazamientos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$

$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0 \qquad$ (M.A.S.)

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{g}{R} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}} \qquad$ l.q.q.d.

50. Un tablón horizontal de masa m y longitud L está articulado en un extremo, y en el otro está unido a un resorte de constante de fuerza k (Fig. P13.50). El momento de inercia del tablón alrededor del pivote es 1/3 mL². Cuando el tablón se desplaza un ángulo pequeño θ a partir de la horizontal y se suelta, pruebe que se mueve con un movimiento armónico simple cuya frecuencia angular es $\omega = \sqrt{3k/m}$.

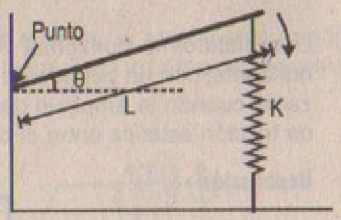


Figura P13.50

Resolución:

Por demostrar: $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$I_{barra/o} = \dfrac{1}{3}\,m.L^2$

Por hipótesis:

Realiza un M.A.S. entonces el que realiza el mov. armónico es la fuerza restauradora, por lo tanto el peso de la barra no se considera, luego:

$$\Sigma \tau_o = I_o . \ddot{\theta}$$

$\Rightarrow \quad -(kL\theta)L = \dfrac{1}{3}\,ML^2.\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{3k}{M}\right)\theta = 0$

Luego: $\omega^2 = \dfrac{3k}{m} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \qquad$ l.q.q.d.

51. Una masa M está unida al extremo de una barra uniforme de masa M y longitud L que puede girar en su parte superior (Fig. P13.51). a) Determine las tensiones en la barra en el pivote y en el punto P cuando el sistema está estacionario. b) Calcule el periodo de oscilación para desplazamientos pequeños desde la posición de equilibrio, y determine este periodo para L = 2,00 m. (Sugerencia: Suponga que la masa en el extremo de la barra es una masa puntual y utilice la ecuación 13.25.)

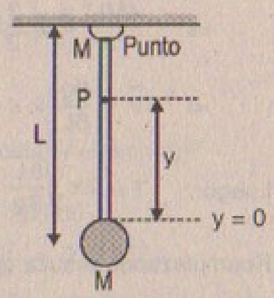
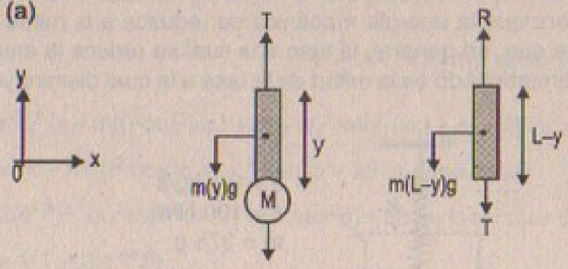


Figura P13.51

Resolución:

Parte (a)



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T - my(g) - Mg = 0$

$\Rightarrow \quad T = Mg + my(g) \qquad \dots (1)$

Sea λ = densidad lineal

$\Rightarrow \quad Mg + \lambda y.g = T$

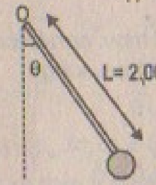
$\Rightarrow \quad Mg + \frac{M}{L}yg = T \qquad \therefore \qquad T = Mg\left(1+\frac{y}{L}\right)$

Por otro lado: $\quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R = T + m(L-y).g$

$\Rightarrow \quad R = Mg + \frac{Mg\,y}{L} + \frac{M}{L}(L-y)g$

$\therefore \quad R = 2Mg$

Parte (b)



Nota: Para desplazamientos pequeños. $\text{sen}\theta = \theta$

Entonces: $\Sigma \tau_o = I_o . \ddot{\theta}$ (sistema)

$\Rightarrow \quad -Mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta - Mg\,L\text{sen}\theta = \left(\frac{1}{3}ML^2 + ML^2\right)\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad \frac{4ML^2}{3}\ddot{\theta} + \left(\frac{3}{2}MgL\right)\theta = 0$

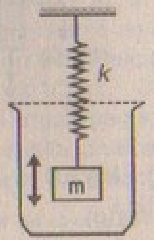
$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{9g}{8L}\right)\theta = 0$ (Ley del movimiento)

Luego: $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{8L}{9g}} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2L}{g}}$

Reemplazando resulta que: T = 2,68 s

52. Considere un oscilador amortiguado, como el de la figura 13.16. Suponga que la masa es de 375 g, la constante de resorte igual a 100 N/m y b = 0,100 kg/s. a) ¿Cuánto tarda la amplitud en reducirse a la mitad de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo transcurre para que la energía mecánica se reduzca a la mitad de su valor inicial? c) Demuestre que, en general, la tasa a la cual se reduce la amplitud en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la tasa a la cual disminuye la energía mecánica.

Resolución :



b = 0,1 kg/s
k = 100 N/m
m = 375 g

Parte (a)

Ecuación diferencial para un mov. oscilatorio amortiguador: $-kx - b\dot{x} = m.\ddot{x}$

$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Donde: $\quad \beta = \frac{b}{2m} \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Luego: $\quad x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}(\cos\omega_1 t + \phi)$

Por dato:
Inicialmente: la amplitud es A

$\Rightarrow \quad A.e^{-b/2m.t} = A/2 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2m}{b}.\ln(0,5)$

Reemplazando: $\quad t = \frac{-2(0,375)}{0,1}(-0,75) = 5,625$ s

Parte (b)

Sabemos que: $\quad E_p(t) = \frac{1}{2}k(A.e^{-\beta t})^2 \quad \Rightarrow \quad E_K(t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$

$\Rightarrow \quad E_K(t) = \frac{1}{2}m(A.e^{-\beta t})^2.[\beta\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\text{sen}(\omega_1 t+\phi)]^2$

$\Rightarrow \quad E_{M\,inicial} = E_p(t=0) + E_K(t=0)$

$\therefore \quad E_{Mecánica\ inicial} = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mA^2.(\beta\cos(\phi) + \omega_1\,\text{sen}(\phi))^2$

Sabemos primeramente que: $\quad \omega_0^2 = 100/0,375 = 266,66$

$\beta^2 = (0,1)^2/4(0,375)^2 = 0,01777$

$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \approx \omega_0^2 \approx 266,6 \qquad \therefore \qquad \beta^2 \approx 0$

Por condición y dato: $\frac{1}{2}k(A.e^{-\beta t})^2 + \frac{1}{2}m(A.e^{-\beta t})^2\,[b\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\,\text{sen}(\omega_1 t+\phi)]^2$

$= \frac{1}{4}A^2\left[k + m(\beta\cos\phi + \omega_1\,\text{sen}\phi)^2\right]$

$\Rightarrow 2(e^{-\beta t})^2\,[k + m(\beta^2\cos^2(\omega_1 t+\phi) + \omega_1^2\,\text{sen}^2(\omega_1 t+\phi) + 2\beta.\omega_1\,\text{sen}(\omega_1 t+\phi).\cos(\omega_1 t+\phi))]$

$= k + m(\beta^2.\cos^2\phi + \omega_1^2\,\text{sen}^2\phi + 2\beta.\omega_1\text{sen}\phi.\cos\phi)$

$\Rightarrow m(2(e^{-\beta t})^2.\omega_1^2\,[\text{sen}^2(\omega_1 t+\phi) - \text{sen}^2\phi] + 2\beta.\omega_1\,[\text{sen}(\omega_1 t+\phi).\cos(\omega_1 + \phi) - \text{sen}\phi.\cos\phi]$

$= k(1 - 2(e^{-\beta t})^2)$

Entonces como $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y aproximando $\frac{\beta}{\omega_1} \approx 0$

$\Rightarrow \quad 1 = 2.(e^{-\beta t})^2\,[1 + \omega_1(\text{sen}^2(\omega_1 t+\phi) - \text{sen}^2\phi)]$

$$\therefore \quad (0,5)^{1/2} = e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \ln(0,707) = -\frac{b}{2m}\cdot t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2\,(0,375)}{0,1}\ln(0,707) = t \qquad \therefore \quad t \approx 2,60$$

Parte (c)

Sabemos que: $A(t) = A.e^{-b/2m.t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = -\frac{b}{2m}A\,e^{-\frac{b}{2m}t}$

Así también: $E_M(t) = \frac{1}{2}k\,(A.e^{-\beta t})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,E_M}{dt} = -b.\dot{x}(t)^2 = -b[A^2(e^{-\beta t})^2\,(\beta\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi))^2]$$

Entonces: $-\beta.A.e^{-\beta t} = -\frac{1}{2}\,b\,[A^2.(e^{-\beta t})^2\,(\beta\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi))^2$

$$\Rightarrow \quad 2\beta = b.A(e^{-\beta t})\,(\beta\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\,\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi))^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} = A.e^{-\beta t}\,(\beta\cos(\omega_1 t+\phi) + \omega_1\,\operatorname{sen}(\omega_1 t+\phi))^2$$

Para que esto se cumpla $\quad \beta = \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 0 \quad \therefore \quad k = 0$

53. La figura P13.53 muestra un pequeño disco delgado de radio r y masa m que está rígidamente unido a la cara de un segundo disco delgado de radio R y masa M. El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco grande, el cual está montado en su centro sobre un eje sin fricción. El arreglo se hace girar un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio y se suelta. a) Demuestre que la velocidad del centro del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es

$$v = 2\left[\frac{Rg\,(1-\cos\theta)}{(M/m)+(r/R)^2+2}\right]^{1/2}$$

b) Muestre que el periodo de movimiento es

$$T = 2\pi\left[\frac{(M+2m)R^2+mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$$

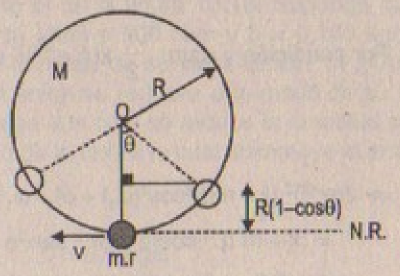


Figura P13.53

Resolución :

$$I_{CM\ disco} = \frac{1}{2}MR^2$$

Parte (a)

Por conservación de energía: $\qquad E_{M\ inicial\ del\ sistema} = E_{M\ final\ del\ sistema}$

$$\Rightarrow \quad mgR\,(1-\cos\theta) = E_{rot\,(disco\ grande)} + E_{rot(disco\ peq.)} + E_{Trasl.\,(disco\ peq.)}$$

$$\Rightarrow \quad mgR\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right).\,\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right).\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,mv^2$$

$$\Rightarrow \quad 4mg\,R(1-\cos\theta) = M.v^2 + mr^2.\,\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}\,m.v^2$$

Luego: $\quad v^2 = \dfrac{4\,gRm\,(1-\cos\theta)}{M+m\left(\frac{r}{R}\right)^2+2m} \qquad \therefore \quad v = 2\left[\dfrac{gR\,(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m}\right)+\left(\frac{r}{R}\right)^2+2}\right]^{1/2}$ $\qquad$ l.q.q.d.

Parte (b) $\quad \Sigma\,\tau_o = I_o\,.\,\ddot{\theta} \quad$ (sistema)

$$\Rightarrow \quad -mg\,R\operatorname{sen}\theta = (\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}\,MR^2)\,\ddot{\theta}$$

Para desplazamientos angulares pequeños $\quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad -2mg\,R\theta = (mr^2 + mR^2 + MR^2)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{2mgR}{mr^2+MR^2+2mR^2}\,.\,\theta = 0\ \text{(M.A.S.)} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgR}{mr^2+2mR^2+MR^2}}$$

Por lo tanto: $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2\,(M+2m)+mr^2}{2mgR}}$ $\qquad$ l.q.q.d.

54. Una masa m se conecta a dos resortes de constantes de fuerza k_1 y k_2, como muestran las figuras P13.54a y P13.54b. En cada caso la masa se mueve sobre una mesa sin fricción y se desplaza de la posición de equilibrio y se suelta. Demuestre que en cada caso la masa tiene movimiento armónico simple con periodos.

a) $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,(k_1+k_2)}{k_1\,.\,k_2}}$

b) $\quad T = 2\pi\,.\,\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

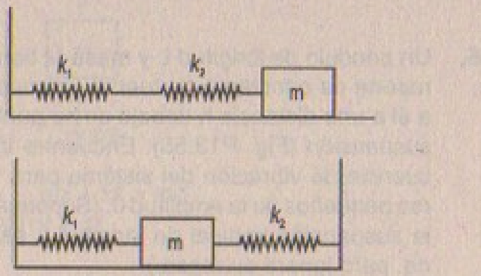


Figura P13.54

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\,(k_1+k_2)}{k_1\,.\,k_2}}$

$x_{total} = x_1 + x_2$

$$-\frac{F}{k_1}-\frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_{equiv.}} \Rightarrow k_{equiv.} = \frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2}$$

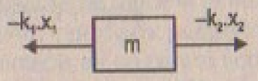
Luego: $-x_{total}\cdot\dfrac{(k_1\,k_2)}{k_1+k_2} = m\,.\,\ddot{x}_{total}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1\,k_2}{m\,(k_1+k_2)}\,.\,x = 0 \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1\,k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,(k_1+k_2)}{k_1\,k_2}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar: $T = 2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$



Nota: Si se elonga a la izquierda una cantidad «x» entonces se comprime a la derecha una cantidad «x»

Luego: $-k_1\,x - k_2\,x = m.\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x \qquad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

Por consiguiente: $T = 2\pi\,.\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$ l.q.q.d.

55. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte de constante de fuerza k conectado a él a una distancia h debajo de su punto de suspensión (Fig. P13.55). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud θ. (Suponga que la suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.)

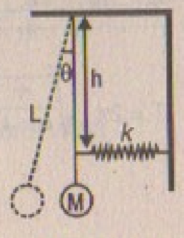
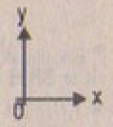
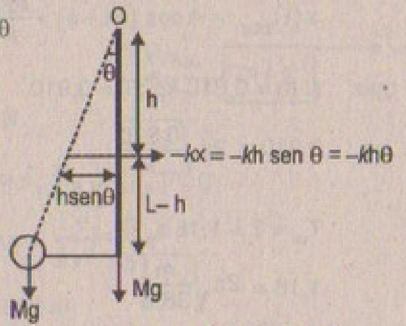


Figura P13.55

Resolución :

θ = pequeño $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\theta = \theta$





$\Sigma\,\tau_0 = I_0\,.\,\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -Mg\,L\text{sen}\theta - kh\theta\,(h) = ML^2\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{MgL + kh^2}{ML^2}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}}$$

Luego: $f = 1/2\pi.\omega \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi}\times\sqrt{\dfrac{MgL + kh^2}{ML^2}}$

56. Una masa m oscila libremente en un resorte vertical (Fig. P13.56). Cuando m = 0,810 kg, el periodo es 0,910 s. Una masa desconocida en el mismo resorte tiene un periodo de 1,16 s. Determine a) la constante de resorte k, y b) la masa desconocida.

56.A Una masa m oscila libremente en un resorte vertical con un periodo T. (Fig. P13.56). Una masa desconocida m' en el mismo resorte tiene un periodo de T'. Determine a) la constante de resorte k, y b) la masa desconocida m'.

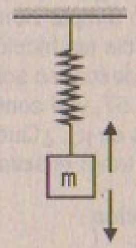
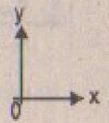


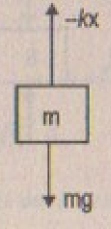
Figura P13.56

Resolución :

Datos: m = 0,810 kg ; T = 0,910 s
m = ? ; T(m) = 1,16 s

Parte (a)





$$mg - kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = mg$$

Luego: $x(t)_{total} = x_p(t) + A\cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{mg}{k} \qquad \text{ya que } -kx + mg = 0$$

Luego: $x(t)_{total} = A\cos(\omega t + \phi) + \dfrac{mg}{k}$ (Ecuación del movimiento)

Sabemos que: si m = 0,810 kg ; T = 0,910

$\Rightarrow \quad 0{,}910 = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}810}{k}} \qquad \therefore \quad k = 38{,}6 \text{ N/m}$

Parte (b)

Por dato $T_m = ? = 1{,}16$ s

Entonces: $1{,}16 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{38{,}6}}$

$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{1{,}16}{2\pi}\right)^2 38{,}6 = m \qquad \therefore \quad m = 1{,}32 \text{ kg}$

57. Un gran bloque P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal deslizándose sobre una superficie sin fricción con una frecuencia f = 1,5 Hz. Un bloque B descansa sobre él, como se ilustra en la figura P13.57, y el coeficiente de fricción estático entre los dos es $\mu_e = 0{,}60$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque no se desliza?

57A. Un gran bloque P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal deslizándose sobre una superficie sin fricción con una frecuencia f. Un bloque B descansa sobre él, como se ilustra en la figura P13.57, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_e. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque no se desliza?

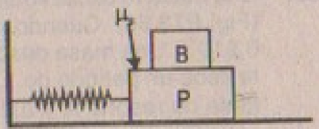


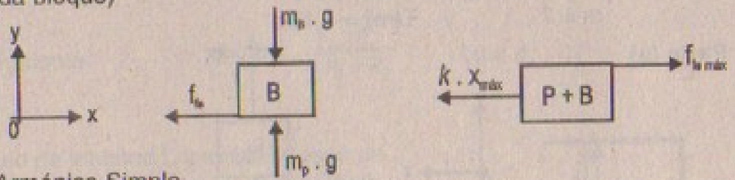
Figura P13.57

Resolución :

Considerar: $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

Datos: $f = 1{,}5$ Hz ; $\mu_e = 0{,}6$

D.C.L. (cada bloque)



Por Mov. Armónico Simple

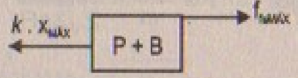
$-kx = m_p\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k}{m_p}x = 0$

Luego: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_p}}$

Por otro lado: $f = 1{,}5 = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_p}}$

$\Rightarrow \quad k = 4.\pi^2 \times (1{,}5)^2\, m_p \quad \ldots (1)$

Luego:



$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow \quad k.x_{máx} = f_{fe\ máxima} = \mu_e.N$

$\Rightarrow \quad x_{máx}\, 4\pi^2 \times (1{,}5)^2 \times m_p = \mu_e.m_B\, g = \mu_e.m_p\, g$

$\Rightarrow \quad x_{máx} = \text{Amplitud máxima} = \dfrac{\mu_e \cdot g}{4\pi^2 (1{,}5)^2}$

$\therefore \quad x_{máx} = 0{,}0662$ m

58. Una barra larga y delgada de masa M y longitud L oscila alrededor de su centro sobre un cilindro de radio R (Fig. P13.58). Demuestre que desplazamientos pequeños originan movimiento armónico simple con un periodo $\pi L/\sqrt{3gR}$.

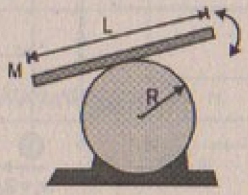
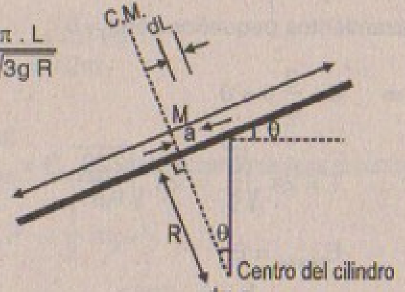


Figura P13.58

Resolución :

Por demostrar: $T = \dfrac{\pi \cdot L}{\sqrt{3g\,R}}$

Sea la figura:



Tenemos que:

La fuerza que produce el movimiento armónico es el peso de la mitad de la barra con respecto del CM de la barra total; luego:

$\Sigma\tau_{CM} = I_{CM} \cdot \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -dm \cdot g\cos\theta \cdot a = \dfrac{1}{3}dm\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 \cdot \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -dm \cdot g \cdot \cos\theta \cdot (R\tan\theta) = \dfrac{1}{12} \cdot dm \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -g \cdot \cos\theta \cdot R \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{12} \cdot L^2.\ddot{\theta}$; para desplazamientos pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx 0$

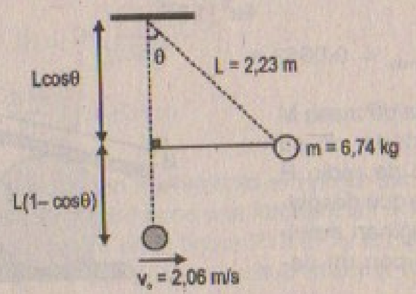
$\Rightarrow \quad \dfrac{L^2}{12} \cdot \ddot{\theta} + R \cdot g\,\theta = 0$

$\therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\dfrac{12Rg}{L^2}\right)\theta = 0$ M.A.S. $\quad \therefore \quad \omega = \dfrac{2\sqrt{3gR}}{L}$

Luego: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi . L}{2\sqrt{3gR}}$ $\therefore$ $T = \dfrac{\pi . L}{\sqrt{3gR}}$ l.q.q.d.

59. A un péndulo simple que tiene una longitud de 2,23 m y una masa de 6,74 kg se le imprime una velocidad inicial de 2,06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple y determine, a) su periodo, b) su energía total, y c) su máximo desplazamiento angular.

Resolución :



Considerar: g: 9,81 m/s²

Parte (a) $-mg\, L\text{sen}\theta = mL^2\ddot{\theta}$

Para desplazamientos pequeños $\text{sen}\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \therefore \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Luego: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2{,}23}{9{,}81}}$ $\therefore$ $T = 2{,}995$ s

Parte (b) $E_{M\,total} = E_K$

$$\Rightarrow \quad E_{total} = \frac{1}{2}(6{,}74)(2{,}06)^2 = 14{,}3 \text{ joules}$$

Parte (c)

Por energía: $14{,}3 = mgL(1-\cos\theta)$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 1 - \dfrac{14{,}3}{mg\,L}$

$$\therefore \quad \cos\theta = 0{,}9 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0{,}9)$$

Como: $1\text{rad} = \dfrac{360°}{2\pi}$

$$\Rightarrow \quad \theta = [\cos^{-1}(0{,}9)]\,\frac{1 \text{ rad}}{\frac{360°}{2\pi}} \text{ (calculadora)}$$

$$\therefore \quad \theta = 0{,}441 \text{ rad}$$

60. La figura P13.60a muestra una masa, m_1 = 9,0 kg, que está en equilibrio mientras se encuentra conectada a un resorte ligero de constante k = 100 N/m y, que a su vez está unido a una pared. Una segunda masa, m_2 = 7,0 kg, se empuja lentamente contra la masa m_1, comprimiendo el resorte en la cantidad A = 0,2 m, como muestra la figura P13.60b. El sistema se suelta después, lo que ocasiona que las dos masas se muevan hacia la derecha sobre la superficie sin fricción. a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (Fig. P13.60c) y se mueve hacia la derecha con velocidad v. Determine el valor de v. b) ¿Cuánto se separan las masas cuando el resorte está completamente estirado por primera ocasión (D en la figura P13.60d)? (Sugerencia: Determine primero el periodo de oscilación y la amplitud del sistema m_1-resorte después de que m_2 pierde el contacto con m_1.)

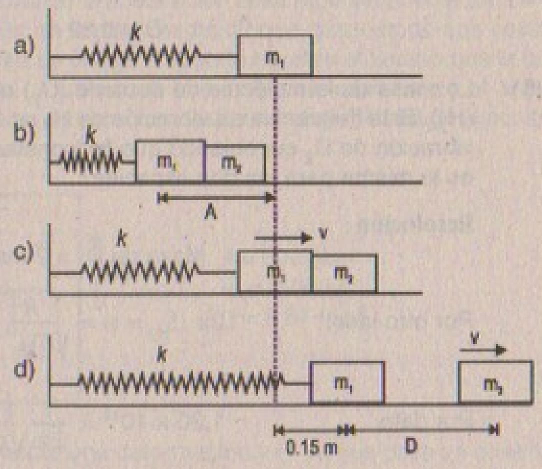


Figura P13.60

Resolución :

Datos: m_1 = 9,0 kg ; m_2 = 7,0 kg
k = 100 N/m ; A = 0,2m

Parte (a)

Por conservación de energía:

$$E_{M\,inicial} = E_{M\,final} \quad \text{(Justo cuando se llega al punto de equilibrio)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(A)^2 = \frac{1}{2}m_1.v^2 + \frac{1}{2}m_2.v^2$$

$$\Rightarrow \quad v = A\,.\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = (0{,}2)\,.\sqrt{\frac{100}{16}}$$

$$\therefore \quad v = 0{,}5 \text{ m/s} = v_{(m_1)} = v_{(m_2)}$$

Parte (b)

Cuando «m_2» se separa en el P.E. de «m_1», «m_1» recorrerá un determinado desplazamiento hasta alcanzar la amplitud máxima, luego:

$$E_{M(m_1)} \text{ en el P.E.} = \frac{1}{2}k.x^2_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}k.x^2_{máx} \qquad \therefore \qquad x_{máx} = 0{,}15 \text{ m}$$

El tiempo que emplea «m_1» en alcanzar su amplitud máxima desde el punto de equilibrio, va a ser igual al tiempo en que «m_2» recorrerá (0,15 + D),entonces:

$$t_{(m_1)} = \frac{T_{(m_1)}}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \pi\sqrt{\frac{9}{100}} = 0{,}94 \text{ s}$$

En consecuencia: $v_{(m2)} \times (0,94) = 0,15 + D$

$\Rightarrow \quad (0,5)\,(0,94) = 0,15 + D$

$\therefore \quad D = 0,32\ m$

61. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula del hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración de H_2 es $1,30 \times 10^{14}$ Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración de D_2 suponiendo que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos especies?

Resolución:

Masa de D_2 = 2 masa del H_2

Por otro lado: $2\pi \cdot f_{H_2} = \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}} \Rightarrow f_{H_2} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}}$

Por dato: $1,30 \times 10^{14} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_{H_2}}}$

$\Rightarrow \quad k = 4\pi^2\,(1,3 \times 10^{14})^2\, m_{H_2}$ ... (1)

Luego: $f_{D_2} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4\pi^2 \times (1,3\times 10^{14})^2 \cdot m_{H_2}}{2\, m_{H_2}}}$

$\therefore \quad f_{D_2} = 9,19 \times 10^{13}$ Hz

62. Demuestre que si un péndulo de torsión se tuerce un ángulo y después se mantiene en esa condición la energía potencial es $U = 1/2k\theta^2$.

Resolución:

Sabemos que: $-k.\theta = I_o . \ddot{\theta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{I}}$

Por otro lado: $\omega.T = 2\pi.\theta \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{4\pi^2.\theta^2}{T^2}$

Como: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \times \dfrac{I}{k}$

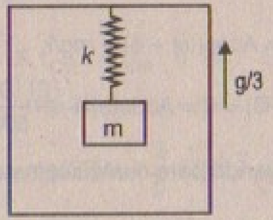
Luego: $\tau = k\theta \Rightarrow k\theta d\theta = \dfrac{1}{2}\, I \,.\, \omega^2$ (por trabajo)

$\Rightarrow \quad E_{K\,rot} = E_p = \dfrac{1}{2} I . \left(\dfrac{4\pi^2 \times \theta^2}{4\pi^2 \times \dfrac{I}{k}}\right)$

$\therefore \quad E_p = \dfrac{1}{2}\, k\theta^2$ l.q.q.d.

63. Un bloque de 2,00 kg cuelga sin vibrar en el extremo de un resorte (k = 500 N/m) que está unido al techo de la caja de un elevador. La caja está ascendiendo con una aceleración hacia arriba de g/3 cuando la aceleración cesa repentinamente (en t = 0). a) ¿Cuál es la frecuencia angular de oscilación del bloque después de que cesa la aceleración? b) ¿En qué cantidad se alarga el resorte durante el tiempo que la caja del elevador está acelerando? c) ¿Cuáles son la amplitud de oscilación y el ángulo de fase inicial observados por una persona que viaja en la caja? Considere positiva la dirección hacia arriba.

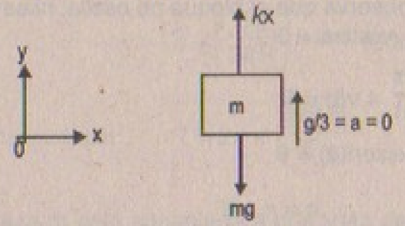
Resolución:



k = 500 N/m
m = 2,00 kg
g = 9,81 m/s²

Parte (a)

Cuando cesa: el bloque experimenta una deformación «x» ya que para un observador fuera del elevador se cumple que:



$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = m.a$

$\Rightarrow \quad kx - mg = m\left(\dfrac{g}{3}\right) = m(0)$ cesa

$\therefore \quad x = \dfrac{mg}{k}$

Donde x = la máxima amplitud del resorte cuando cesa el elevador.

Luego: $x = \dfrac{(2)\,(9,81)}{500} = 0,03924\ m$

Por otro lado:

El bloque realiza un mov. armónico simple puesto que:

$-kx + mg = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = mg$

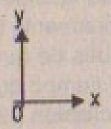
Donde: $x(t) = x_{particular}(t) + x_{homog}(t)$

Pero: $x_p(t) = mg/k \qquad \therefore \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + mg/k$

Luego: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

En consecuencia: $\omega = \sqrt{\dfrac{500}{2}} \approx 15,8$ rad/s

Parte (b)



Sabemos que: $\Sigma F_y = m.a$

$\Rightarrow \quad kx - mg = m(g/3)$

$\Rightarrow \quad kx = \frac{4}{3}\, m.g$

Obs. fuera

$\therefore \quad x = \frac{4mg}{3k} = \frac{4(2)\,(9{,}81)}{3\,(500)} = 0{,}0523$ m

Parte (c)

Para una persona dentro: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + mg/k$

$$x(t=0) = 0 = A\cos(\phi) + \frac{(2)\,(9{,}81)}{500}$$

Pero cuando el ascensor está viajando para cualquier instante de tiempo,se cumple que:

$$x(t) = 0{,}0523 = A\cos(\omega t + \phi) + 0{,}03924$$

$$\therefore \quad 0{,}013 = A\cos(\omega t + \phi) \qquad ...(\alpha)$$

Por otro lado: el observador dentro observa que el bloque no oscila, ni se mueve en consecuencia tendrá una velocidad relativa = 0

Entonces: $\frac{dx}{dt} = v(t) = 0$

$\Rightarrow \quad v(t=0) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\phi) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\phi) = 0 \qquad \therefore \quad \phi = \pi$ rad

Luego: De (α) para t = 0 condiciones iniciales

$0{,}013 = A\cos(\pi) \qquad \therefore \quad A = 0{,}013$ m

64. Una esfera sólida (radio = R) rueda sin deslizar en un canal cilíndrico (radio = 5R) como se indica en la figura P13.64. Demuestre que, para pequeños desplazamientos desde el punto de equilibrio perpendicular a la longitud del canal, la esfera ejecuta un movimiento armónico simple con un período

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$

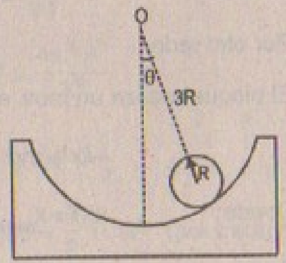
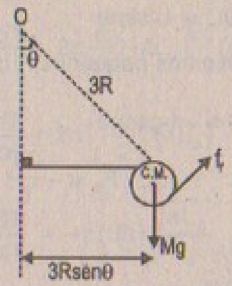


Figura P13.64

Resolución :

Por demostrar: $T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$



$I_{CM\ esfera} = 2/5MR^2$

Nota: Para desplazamientos pequeños sen$\theta \approx \theta$

Sabemos que: $\Sigma\,\tau_{CM} = I_{CM}\,.\,\ddot{\theta} \Rightarrow \quad f_r = \frac{2}{5}\,MR^2.\ddot{\theta}$

Por otro lado: $-mg(3R\ \mathrm{sen}\theta) - f_r = I_o.\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -mg(3R)\theta = \frac{2}{5}\,MR^2.\ddot{\theta} + \left[\frac{2}{5}MR^2 + M\,(4R)^2\right]\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -\theta.gR = \ddot{\theta}\left(\frac{28R^2}{5}\right)$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{5g}{28R}\right)\theta = 0 \quad \text{(Ecuación diferencial del M.A.S.)}$$

En consecuencia: $T = 2\pi \times \sqrt{\frac{28\,R}{5\,g}}$ l.q.q.d.

65. Una masa m está conectada a dos ligas de hule de longitud L, cada una bajo una tensión T, como en la figura P13.65. La masa se desplaza verticalmente una pequeña distancia "y". Suponga que la tensión no cambia, demuestre que a) la fuerza restauradora es –(2T/L) y b) que el sistema efectúa movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$

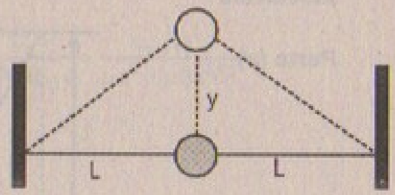
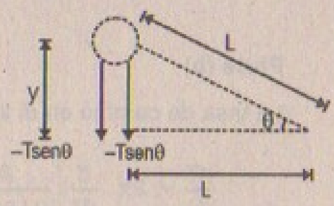


Figura P13.65

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar: $F_R = -\frac{2T}{L}$



a) Por analogía en un resorte $F_R = -kx = -ky$

$\Rightarrow \quad F_R = -2T\ \mathrm{sen}\theta\ .\ y \qquad ...\ (1)$

Pero según el triángulo rectángulo: $y \approx \theta L \approx L\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad F_R = -2Ty\theta \quad \text{(desplazamientos pequeños)}$$

b) Por analogía para un péndulo $F_R = -mg\theta = -mg\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \quad F_R = -2T\,.\,\frac{\theta L}{L} \ \text{(componente)} \qquad \therefore \quad F_R = -\frac{2T}{L} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por movimiento armónico simple $-\dfrac{2T}{L}\,.\,y = m.\ddot{y}$

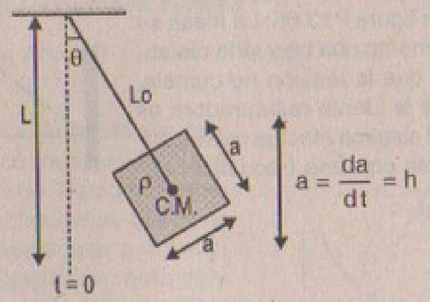
$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2T}{mL}\,.\,y = 0 \quad \text{(ecuación diferencial)}$$

Entonces: $\omega = \sqrt{\dfrac{2T}{mL}}$

66. Un recipiente cúbico ligero de volumen a^3 al principio está lleno de un líquido de densidad de masa ρ. El cubo está soportado inicialmente, por una cuerda ligera y forma un péndulo de longitud L_0 medida desde el centro de masa del recipiente lleno. Se deja que el líquido fluya desde el fondo del recipiente a una tasa constante (dM/dt). En cualquier tiempo t, el nivel de fluido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida en relación con el centro de masa instantáneo). a) Dibuje el aparato y denote las dimensiones a, h, L_0 y L. b) Encuentre la tasa de cambio en el tiempo del periodo como una función del tiempo t. c) Encuentre el periodo como una función del tiempo.

Resolución :

Parte (a)



Vista frontal del cubo

Parte (b)

La tasa de cambio en el tiempo será:

$$\frac{dT}{dt} = 2\pi\,.\,\frac{d}{dt}\left[\frac{a\,L_o}{g\,(a+3ht)}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = 2\pi\frac{d}{dt}\left[(aL_o)^{1/2}(g)^{-1/2}(a+3ht)^{-1/2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)(aL_o)^{1/2}(g)^{-1/2}(a+3ht)^{-3/2}.(3h)$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dt} = -\pi(3h)\sqrt{\frac{aL_o}{g}}\sqrt{\frac{1}{(a+3ht)^3}}$$

Parte (c)

Por dato: $\dfrac{dM}{dt} = \text{cte} \Rightarrow dM = k dt$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_i=M_i}^{t_f=M_f} dM = k\int_{t_i}^{t_f} dt$$

$$\Rightarrow \quad M(t) = M_{inicial} + kt \qquad \dots(1)$$

Por otro lado: $M_{inicial} = \rho.a^3$

Como: $\dfrac{dM}{dt} = k = \rho\,.\,\dfrac{dV}{dt} = \rho.3a^2.\dfrac{da}{dt} = \rho 3a^2 h$

Por lo tanto de (1) $\quad M(t) = \rho a^3 + \rho 3a^2 ht$

Así también: $\dfrac{d}{dt}\,C.M_{inst} = L(t) = \dfrac{L_o}{d\,M_{total(t)}} = \dfrac{L_o\,\rho a^3}{\rho a^3 + \rho 3a^2 ht}$

Luego: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L(t)}{g}}$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\left(\frac{L_o\rho a^3}{g\rho\,(a^3 + 3a^2ht)}\right)^{1/2} = 2\pi\,.\left(\frac{a\,L_o}{g(a+3ht)}\right)^{1/2}$$

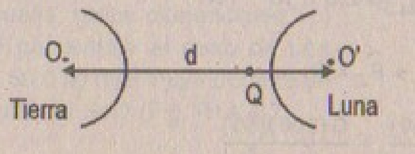
Capítulo 14

LA LEY DE LA GRAVEDAD

LEY DE LA GRAVEDAD DE NEWTON : MEDIDA DE LA CONSTANTE GRAVITACIONAL PESO Y FUERZA GRAVITACIONAL

1. En su trayecto a la Luna los astronautas del Apolo alcanzaron un punto donde la atracción gravitacional de la Luna es más intensa que la de la Tierra. a) Determine la distancia de este punto desde el centro de la Tierra. b) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad terrestre en este punto?

Resolución :



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$
$M_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$T_{Tierra} = 3{,}156 \times 10^7$ s
$T_{Luna} = 2{,}36 \times 10^6$ s

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2_{Luna} = \dfrac{4\pi^2}{G\,.\,M_{Tierra}}\,.\,d^3$

$$\Rightarrow \quad (2{,}36 \times 10^6)^2 = \frac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}\times d^3 \qquad \therefore \quad d = 3{,}84 \times 10^8\ m$$

Luego: $\dfrac{G.M_T}{x^2} = \dfrac{G\,.\,M_L}{(d-x)^2} \;\Rightarrow\; 5{,}98 \times 10^{24}\,(3{,}84 \times 10^8 - x)^2 = 7{,}36 \times 10^{22}\,(x)^2$

$$\therefore \quad x = 3{,}46 \times 10^8\ m$$

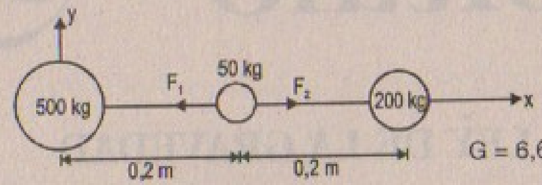
Parte (b)

$$g = \frac{M_T\,.\,G}{(3{,}46\times10^8)^2} \;\Rightarrow\; g = \frac{(5{,}98\times10^{24})(6{,}67\times10^{-11})}{(3{,}46\times10^8)^2}$$

$$\therefore \quad g = 3{,}34 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

2. Una masa de 200 kg y una de 500 kg están separadas por 0,400 m. a) Encuentre la fuerza gravitacional neta ejercida por las masas sobre una masa de 50,0 kg situada a la mitad entre ellas. b) ¿En qué posición (aparte de las infinitamente remotas) la masa de 50,0 kg experimenta una fuerza neta igual a cero?

Resolución :



$G = 6,67 \times 10^{-11}$ kg²

Parte (a) $\vec{F}_1 = \dfrac{G(50)(500)}{(0,2)^2}\left(-\hat{i}\right) \Rightarrow F_1 = -G \times 625 \times 10^3 \hat{i}$

$$\vec{F}_2 = \frac{G(50)(200)}{(0,2)^2}\left(\hat{i}\right) \Rightarrow F_2 = G \times 25 \times 10^4 \hat{i}$$

$$\therefore \; F_{neta} = -2,5 \times 10^{-17} \hat{i}\ \text{N}$$

Parte (b) Como $F_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

Entonces: $\dfrac{G(200)(50)}{x^2} = \dfrac{G(500)(50)}{(x-d)^2}$

Por lo tanto: $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{200}{500}}}$

(posición general para cualquier distancia de separación)

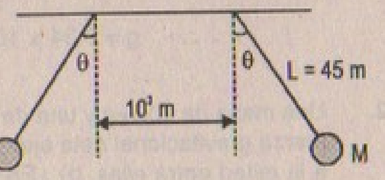
3. Un estudiante propone medir la constante gravitacional G, suspendiendo dos masas esféricas desde el techo de una alta catedral y midiendo la desviación respecto de la vertical. Si las dos masas, de 100 kg, se suspenden en el extremo de cables de 45,00 m de largo, y los cables se pegan en el techo separados por una distancia de 1 000 m, ¿cuál es la separación de las masas?

Resolución :

Se cumple que: $2L\operatorname{sen}\theta + x = 10^3$

Por otro lado: $v^2 = 2gL\,(1-\cos\theta) = \dfrac{G \cdot M_T}{L}$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 1 - \frac{R_T^2}{2L^2}$$



Entonces: $1-\operatorname{sen}^2\theta = \left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2 \Rightarrow 1-\left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\theta$

Luego: $x = 10^3 - 2L\sqrt{1-\left(1-\dfrac{R_T^2}{2L^2}\right)^2}$

Reemplazando: $x = 1 - 63,3 \times 10^{-9}$ m

4. a) Determine el cambio y el cambio fraccional en la fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre una mujer de 50,0 kg parada sobre el ecuador a mediodía y a medianoche. (Sugerencia: Como Δr es muy pequeña, utilice diferenciales.) b) ¿En qué porcentaje el peso de una mujer de 50,0 kg disminuye durante un eclipse total del Sol? (Fig. P14.4)?

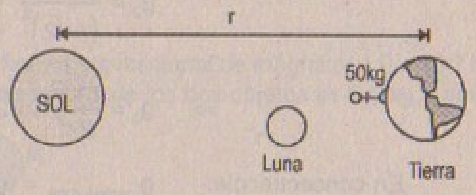


Figura P14.4

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $r = 1,496 \times 10^{11}$ m y $M_{sol} = 1,991 \times 10^{30}$ kg

$$M_{Tierra} = 5,98 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

Por la tercera ley de Kepler:

(1) $T^2_{Tierra} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_{Sol}} \times r_1^3$ (medianoche)

(2) $\left(\dfrac{T_{Tierra}}{2}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2}{G_{MSol}} \times r_2^3$ (mediodía) $\Rightarrow \dfrac{(1)}{(2)}$ Resulta que: $r_1 = \sqrt[3]{4}\, r_2 = r$

Luego: $F_{medianoche} = \dfrac{G.M_{Sol} \times M_T}{2 \times r^2}$ $\quad \therefore \; \Delta F = \dfrac{G.M_{Sol} \times M_T}{2r^2} = 1,77 \times 10^{22}$ N

$$F_{mediodía} = \frac{G.M_{Sol} \times M_T}{r^2}$$

Parte (b)

Datos incorrectos.

5. Tres masas iguales son colocadas en tres esquinas de un cuadrado de longitud de borde ℓ como en la figura P14.5. Encuentre este campo gravitacional g en la cuarta esquina debida a estas masas.

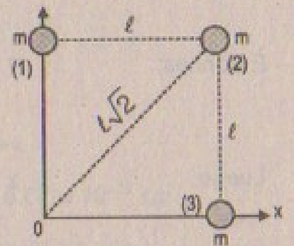


Figura P14.5

Resolución :

$$g_2 = \frac{m.G}{(\ell\sqrt{2})^2} = \frac{m.G}{2\ell^2}$$

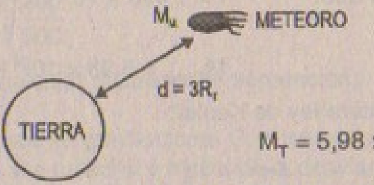
$$\Rightarrow \quad g_3 = \frac{m.G}{2\ell^2}.\sqrt{2} \quad \wedge \quad g_1 = \frac{G.m}{2\ell^2}\times\sqrt{2}$$

En consecuencia: $g_{\text{campo grav.}} = (g_1 + g_3) + g_2$

$$\Rightarrow \quad g_{\text{campo gravitacional}} = G\times\frac{m}{\ell^2}\,\frac{(2\sqrt{2}+1)}{2}$$

6. Cuando un meteoro que cae está a una distancia $d = 3R_T$ sobre la superficie terrestre, ¿cuál es su aceleración en caída libre?

Resolución :



$R_T = 6{,}37\times10^6$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

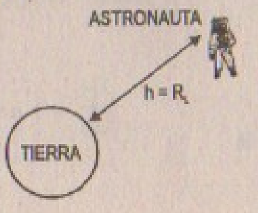
$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$$\Rightarrow \quad M_M.g = \frac{M_M.M_T.G}{(d+R_T)^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{5{,}98\times10^{24}\times(6{,}67\times10^{-11})}{\left[4\,(6{,}37\times10^6)\right]^2}$$

$$\therefore \quad g = 0{,}61\ \text{m/s}^2$$

7. Un astronauta pesa 140 N sobre la superficie de la Luna. Cuando se encuentra en una órbita circular alrededor de la Luna a una altitud $h = R_1$, ¿qué fuerza gravitacional ejerce la Luna sobre él?

Resolución :



$W_{\text{astron.}} = 140$ N

$M_{\text{Luna}} = 7{,}36\times10^{22}$ kg

$R_{\text{Luna}} = 1{,}74\times10^6$ m

Sabemos que: $\quad 140\text{ N} = \dfrac{M_{ast}M_{Luna}.G}{(R_{Luna})^2}$

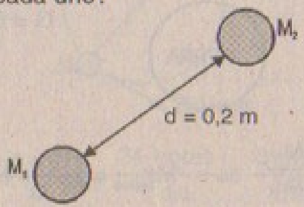
Por otro lado: Nos piden $\quad F_g = \dfrac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{(R_{Luna}+h)^2} = \dfrac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{(2R_{Luna})^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{1}{4}\left[\frac{G.M_{ast}.M_{Luna}}{R^2_{Luna}}\right]$$

$$\therefore \quad F_g = \frac{1}{4}(140) = 35\text{ N (hacia la luna)}$$

8. Dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de magnitud $1{,}0\times10^{-8}$ N cuando están separados 20 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5,0 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?

Resolución :



$F_g = 1{,}0\times10^{-8}$ N

$M_1 + M_2 = 5$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Por dato: $\quad M_1 + M_2 = 5$ kg

Por otro lado: $\quad 1{,}0\times10^{-8} = G.\dfrac{M_1\times M_2}{(0{,}2)^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1{,}0\times10^{-8}\times(0{,}2)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = M_1\times(5-M_1)$$

Entonces resolviendo la ecuación resulta que:

Si: $\quad M_1 = 3$ kg $\Rightarrow$ $M_2 = 2$ kg

Si: $\quad M_1 = 2$ kg $\Rightarrow$ $M_2 = 3$ kg

Tiene dos soluciones

9. Si la masa de Marte es $0{,}107\ M_T$ y su radio es $0{,}53\ R_T$, calcule el campo gravitacional g en la superficie de Marte.

Resolución :

$R_{Marte} = 0{,}53\ R_T$

$M_{Marte} = 0{,}107\ M_T$

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$R_T = 6{,}37\times10^6$ m

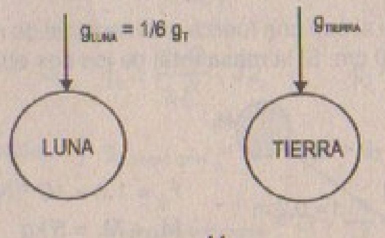
$$F_g = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2}$$

$$\Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{(0{,}107\, M_{Tierra})}{(0{,}53 \times R_{Tierra})^2} \Rightarrow g = (6{,}67 \times 10^{-11}) \times \frac{(0{,}107)(5{,}98 \times 10^{24})}{(0{,}53)^2 \times (6{,}37 \times 10^6)^2}$$

$$\therefore \quad g = 3{,}74 \text{ m/s}^2$$

10. La aceleración en caída libre sobre la superficie de la Luna es aproximadamente 1/6 que la de sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Luna es más o menos 0,25 R_T, calcule la razón de sus densidades, $\rho_{luna}/\rho_{tierra}$

Resolución :



$R_{Luna} = 0{,}25\, R_T$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m^2/kg^2

Sabemos que: $\quad g_{Tierra} = G.\ \frac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad M_{Tierra} = \frac{R_T^2 \times g_T}{G}$

Además: $\quad g_{Luna} = G.\ \frac{M_{Luna}}{R_L^2} \quad \Rightarrow \quad g_{Luna} = \frac{1}{6}\, g_T = G \cdot \frac{M_{Luna}}{(0.25\, R_T)^2}$

$$\Rightarrow \quad M_{Luna} = \frac{1}{96} \cdot g_T \cdot \frac{R_T^2}{G}$$

Luego: $$\frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{\dfrac{M_{Luna}}{\text{Volumen de la luna}}}{\dfrac{M_{Tierra}}{\text{Vol. Tierra}}} = \frac{\dfrac{\dfrac{g_T \cdot R_T^2}{96 \cdot G}}{\dfrac{4}{3}\pi \cdot (R_L)^3}}{\dfrac{g_T \cdot R_T^2/G}{4/3\, \pi\, R_T^3}}$$

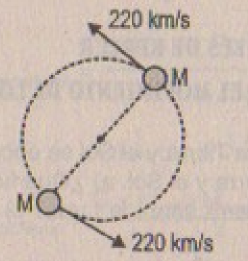
Entonces: $$\frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{\dfrac{1}{96\, R_L^3}}{\dfrac{1}{R_T^3}} = \frac{\dfrac{1}{96\,(0{,}25\, R_T)^3}}{\dfrac{1}{R_T^3}}$$

$$\therefore \quad \frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

11. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales (Fig. P14.11). Si la velocidad orbital de cada estrella es de 220 km/s y el periodo orbital de cada una es de 14,4 días, calcule la masa M de cada estrella. (Por comparación, la masa de nuestro Sol es 2 × 10^{30} kg.)

11A. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales (Fig. P14.11). Si la velocidad orbital de cada estrella es v y el período orbital de cada una es T, calcule la masa M de cada estrella.

Resolución :



T_M = 14,4 días

$M_{Sol} = 2 \times 10^{30}$ kg

$$T = 14{,}4 \text{ días} \times \frac{24 \text{ horas}}{1 \text{ día}} \times \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ hora}} = 1{,}24 \times 10^6 \text{ s}$$

Por otro lado: $\quad r = \frac{v.T}{2\pi} = \frac{(22 \times 10^4)(1{,}24 \times 10^6)}{2\,(3{,}1416)} \quad \therefore \quad r = 4{,}34 \times 10^{10}$ m

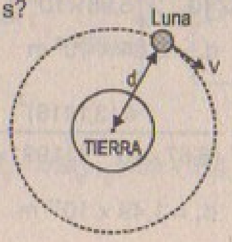
Entonces por la tercera ley de Kepler: $\quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_p} \times r^3$

$$\Rightarrow \quad M_p = \frac{4(3{,}1416)^2 (4{,}34 \times 10^{10})^3}{(1{,}24 \times 10^6)^2 (6{,}67 \times 10^{-11})} \quad \therefore \quad M_p = 3{,}15 \times 10^{31} \text{ kg}$$

En consecuencia: Luego M será: 1,6 × 10^{31} kg

12. La Luna está a 384 400 km del centro de la Tierra y completa una órbita en 27,3 días. a) Determine la velocidad orbital de la Luna. b) ¿Qué distancia «cae» la Luna hacia la Tierra en 1,00 s?

Resolución :



T_{Luna} = 27,3 días

d ≐ 384 400 km

Parte (a) Sabemos que: $T = \dfrac{2\pi . R}{v}$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2\pi . R}{T} = \frac{2\,(3{,}1416)(384\ 400)}{27{,}3\ \text{dias}} \times \frac{1\ \text{dia}}{24\ \text{horas}} \times \frac{1\ \text{hora}}{60\ \text{min}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

$$\therefore \quad v = 1{,}02\ \text{km/s}$$

Parte (b)
Sabemos que: $v.T = s$

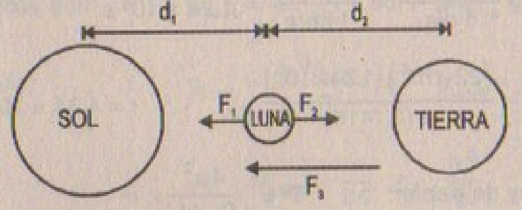
$$\Rightarrow \quad 1{,}02\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \times 1\text{s} = 1{,}02\ \text{km}$$

LAS LEYES DE KEPLER

LA LEY DE LA GRAVEDAD Y EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

13. Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con el satélite terrestre entre la Tierra y el Sol. a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra?

Resolución :



$T_{Luna} = 2{,}36 \times 10^6$ s
$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$M_{Luna} = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²
$T_{Tierra} = 3{,}156 \times 10^7$ s

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2_{Luna} = \dfrac{4\pi^2}{G . M_{Tierra}} \times (d_2)^3 \ ...\ (1)$

$$T^2_{Tierra} = \frac{4\pi^2}{G . M_{Sol}} (d_1 + d_2)^3 \ ...\ (2)$$

De (1): $(2{,}36 \times 10^6)^2 = \dfrac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})\,(5{,}98\times10^{24})} \cdot d_2^3$

$$\therefore \quad d_2 = 3{,}84 \times 10^8\ \text{m}$$

Luego de (2) $(3{,}156 \times 10^7)^2 = \dfrac{4\,(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})\,(1{,}991\times10^{30})} \times (d_1 + 3{,}84 \times 10^8)^3$

$$\therefore \quad d_1 = 1{,}49 \times 10^{11}\ \text{m}$$

Entonces: $F_{Sol/Luna} = \dfrac{G \times M_{Sol} \times M_{Luna}}{d_1^2}$

$$\Rightarrow \quad F_{Sol/Luna} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})(7{,}36\times10^{22})}{(1{,}49\times10^{11})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Sol/Luna} = 4{,}39 \times 10^{20}\ \text{N}$$

Parte (b) $F_{Tierra/Luna} = \dfrac{G . M_L . M_T}{d_2^2}$

$$\Rightarrow \quad F_{Tierra/Luna} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times(7{,}36\times10^{22})(5{,}98\times10^{24})}{(3{,}84\times10^{8})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Tierra/Luna} = 1{,}99 \times 10^{20}\ \text{N}$$

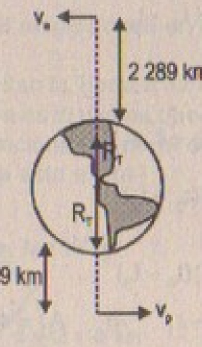
Parte (c) $F_{Sol/Tierra} = \dfrac{G \times M_{sol} \times M_{tierra}}{(d_1 + d_2)^2}$

$$F_{Sol/Tierra} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})(5{,}98\times10^{24})}{(1{,}49\times10^{11})^2}$$

$$\therefore \quad F_{Sol/Tierra} = 3{,}55 \times 10^{22}\ \text{N}$$

14. El satélite Explorer VIII, puesto en órbita el 3 de noviembre de 1960 para investigar la ionosfera, tenía los siguientes parámetros orbitales: perigeo, 459 km, y apogeo, 2 289 km (las dos distancias sobre la superficie de la Tierra); periodo, 112,7 min. Calcule la razón v_p/v_a.

Resolución :



$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Por la conservación del momento angular:

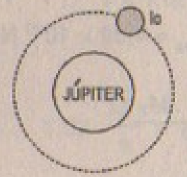
$$L_o = L_f$$

$$\Rightarrow \quad M_s.v_o.(2\ 289 + R_T) = M_s.v_p(459 + R_T)$$

$$\therefore \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{2\,289 + R_{Tierra}}{459 + R_{Tierra}} = \frac{8{,}659 \times 10^6}{6{,}829 \times 10^6} = \frac{8{,}659}{6{,}829}$$

15. Io, una pequeña Luna de Júpiter, tiene un periodo orbital de 1,77 días y un radio orbital de 4,22 × 10^5 km. De acuerdo con estos datos, determine la masa de Júpiter.

Resolución :



$T = 1{,}77$ días

Radio $= 4{,}22 \times 10^5$ km

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley: $T^2 = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_J} \cdot r^3 \qquad M_{Júp} = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot T^2} \times r^3$

$$T = 1{,}77 \text{ días} \times \frac{24\text{ h}}{1\text{ día}} \times \frac{3\,600\text{ s}}{1\text{ h}} = 1{,}53 \times 10^5$$

Luego: $M_{Jup} = \dfrac{4(3{,}1416)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} \times \dfrac{(4{,}22 \times 10^8)^3}{(1{,}53 \times 10^5)^2} \qquad \therefore \quad M_{Júp} = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg

16. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad constante en la dirección x una distancia b de dicho eje (Fig. P14.16). Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface mostrando que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

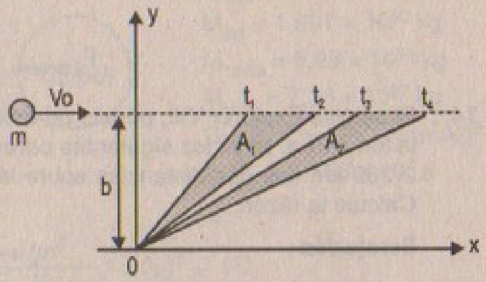


Figura P14.16

Resolución :

Por demostrar y por dato $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$

Entonces: $A_1 = \dfrac{1}{2}(b)(t_2 - t_1)$

$A_2 = \dfrac{1}{2}(b)(t_4 - t_3)$

Como: $t_4 - t_3 = t_2 - t_1 \Rightarrow A_1 = A_2$ (La segunda ley se cumple)

17. Dos planetas X y Y viajan en órbitas circulares en dirección contraria a las de las manecillas del reloj en torno de una estrella, como muestra la figura P14.17. Los

radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En cierto momento están alineados, como en la figura P14.17a, formando una línea recta con la estrella. Cinco años después, el planeta X ha girado 90° como en la figura P14.17b. ¿Dónde está el planeta Y en ese momento?

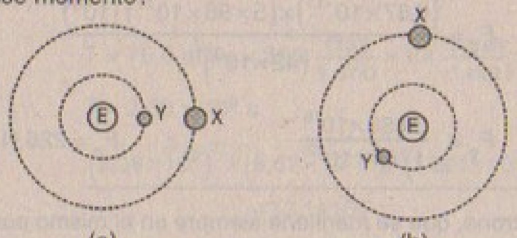


Figura P14.17

Resolución :

Sabemos que por la tercera ley de Kepler:

$$T_x^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_E} \times (3R_y)^3$$

$$T_y^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_E} \times R_y^3 \quad \Rightarrow \quad T_x = 3\sqrt{3} \cdot T_y \quad \therefore \quad T_y = \frac{\sqrt{3}}{9} T_x \ldots (1)$$

Por otro lado: 2π.rad —— T_x

$\dfrac{\pi}{2}$ rad —— 5 años = $1{,}57 \times 10^8$ s

$\therefore \quad T_x = 6{,}3 \times 10^8$ s

Entonces: Si: 1rev — 2π rad — $T_y = \sqrt{3}/9\, T_x$

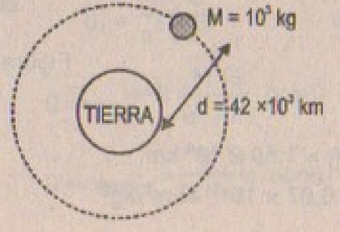
— x — $1{,}57 \times 10^8$ s

$\Rightarrow$ x = 1,3 rev

Luego Y habrá completado 1,3 revoluciones en ese momento.

18. Los satélites geosíncronos orbitan la Tierra a 42 000 km desde el centro de ésta. Su velocidad angular en esta altura es la misma que la velocidad rotacional de la Tierra, razón por la cual parecen estacionarios en el cielo. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un satélite de 1 000 kg a esta altura?

Resolución :



$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

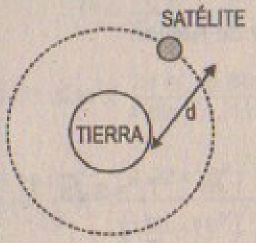
$$F_g = \frac{G.\,M_T\,.\,M}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{(6{,}67\times10^{-11})\times(5\times98\times10^{24})\,(10^3)}{(42\times10^6)^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{39{,}88\times10^{16}}{1764\times10^{12}} \qquad \therefore \quad F_g = 226\text{ N}$$

19. Un satélite síncrono, que se mantiene siempre en el mismo punto sobre un ecuador planetario, se pone en órbita alrededor de Júpiter para estudiar la famosa mancha roja. Júpiter gira una vez cada 9,9 h. Con los datos de la tabla 14.2 encuentre la altura del satélite.

Resolución :



$T = 9{,}9$ horas
$M_{Júpiter} = 1{,}9\times10^{27}$ kg
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Sabemos que: $F_g = F_c$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_J\,.\,M_S\,.G}{d^2} = M_S\,.\,\frac{v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_J\,.G}{d} = \left(\frac{2\pi\,.\,d}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_J\,.\,G\times T^2}{4\,\pi^2} = d^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1{,}9\times10)^{27}\,(6{,}67\times10^{-11})}{4\,(2{,}1416)^2}(9{,}9)^2\times(3\,600)^2$$

$$\therefore \quad d = 8{,}98\times10^7\text{ m}$$

20. El cometa Halley se acerca al Sol a una distancia aproximada de 0,57 UA, y su periodo orbital es de 75,6 años. (UA es la abreviatura de unidad astronómica, donde 1 UA = $1{,}50\times10^6$ km es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de que inicie su viaje de regreso? (Fig. P14.20.)

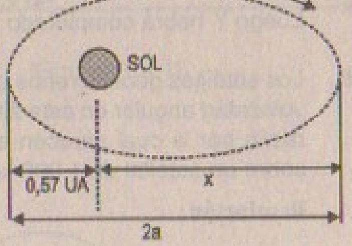


Figura P14.20

Resolución :

$T = 75{,}6$ años ; 1 UA = $1{,}50\times10^6$ km.

$M_{Sol} = 1{,}991\times10^{30}$ kg ; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\times M_{sol}}\times x^3$

Entonces: sustituyendo:

previamente: $T = 75{,}6\text{ años}\times365\,\dfrac{\text{dias}}{1\text{ año}}\times24\,\dfrac{\text{horas}}{1\text{ dia}}\times\dfrac{3\,600\text{ s}}{1\text{ hora}}$

$\therefore \quad T = 2{,}38\times10^9$ s

luego: $\dfrac{(2{,}38\times10^9)^2\times(6{,}67\times10^{-11})\times(1{,}991\times10^{30})}{4\,(3{,}1416)^2} = a^3$

$\therefore \quad a = $ (calculadora)

Luego: $x = 2(a) - 0{,}57$ UA

$\therefore \quad x = $ (calculadora)

EL CAMPO GRAVITACIONAL

21. Calcule la magnitud y dirección del campo gravitacional en el punto P sobre el bisector perpendicular de dos masas iguales separadas por una distancia 2a, como se muestra en la figura P14.21.

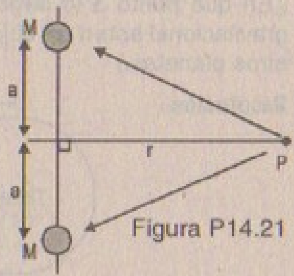
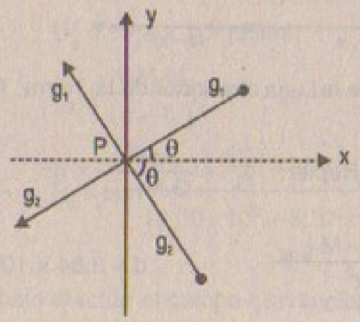
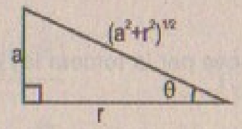


Figura P14.21

Resolución :





$$g_1 = \frac{M\,.\,G}{a^2+r^2} \quad ; \quad g_2 = \frac{M.G}{a^2+r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{g}_{resul\ x} = -2\,\frac{M.G}{a^2+r^2}\cos\theta\,\hat{i}$$

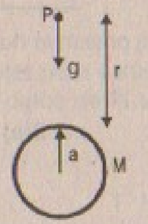
$$\vec{g}_{resultante\ y} = \frac{M.G}{a^2+r^2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} - \frac{M.G}{a^2+r^2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} = 0$$

Luego: $g_{resultante} = \dfrac{2 \cdot GM}{a^2 + r^2} \cdot \dfrac{r}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}}$

$\therefore \quad g_{resultante} = \dfrac{2MGr}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}$ (hacia la izquierda)

22. Determine el campo gravitacional a una distancia r a lo largo del eje de un anillo delgado de masa M y radio a.

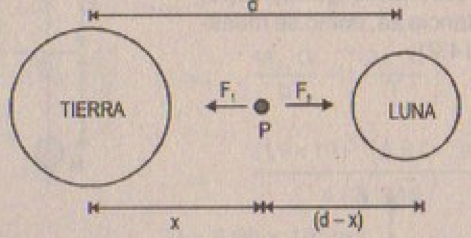
Resolución :



$g_p = \dfrac{M.G}{(r+a)^2}$ dirigido hacia el anillo

23. ¿En qué punto a lo largo de la línea que conecta la Tierra y la Luna la fuerza gravitacional sobre un objetó es igual a cero? (Ignore la presencia del Sol y de los otros planetas.)

Resolución :



Sabemos que:

$T_{Tierra} = 3,156 \times 10^7$ s y de la Luna alrededor de la Tierra: $T_L = 2,36 \times 10^6$ s

Entonces por la tercera ley de Kepler: $T_L^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_{Tierra}} \times d^3$

$\Rightarrow \quad d^3 = \dfrac{T_{Luna}^2 \times G \times M_{Tierra}}{4\pi^2} \qquad \therefore \quad d = 3,84 \times 10^8$ m

Luego: $g_p = 0$

Entonces: $F_1 = F_2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{G.Mp.M_T}{x^2} = \dfrac{G.Mp \,.\, M_{Luna}}{(d-x)^2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{G \,.\, M_{Tierra}}{x^2} = \dfrac{G.M_{Luna}}{(d-x)^2}$

Reemplazando: $\dfrac{5,98 \times 10^{24}}{x^2} = \dfrac{7,36 \times 10^{22}}{\left(3,84 \times 10^8 - x\right)^2}$

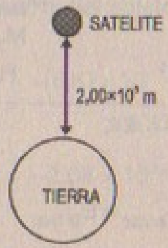
$\therefore \quad x = 3,84 \times 10^4$ km

Luego el objeto estará a: $3,84 \times 10^4$ km desde el centro de la Luna.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

24. Un satélite de la Tierra tiene una masa de 100 kg y está a una altura de $2,00 \times 10^6$ m. a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite-Tierra? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el satélite?

Resolución :



$M_s = 100$ kg

$M_{Tierra} = 5,98 \times 10^{24}$ kg

$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

$R_{Tierra} = 6,37 \times 10^6$ m

Parte (a) $U_p = \dfrac{-GM_TM_S}{d}$

$\Rightarrow \quad U_p = -\dfrac{(6,67\times10^{-11})(5,98\times10^{24})(10^2)}{2,00\times10^6}$

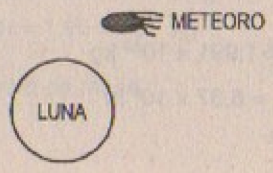
$\therefore \quad U_p = 19,9 \times 10^9$ joules

Parte (b) $F_g = \dfrac{GM_TM_S}{(d+R_T)^2}$

$\Rightarrow \quad F_g = \dfrac{(6,67\times10^{-11})(5,98\times10^{24})(10^2)}{\left(2,00\times10^6 + 6,37\times10^6\right)^2} \qquad \therefore \quad F_g = 569,3$ N

25. ¿Cuánto trabajo efectúa el campo gravitacional de la Luna cuando un meteoro de 1 000 kg proveniente del espacio exterior choca contra la superficie lunar?

Resolución :



$M_{meteoro} = 10^3$ kg

$M_{Luna} = 7,36 \times 10^{22}$ kg

$R_{Luna} = 1,74 \times 10^6$ m

$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

$$W = -\Delta U = U_i - U_f$$

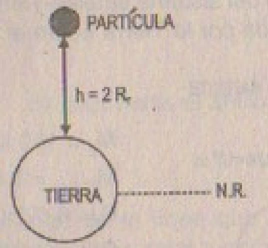
$$\Rightarrow \quad W = 0 + \frac{G.M_M.M_{Luna}}{R_{Luna}} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(10^3)(7{,}36\times10^{22})}{1{,}74\times10^6}$$

$$\therefore \quad W = 28{,}2 \times 10^8 \text{ joules}$$

26. ¿Cuánta energía es necesaria para mover una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura $h = 2R_T$?

26A. ¿Cuánta energía es necesaria para mover una masa desde la superficie terrestre hasta una altura h?

Resolución :



$M_{partícula} = 10^3$ kg
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por conservación de energía: $E_{M\ inicial} = E_{M\ final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M_p \cdot v_{esc}^2 - G.\frac{M_p \cdot M_T}{R_T} = -G.\frac{M_p \cdot M_T}{3R_T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M_p \cdot v_{esc}^2 = \frac{2G.M_p.M_T}{3R_T}$$

Luego: $$E_{Total\ necesaria} = \frac{2G.M_p.M_T}{3R_T} - \frac{G.M_p.M_T}{R_T} = -\frac{G.M_p.M_T}{3R_T}$$

Reemplazando: $$E_{Total\ necesaria} = \frac{(-6{,}67\times10^{-11})(10^3)(5{,}98\times10^{24})}{3(6{,}37\times10^6)} = -2{,}1\times10^{10}\text{ joules}$$

27. Después de que se agote su combustible nuclear, el destino final de nuestro Sol es colapsarse en una enana blanca, es decir, una estrella que tiene aproximadamente la masa del Sol, pero el radio de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración en caída libre en su superficie, y c) la energía potencial gravitacional de un objeto de 1,00 kg en su superficie.

Resolución :

Sea: $M_{Estrella\ (enana\ blanca)} = M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg
$R_{Estrella\ (enana\ blanca)} = R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a) $$\rho_{prom.} = \frac{M_{Sol}}{V_{Tierra}} = \frac{1{,}991\times10^{30}}{\frac{4}{3}\pi(6{,}37\times10^6)^3}$$

$$\therefore \quad \rho_{prom.enana\ blanca} = 1{,}84\times10^9\text{ kg/m}^3$$

Parte (b) $$g_{enana\ blanca} = \frac{G.M_{Sol}}{R_{Tierra}^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})}{(6{,}37\times10^6)^2}$$

$$\therefore \quad g_{enana\ blanca} = 3{,}27\times10^6\text{ m/s}^2$$

Parte (c) Masa objeto = 1 kg

Entonces la energía potencial del objeto $= -G.\dfrac{M_o.M_{Sol}}{R_{Tierra}}$

$$\Rightarrow \quad Ep_{objeto} = \frac{-(6{,}67\times10^{-11}).(1{,}991\times10^{30})}{6{,}37\times10^6}$$

$$\therefore \quad Ep_{objeto} = |-2{,}08\times10^{13}\text{ joules}|$$

CONSIDERACIONES DE ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO PLANETARIO Y DE SATÉLITES

28. Determine la velocidad de escape de un cohete sobre el lado lejano de Ganímedes, la luna más grande de Júpiter. El radio de Ganímedes es de $2{,}64 \times 10^6$ m y su masa es igual a $1{,}495 \times 10^{23}$ kg. La masa de Júpiter es de $1{,}90 \times 10^{27}$ kg y la distancia entre Júpiter y Ganímedes es igual a $1{,}071 \times 10^9$ m. Asegúrese de incluir el efecto gravitacional debido a Júpiter, aunque puede ignorar el movimiento de este gran planeta y de la mayor de sus lunas cuando giran alrededor de su centro de masa (Fig. P14.28).

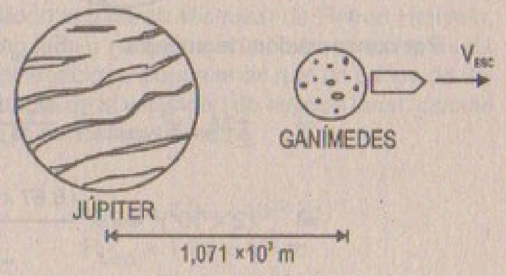
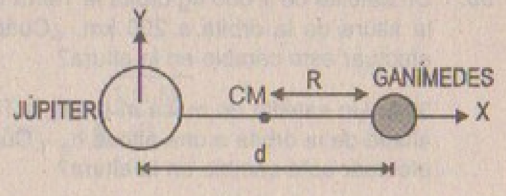


Figura P14.28

Resolución :

Radio de Ganím. = $2{,}64 \times 10^6$ m
Masa de Ganím. = $1{,}495 \times 10^{23}$ kg
Masa de Júpiter = $1{,}90 \times 10^{27}$ kg



Hallando el centro de masa

Entonces $$X_{CM} = \frac{M_{Ganim.}(d)}{M_G + M_J} = \frac{(1,495\times10^{23})(1,071\times10^{9})}{(1,495\times10^{23}+1,9\times10^{27})}$$

$$\therefore \quad X_{CM} = 8,43\times10^{4}\ m \quad \Rightarrow \quad R \approx 0$$

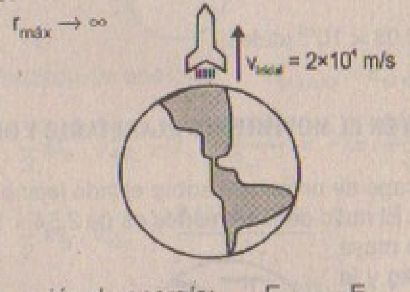
Luego:

$$v_{esc.cohete} = \sqrt{\frac{2.G\,M_{CM}}{R_{(CM-Cohete+R_{Ganímedes})}}} = \sqrt{\frac{2\times(6,67\times10^{-11})(1,495\times10^{23}+1,9\times10^{27})}{2,64\times10^{6}}}$$

$$\therefore \quad v_{escape\ del\ cohete} = 3\times10^{5}\ m/s$$

29. Una nave espacial se lanza desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de $2,00\times10^4$ m/s. ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy alejada de la Tierra? (Ignore la fricción.)

Resolución:



$R_{Tierra} = 6,37\times10^{6}$ m
$G = 6,67\times10^{-11}$ N.m²/kg²
$v_f = ?$
$M_{Tierra} = 5,98\times10^{24}$ kg

Por conservación de energía: $E_{inicial} = E_{final}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M_c\cdot v^2_{inicial} - G.\frac{M_c\cdot M_T}{R_T} = \frac{1}{2}M_c v^2_{final}$$

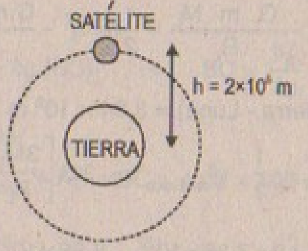
$$\Rightarrow \quad (2\times10^4)^2 - 2\times\frac{(6,67\times10^{-11})(5,98\times10^{24})}{6,37\times10^{6}} = v^2_{final}$$

$$\therefore \quad v_{final} = 16,58\times10^{3}\ m/s \quad ó \quad v_{final} = 1,66\times10^{4}\ m/s$$

30. Un satélite de 1 000 kg orbita la Tierra a una altura de 100 km. Se desea aumentar la altura de la órbita a 200 km. ¿Cuánta energía debe añadirse al sistema para efectuar este cambio en la altura?

30A. Un satélite de masa m orbita la Tierra a una altura h_1. Se desea aumentar la altitud de la órbita a una altitud h_2. ¿Cuánta energía debe añadirse al sistema para efectuar este cambio en la altura?

Resolución:



$M_{satélite} = 10^{3}$ kg
$M_{Tierra} = 5,98\times10^{24}$ kg
$G = 6,67\times10^{-11}$ N.m²/kg²
$h = 2d$
$d = 10^{5}$ m

$$E_{inicial} = E_{K\,inicial} + E_{p\,inicial}$$

$$\Rightarrow \quad E_{inicial} = \frac{G.M_T.M_S}{2d} - \frac{G\,M_T.M_S}{d} = -\frac{G.M_T.M_S}{2d}$$

$$E_{final} = E_{K\,final} + E_{p\,final}$$

$$\Rightarrow \quad E_{final} = \frac{G.M_T.M_S}{2h} - \frac{G\,M_T.M_S}{h} = -\frac{G.M_T.M_S}{2h} = -\frac{G.M_T.M_S}{4d}$$

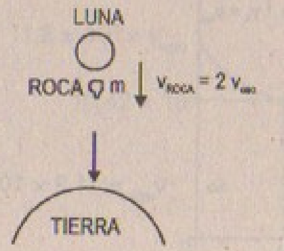
Luego: $E_{necesaria} = E_{final} - E_{inicial} = -\frac{G.M_T.M_S}{4d} + \frac{G.M_T.M_S}{2d}$

Reemplazando:

$$\therefore \quad E_{necesaria} = \frac{G.M_T.M_S}{4d} = \frac{(6,67\times10^{-11})(5,98\times10^{24})(10^{3})}{4\times10^{5}} = 9,97\times10^{11}\ joules$$

31. En *La Luna es una dama cruel* (*The Moon is a harsh Mistress*) de Robert Heinlein, los colonos que habitan la Luna intentan lanzar rocas hacia la Tierra si no se les da la independencia (o por lo menos una delegación). Suponiendo que un cañón de riel pudiera lanzar una roca de masa m al doble de la velocidad de escape lunar, calcule la velocidad de la roca cuando entra a la atmósfera terrestre.

Resolución:



$M_{Luna} = 7,36\times10^{22}$ kg
$R_{Luna} = 1,74\times10^{6}$ m
$M_{Tierra} = 5,98\times10^{24}$ kg
$R_{Tierra} = 6,37\times10^{6}$ m
$G = 6,67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G.M_L}{R_L}} \quad \Rightarrow \quad v_{inicial\ roca} = 2\sqrt{\frac{2G.M_L}{R_L}}$$

Por conservación de energía:

$$E_{mecánica\ inicial\ sistema} = E_{mecánica\ final\ del\ sistema}$$

Entonces: $\frac{1}{2} m\left[\sqrt{\frac{8GM_L}{R_L}}\right]^2 - \frac{G.m.M_L}{R_L} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{G.m.M_T}{d}$

Donde: d = Distancia (Tierra - Luna) = $3,84 \times 10^8$ m

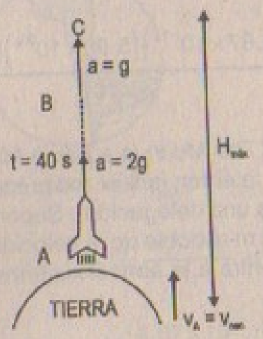
Entonces: $\frac{3G.M_L}{R_L} + \frac{G.M_T}{d} = \frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{final roca}} \Rightarrow 2G\left[\frac{3M_L}{R_L}+\frac{M_T}{d}\right] = v^2_{\text{final roca}}$

Reemplazando: $2(6,67\times10^{-11})\cdot\left[\frac{3\times7,36\times10^{22}}{1,74\times10^6}+\frac{5,98\times10^{24}}{3,84\times10^8}\right] = v^2_{\text{final roca}}$

$\therefore\ v_{\text{final roca a tierra}} = 4,36$ km/s

32. Un cohete se dispara verticalmente, expulsando la masa suficiente para moverse hacia arriba con una aceleración constante de 2 g. Después de 40,0 s, se apagan los motores del cohete y éste se mueve sólo bajo la acción de la gravedad, con una resistencia del aire despreciable. Ignore la variación de g con la altura y encuentre a) la altura máxima que alcanza el cohete, y b) el tiempo total de vuelo desde el lanzamiento hasta que el cohete regresa a la Tierra. c) Dibuje una gráfica a mano (cualitativa) de la velocidad contra el tiempo de vuelo.

Resolución :



$g = 9,80\ m/s^2$
$M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
$R_T = 6,37 \times 10^6$ m
$G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$

Parte (a)

$H_{máx} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\Rightarrow\ \overline{AB} = v_{esc}\,t - \frac{1}{2}(2g)t^2$

Pero: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_T}{R_T}} \Rightarrow v_{esc} = 11,2 \times 10^3$ m/s

Luego: $\overline{AB} = 11,2 \times 10^3.(4 \times 10) - (9,80)(4 \times 10)^2$

$\therefore\ AB = 4,32 \times 10^5$ m

Por otro lado:
$v_B = v_A - 2gt \Rightarrow v_B = 11,2 \times 10^3 - 2(9,80)(40) = 10,42 \times 10^3$ m/s

Entonces:

$$v_o^2 = v_B^2 - 2g\,(BC) \Rightarrow BC = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{(10,42\times10^3)^2}{2\,(9,80)} \quad \therefore\ BC = 5,5\times10^6\ m$$

En consecuencia:

$$H_{máxima} = AB + BC = 4,32 \times 10^5 + 5,5 \times 10^6 = 5,932 \times 10^6\ m$$

Parte (b)
El tiempo de vuelo hasta que el cohete llega a tierra será:

$$T_{total} = 2\left[t_{AB} + t_{BC}\right]$$

Primeramente: tiempo de ida = $t_{AB} + t_{BC} = 40\ s + t_{BC}$

Sabemos que: $v_C = v_B - g.t_{BC}$

$$\Rightarrow\ t_{BC} = \frac{v_B}{g} = \frac{10,42\times10^3}{9,80} = 1\,063\ s$$

Luego: $T_{ida} = 1063 + 40 = 1103$ s

Por otro lado: tiempo de vuelta (suponemos que cae con una aceleración g = cte)

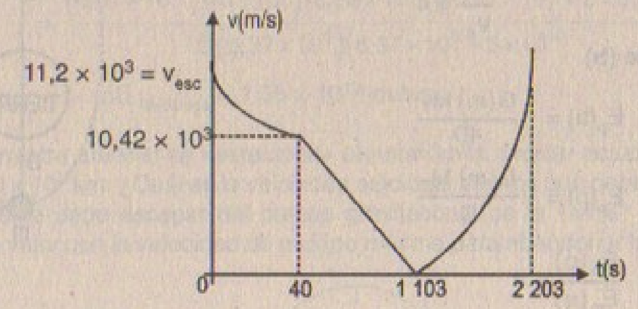
Entonces: tiempo de vuelta:

Sabemos que: $H_{máx} = \frac{1}{2}\,g t^2_{vuelta}$

$$\therefore\ t_{vuelta} = \sqrt{\frac{2H_{máx}}{g}} = 1\,100\ s$$

En consecuencia: Total = $T_{ida} + T_{vuelta} = 1\,103 + 1\,100 = 2\,203$ s

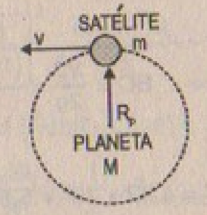
Parte (c)



33. Un satélite se mueve en una órbita circular justo encima de la superficie de un planeta. Demuestre que la velocidad orbital v y la velocidad de escape del satélite se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}\,v$

Resolución:

Sea:



Por demostrar:

$$v_{esc} = \sqrt{2}V$$

Sabemos que: $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_p}{R_p}} \quad ...(1)$$

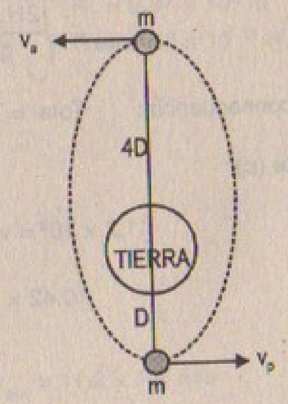
Por otro lado: $$\frac{m.v^2}{R_p} = \frac{G.m.M_p}{R_p^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G.M_p}{R_p}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{G.M_p}{R_p}} \quad ...(2)$$

(2) en (1) $$v_{esc} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{G.M_p}{R_p}} = \sqrt{2}.v \qquad \text{l.q.q.d.}$$

34. Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra de manera tal que, en las posiciones del perigeo y el apogeo, las distancias desde el centro de la Tierra son, respectivamente, D y 4D. Calcule las proporciones a) v_p/v_a y b) E_p/E_a.

Resolución:



Parte (a)

Por conservación del momento angular

$$m.v_p.D = m.v_a.4D$$

$$\therefore \quad \frac{v_p}{v_a} = 4$$

Parte (b)

$$E_p(a) = -\frac{G(m)M_T}{4D}$$

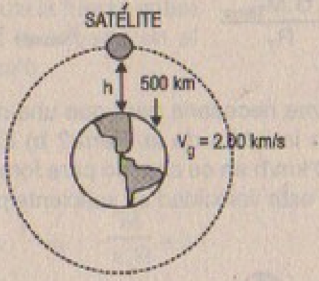
$$E_p(p) = -\frac{G(m)M_T}{D}$$

$$\therefore \quad \frac{E_p(p)}{E_p(a)} = 4$$

35. Un satélite de 500 kg se encuentra en una órbita circular a una altura de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, con el tiempo el satélite cae a la superficie de la Tierra y la golpea con una velocidad de 2,00 km/s. ¿Cuánta energía fue absorbida por la atmósfera por la fricción?

35A. Un satélite de masa m se encuentra en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, con el tiempo el satélite cae a la superficie de la Tierra y la golpea con una velocidad v. ¿Cuánta energía fue absorbida por la atmósfera por la fricción?

Resolución:



$M_{satélite} = 5 \times 10^2$ kg
$M_{Tierra} = 5,98 \times 10^{24}$ kg
$R_{Tierra} = 6,37 \times 10^6$ m
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

$$E_{M\,inicial} \Rightarrow \frac{M_S \cdot v_i^2}{R_T + h} = \frac{G.M_S.M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v_i^2 = \frac{G.M_T}{(R_T+h)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{mecánica\ inicial} = \frac{G.M_S.M_T}{2(R_T+h)} - \frac{G.M_S.M_T}{(R_T+h)}$$

$$E_{mecánica\ final} = \frac{1}{2}M_S \cdot v_g^2 - \frac{G.M_S.M_T}{R_T}$$

Luego: $E_{M.\ inicial} - E_{M.\ final}$ = Energía absorbida por la fricción

Reemplazando:

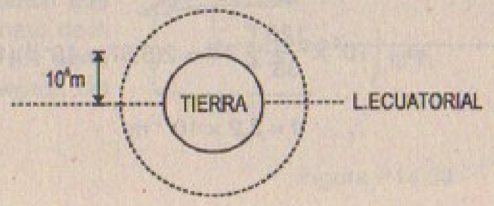
$$\Delta E_{mecánica} = \frac{G.M_S.M_T\,(R_T+2h)}{2R_T\,(R_T+h)} - \frac{1}{2}M_S.v_g^2$$

$$= \frac{(6,67\times10^{-11})(5\times10^2)(5,98\times10^{24})(6,37\times10^6+2\times5\times10^5)}{2\,(6,37\times10^6)(6,37\times10^6+5\times10^5)}$$

$$\therefore \quad \Delta E_{Mecánica} = 1,58 \times 10^{10} \text{ joules}$$

36. Un satélite terrestre artificial se «estaciona» en una órbita circular ecuatorial a una altitud de 1,00 × 10³ km. ¿Cuál es la velocidad adicional mínima que debe impartirse al satélite si éste debe escapar del campo gravitaconal de la Tierra? ¿Cómo se compara este valor con la velocidad de escape mínima para abandonar la superficie terrestre?

Resolución:



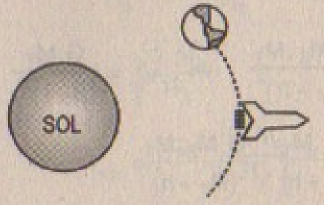
$$v_{mín} = \frac{\sqrt{2.G.M_{Tierra}}}{10^6}$$

$$\Rightarrow \quad v_{mín} = \sqrt{\frac{2\times 6{,}67\times 10^{-11}\,.\left(5{,}38\times 10^{24}\right)}{10^{6}}} \qquad \therefore \quad v_{mín} = 28{,}2 \times 10^{3} \text{ m/s}$$

$$\therefore \quad v_{escape} = \sqrt{\frac{2.G.M_{Tierra}}{R_T}} \qquad \therefore \quad v_{escape} = 11{,}2 \times 10^{3} \text{ m/s}$$

37. a) ¿Cuál es la velocidad mínima necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, empezando en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* alcanzó una velocidad máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol esta velocidad es suficiente para escapar del Sistema Solar?

Resolución :



$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

Distancia de la Tierra al Sol = $1{,}496 \times 10^{11}$ m

Entonces v_{esc} (relativa al Sol será)

Por fórmula: $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M_{Sol}}{d}}$$

$$\Rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67\times 10^{-11}\right)\left(1{,}991\times 10^{30}\right)}{1{,}496\times 10^{11}}}$$

$$\therefore \quad v_{esc} = 4{,}2 \times 10^{4} \text{ m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $$v_{esc} = \sqrt{\frac{2.G.M}{d}}$$

Entonces $$\sqrt{\frac{2\left(6{,}67\times 10^{-11}\right)\left(1{,}991\times 10^{30}\right)}{d}} = \frac{125\times 10^{6}}{3\ 600}$$

$$\Rightarrow \quad \left(10^{4}\times\frac{125}{36}\right)^{2} \times d = 2(6{,}67 \times 10^{-11})(1{,}991 \times 10^{30})$$

$$\therefore \quad d = 2{,}2 \times 10^{11} \text{ m}$$

LA FUERZA GRAVITACIONAL ENTRE UN OBJETO EXTENDIDO Y UNA PARTÍCULA

38. Una barra uniforme de masa M tiene la forma de un semicírculo de radio R (Fig. P14.38). Calcule la fuerza sobre una masa puntual m situada en el centro del semicírculo.

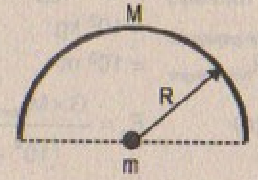
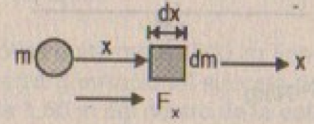


Figura P14.38

Resolución :

$$L = \pi.R \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{\pi.R} = \lambda$$



$$dm = \frac{M}{\pi R}\,.\,dx$$

Entonces: $$F_g = G.m\int\frac{dm}{x^2} = G.m\int_{-R}^{R}\frac{M}{\pi.R}\,dx.\,\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_g = -\frac{G.m.M}{\pi.R}\,.\,\frac{1}{x}\Big|_{-R}^{R} \qquad \therefore \quad F_g = \frac{2G.mM}{\pi.R^2}\,.\,\hat{r}$$

39. Una nave espacial en forma de un largo cilindro tiene una longitud de 100 m y su masa con pasajeros es de 1 000 kg. Se extravió y se acercó demasiado a un hoyo negro de 1,0 km de radio y una masa igual a 100 veces la del Sol (Fig. P14.39). Si la nariz de la nave apunta hacia el centro del hoyo negro y si la distancia entre la nariz y el centro del hoyo es de 10 km, a) determine la aceleración promedio total de la nave espacial. b) ¿Cuál es la diferencia en la aceleración que sienten los pasajeros en la nariz de la nave y la que se siente en la parte posterior, que está más alejada del hoyo negro?

39A. Una nave espacial en forma de un largo cilindro tiene una longitud ℓ y su masa con pasajeros es m. Se extravió y se acercó demasiado a un hoyo negro de radio R y masa M. Si la nariz de la nave apunta hacia el centro del hoyo negro, y si la distancia entre la nariz y el centro del hoyo es d, a) determine la aceleración promedio total de la nave espacial. b) ¿Cuál es la diferencia en la aceleración que sienten los pasajeros en la nariz de la nave y la que se siente en la parte posterior, que está más alejada del hoyo negro?

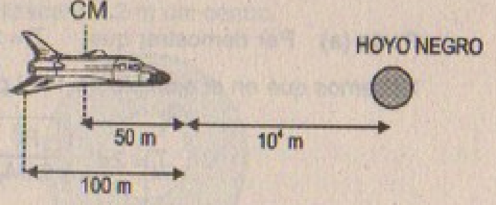


Figura P14.39

Resolución:

$M_{hoyo\ negro} = 10^2\ M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{32}$ kg

$M_{nave\ con\ pasajeros} = 10^3$ kg

$R_{hoyo\ negro} = 10^3$ m

Parte (a) $F_g = \dfrac{G \times M_{nave} \cdot M_{hoyo}}{(10^4 + 50)^2} = M_{nave} \cdot g_{prom}$

$$\Rightarrow \quad g_{prom} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times(1{,}991\times10^{32})}{(1{,}005\times10^4)^2} \quad \therefore \quad g_{prom} = 1{,}31 \times 10^{14}\ \text{N/kg}$$

Parte (b) $g_{nariz} = \dfrac{M_{hoyo} \cdot G}{(10^4)^2} = \dfrac{(1{,}991\times10^{32})(6{,}67\times10^{-11})}{10^8}$

$$\therefore \quad g_{nariz} = 1{,}328 \times 10^{14}\ \text{N/kg}$$

$$g_{posterior} = \frac{M_{hoyo} \cdot G}{(1{,}01\times10^4)^2} = \frac{(1{,}991\times10^{32})(6{,}67\times10^{-11})}{(1{,}01)^2\times10^8}$$

$$\therefore \quad g_{posterior} = 1{,}30 \times 10^{14}\ \text{N/kg}$$

$$\therefore \quad g_{nariz} - g_{posterior} = 2{,}62 \times 10^{12}\ \text{N/kg}$$

FUERZA GRAVITACIONAL ENTRE UNA PARTÍCULA Y UNA MASA ESFÉRICA

40. a) Demuestre que el periodo calculado en el ejemplo 14.11 puede escribirse como $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$ donde g es la aceleración en caída libre. b) ¿Cuál sería este periodo si se construyera un túnel a través de la Luna? c) ¿Qué problemas prácticos relacionados con estos túneles en la Tierra se eliminarían si se construyeran en la Luna?

Resolución:

Parte (a) Por demostrar que: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$

Sabemos que en el ejemplo 14.11 el periodo es:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_T^3}{G.M_T}} \ \dots (1)$$

Por otro lado: $F_g = M_p \cdot g = \dfrac{G.M_p.M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = \dfrac{G.M_T}{R_T^2}$

Luego: $\dfrac{1}{g} = \dfrac{R_T^2}{G.M_T}$

Reemplazando (2) en (1):

Resulta que: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_T}{g}}$ l.q.q.d.

Parte (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_{Luna}}{g_{Luna}}}$

Parte (c)

Como la gravedad en la Luna es menor que en la Tierra, las construcciones, el material humano, materia prima, serían más ligeras, y se acabarían las construcciones mucho más rápido.

41. Una esfera sólida uniforme de 500 kg tiene un radio de 0,400 m. Encuentre la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la esfera sobre una partícula de 50,0 g localizada a) a 1,50 m del centro de la esfera, b) en la superficie de la esfera, y c) a 0,200 m del centro de la esfera.

Resolución:

Parte (a) $F_g = \dfrac{G\times m\times M}{(1{,}5)^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times(5\times10^{-2})(5\times10^{2})}{(1{,}5)^2} \quad \therefore \quad F_g = 7{,}41\times10^{-10}\ \text{N}$$

Parte (b)

En la superficie de la esfera: $F_g = \dfrac{G.m.M}{R^2}$

$$\Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67\times10^{-11}(5\times10^{-2})(5\times10^{2})}{(4\times10^{-1})^2} \quad \therefore \quad F_g = 1{,}04\times10^{-8}\ \text{N}$$

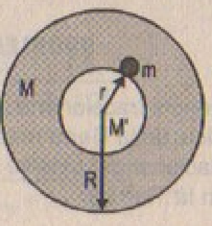
Parte (c)

Para una partícula de: 5×10^{-2} kg localizada a 0,2 m del centro.

Datos: $M_{est.} = 5\times10^2$ kg

$R_{est.} = 0{,}400$ m

$F_g = \dfrac{G.m.M'}{r^2}$



Por otro lado: $\dfrac{M'}{V'} = \dfrac{M}{V} \Rightarrow M' = M \cdot \dfrac{4/3\pi r^3}{4/3\pi R^3}$

Luego: $F_g = \dfrac{G.m}{r^2}\left(M \times \dfrac{r^3}{R^3}\right) = G \times \dfrac{m.M}{R^3} \times r$

Reemplazando: $F_g = \dfrac{6{,}67 \times 10^{-11}(5 \times 10^{-2})(5 \times 10^{2})(2 \times 10^{-1})}{(4 \times 10^{-1})^3}$

$\therefore \quad F_g = 5{,}2 \times 10^{-9}$ N

42. Una esfera sólida uniforme de masa m_1 y radio R_1 se encuentra en el interior y concéntrica con un cascarón esférico de masa m_2 y radio R_2 (Fig. P14.42). Calcule la fuerza gravitacional ejercida por la esfera sobre una partícula de masa m ubicada en a) r = a, b) r = b, c) r = c, donde r se mide desde el centro de las esferas.

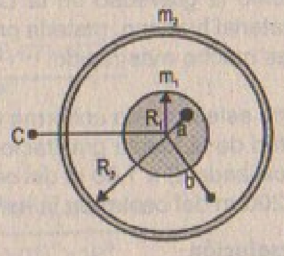


Figura P14.42

Resolución : 42

Parte (a)

Para r = a Para una partícula de masa = m

$$F_g = \frac{G.m.m_1}{R_1^3} \cdot a \quad ; \quad \text{ya que: } a \le R_1$$

Parte (b)

Para r = b para una partícula de masa: m

$$F_g = \frac{G.m_1.m}{b^2} \quad ; \quad \text{ya que: } b \ge R_1$$

Parte (c)

Para r = c Para una partícula de masa: m

$$F_g = \frac{G.m.m_2}{c^2} \quad ; \quad \text{ya que } c \ge R_2$$

PROBLEMAS ADICIONALES

43. Calcule la diferencia fraccionaria $\Delta g/g$ en la aceleración en caída libre en los puntos sobre la superficie de la Tierra más cercano y más lejano de la Luna; tome en cuenta el efecto gravitacional del satélite terrestre. (Esta diferencia es la causa de las *mareas lunares* en la Tierra.)

Resolución :

$g_{lejano} = \dfrac{G \cdot M_T}{(d - R_T)^2}$ donde d = 3,84 × 10⁸ m

$\Rightarrow \quad g_{lejano} = \dfrac{(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}98 \times 10^{24})}{(3{,}84 \times 10^8 - 6{,}37 \times 10^6)^2} \quad \therefore \quad g_{lejano} = 2{,}797 \times 10^{-3}\ m/s^2$

$g_{cercano} = \dfrac{G \cdot M_T}{[d - (R_T + R_L)]^2}$

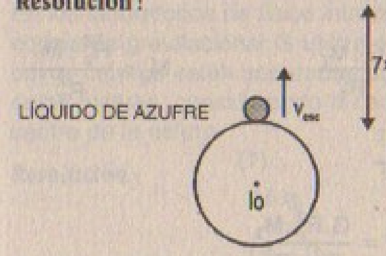
$\Rightarrow \quad g_{cercano} = \dfrac{(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}98 \times 10^{24})}{(3{,}84 \times 10^8 - [6{,}37 \times 10^6 + 1{,}74 \times 10^6])^2} \quad \therefore \quad g_{cercano} = 2{,}823 \times 10^{-3}\ m/s^2$

Entonces: $\Delta g = g_{cercano} - g_{lejano} = 0{,}02596 \times 10^{-3}\ m/s^2$

Por lo tanto: $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{0{,}02596 \times 10^{-3}}{\dfrac{(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}98 \times 10^{24})}{(6{,}37 \times 10^6)^2}} \quad \therefore \quad \dfrac{\Delta g}{g} = 2{,}26 \times 10^{-7}$

44. Los *voyagers* 1 y 2 estudiaron la superficie de I_o, la luna de Júpiter, y fotografiaron volcanes activos que arrojaban azufre líquido a alturas de 70 km sobre la superficie de esta luna joviana. Estime la velocidad con la cual el azufre líquido sale del volcán. La masa de I_o es de 8,9 × 10²² kg y su radio es igual a 1820 km.

Resolución :



$M_{Io} = 8{,}9 \times 10^{22}$ kg

$R_{Io} = 1{,}82 \times 10^4$ m

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - \frac{m \cdot M_{Io} \cdot G}{R_{Io}} = 0 - \frac{G \cdot m \cdot M_{Io}}{R_{Io} + 7 \times 10^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{esc}^2}{2} = M_{Io} \cdot G \left[\frac{1}{R_{Io}} - \frac{1}{R_{Io} + 7 \times 10^4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad v_{esc}^2 = \frac{2\times G\times M_{lo}\left(7\times10^4\right)}{R_{lo}\left(R_{lo}+7\times10^4\right)}$$

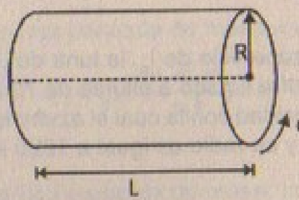
Reemplazando: $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2\times\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(8{,}9\times10^{22}\right)\left(7\times10^4\right)}{182\times10^4\left(189\times10^4\right)}}$

$$\therefore \quad v_{escape} = 491{,}5 \text{ m/s}$$

45. Se ha propuesto (por G.K. O'Neill, 1974) un hábitat cilíndrico en el espacio de 6 km de diámetro y 30 km de largo. Dicho hábitat tendría ciudades, tierras y lagos sobre la superficie interna y aire y nubes en el centro. Todo esto podría mantenerse en su sitio mediante la rotación del cilindro en torno de su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

45A. Se ha propuesto (por G. K. O'Neill, 1974) un hábitat cilíndrico en el espacio de diámetro d y longitud L. Dicho hábitat tendría ciudades, tierras y lagos sobre la superifice interna, y aire y nubes en el centro. Todo esto podría mantenerse en su sitio mediante la rotación del cilindro en torno de su eje largo. ¿Qué tan rápido tendría que girar el cilindro para imitar el campo gravitacional de la Tierra en las paredes del cilindro?

Resolución:



$2R = 6{,}0$ km

$L = 30{,}0$ km

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

Por condición: $g_c = g_{Tierra} \Rightarrow \dfrac{G.M_c}{R_c^2} = \dfrac{G.M_T}{R_T^2} \quad \therefore \quad M_c = \dfrac{R_c^2 . M_T}{R_T^2}$

Por otro lado: $\omega_c = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_c^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ ... (1)

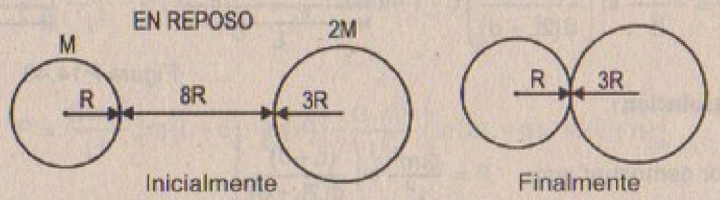
Además: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_c}.R_c^3 \Rightarrow \omega_c^2 = \dfrac{G.R_c^2.M_T}{R_T^2.R_c^3}$

En consecuencia: $\omega = \dfrac{1}{R_T}.\sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_c}}$

Reemplazando: $\omega = \dfrac{1}{6{,}37\times10^6}.\sqrt{\dfrac{\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\left(5{,}98\times10^{24}\right)}{3\times10^3}} = 0{,}0572$ rad/s

46. Dos esferas que tienen masas M y 2M y radios R y 3R, respectivamente, se liberan a partir del reposo cuando la distancia entre sus centros es 12R. ¿Qué tan rápido se estará moviendo cada esfera en el momento de chocar? Suponga que las dos esferas sólo interactúan entre ellas.

Resolución:



Por conservación del momento:

$$P_{inicial} = P_{final}$$

$\Rightarrow \quad 0 = M.v_1 - 2M\,v_2 \qquad \Rightarrow \quad M.v_1 = 2Mv_2 \qquad \therefore \quad v_1 = 2v_2$

Por conservación de energía: $E_{M.\,inicial} = E_{M.\,final}$

$$-\frac{G(M)(2M)}{12R} = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}(2M)v_2^2 - \frac{G(M)(2M)}{4R} \qquad \therefore \; v_2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{MG}{R}}$$

Tomando la esfera (2) como una partícula que es atraída por la esfera (1).

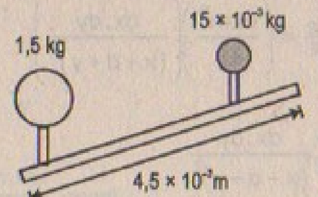
Entonces: $E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{G(M)(2M)}{12R} = \frac{1}{2}(2M)v^2 - \frac{G(M)(2M)}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \quad v_{esfera\,2} = \sqrt{GM/3R}$$

47. En los laboratorios de física introductoria, una balanza de Cavendish para medir la constante gravitacional G utiliza esferas de plomo de 1,50 kg y 15 g de masa, y cuyos centros están separados por 4,50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre estas esferas, considerando a cada una como una masa puntual localizada en el centro de la esfera.

Resolución:



$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$$F_g = \frac{G.M.m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_g = \frac{6{,}67\times10^{-11}(1{,}5)\left(1{,}5\times10^{-3}\right)}{\left(4{,}5\times10^{-2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad F_g = 7{,}41\times10^{-10}\text{ N}$$

48. Considere dos barras uniformes idénticas de longitud L y masa m que se encuentran a lo largo de la misma línea y tiene sus puntos de mayor proximidad separados por una distancia d(Fig. P14.48). Demuestre que la fuerza gravitacional mutua entre estas barras tiene una magnitud.

$$F = \frac{Gm^2}{L^2}\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)$$

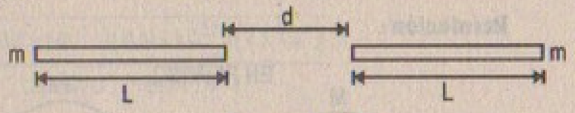
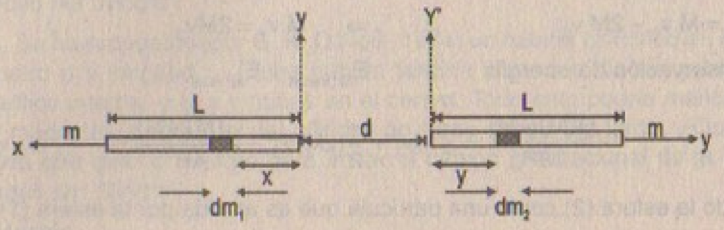


Figura P14.48

Resolución :

Por demostrar que: $F = \frac{Gm^2}{L^2}\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)$

Dada la figura:



Se sabe que: $\frac{m}{L} = \lambda$

$$\Rightarrow \quad dm_1 = \lambda.d_L = \lambda dx = \left(\frac{m}{L}\right).dx$$

Además $\quad dm_2 = \lambda.d_L = \lambda dy = \left(\frac{m}{L}\right).dy$

Entonces:

$$d_F = \frac{G.dm_1.dm_2}{(x+d+y)^2} = \left(\frac{G.m^2}{L^2}\right)\left(\frac{dx.dy}{(x+d+y)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\int_0^L \frac{dx.dy}{(x+d+y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\left[-\frac{1}{(x+y+d)}\Bigg|_0^L\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\int_0^L\left(\frac{1}{x+d}\right)dx - \frac{G.m^2}{L^2}\int_0^L\left(\frac{1}{x+l+d}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(x+d)\Big|_0^{\ell} - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(x+\ell+d)\Big|_0^{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\left[\ln(L+d)-\ln(d)\right] - \frac{G.m^2}{L^2}.\left[\ln(2L+d)-\ln(L+d)\right]$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(L+d) - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(d) - \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(2L+d) + \frac{G.m^2}{L^2}.\ln(L+d)$$

Aplicando propiedad de logaritmos resulta que:

$$F = \frac{G.m^2}{L^2}.\ln\left[\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right] \qquad \text{l.q.q.d.}$$

49. Un objeto de masa m se mueve en un túnel recto y liso de longitud L excavado a través de la cuerda de un arco de la Tierra, como en el ejemplo 14.11 (Fig. 14.20). a) Determine la fuerza constante efectiva del movimiento armónico y la amplitud del movimiento. b) Utilizando consideraciones de energía encuentre la velocidad máxima del objeto. ¿Dónde ocurre la velocidad máxima? c) Obtenga un valor numérico para la velocidad máxima si L = 2 500 km.

Resolución :

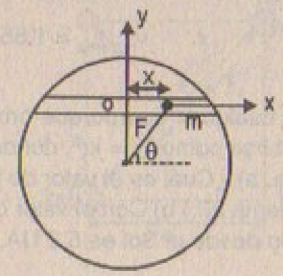
Parte (a)

Sabemos que:

$$F_g = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.y$$

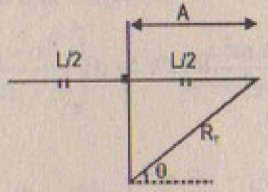
$$\Rightarrow \quad F_g = F_x = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.r\cos\theta$$

$$\therefore \quad F_x = -\frac{G.m.M_T}{R_T^3}.x = -kx$$



Entonces: $k = \dfrac{G.m.M_{Tierra}}{R^3_{Tierra}}$

Por Geometría:



$\therefore \quad A = \dfrac{L}{2}$

Parte (b)

Por M.A.S. $\quad -\dfrac{G.m.M_T}{R_T^3}\,.\,x = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{G.M_T}{R_T^3}\,x = 0 \text{ (ecuación diferencial)}$$

Luego la ecuación general es: $x(t) = \dfrac{L}{2}\cos\left[\sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_T^3}}\,.\,t+\phi\right]$

Por energía: $\quad \dfrac{1}{2}k\,(A)^2 = \dfrac{1}{2}m.\,v^2_{máx}$

$$\therefore \quad v_{máx} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{G.M_T}{R_T^3}}$$

La velocidad máxima ocurre en la mitad del túnel.

Parte (c) Si $L = 2{,}5\times10^6$ m ; $\quad G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

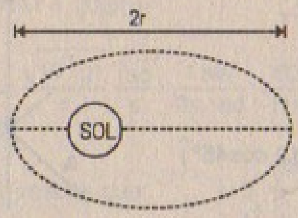
$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg; $\;R_{Tierra} = 6{,}37\times10^6$ m

Entonces: $\quad v_{máxima} = \dfrac{2{,}5\times10^6}{2}\left(\sqrt{\dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(6{,}37\times10^6)^3}}\right)$

$$\therefore \quad v_{máxima} = 1{,}55\times10^3 \text{ m/s}$$

50. Para cualquier cuerpo que orbita alrededor del Sol, la tercera ley de Kepler puede escribirse como $T^2 = kr^3$, donde T es el periodo orbital y r es el eje semimayor de la órbita. a) ¿Cuál es el valor de k si T se mide en años y r se mide en UA? (Véase el problema 20.) b) Con el valor de k encuentre el periodo orbital de Júpiter si su radio medio desde el Sol es 5,2 UA.

Resolución :



$M_{Sol} = 1{,}991\times10^{30}$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

T = x años $\quad\Rightarrow\quad T = x\times3{,}15\times10^7$ s

r = y UA $\quad\Rightarrow\quad r = y\times1{,}5\times10^9$ m

$\Rightarrow$ Como $T^2 = kr^3 \quad \therefore \quad k = T^2/r^3$

Luego: $\quad k = \dfrac{4\pi^2}{G.\,M_{Sol}}\times\dfrac{(1{,}5\times10^9)^3}{(3{,}15\times10^7)^2} \quad \therefore \quad k = 1{,}01\times10^{-6}$ s²/m³

Parte (b)

Sabemos que 1 UA = $1{,}5\times10^9$ m $\quad\wedge\quad$ r = 5,2 UA

Entonces por la tercera ley de Kepler: $T^2 = kr^3$

Como: $\quad k = 1{,}01\times10^{-6}$

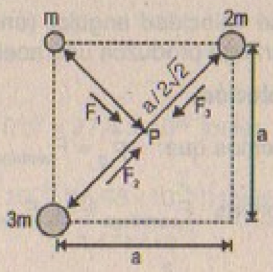
$$\Rightarrow \quad T = r\sqrt{kr}$$

Reemplazando: $T = 5{,}2\times(1{,}5\times10^9)\,\sqrt{(1{,}01\times10^{-6})(5{,}2)(1{,}5\times10^9)}$

$$\therefore \quad T = 6{,}9\times10^{11} \text{ s}$$

51. Tres objetos puntuales que tienen masas m, 2m y 3m están fijos en las esquinas de un cuadrado de longitud de lado a de modo tal que el objeto más ligero se ubica en la esquina superior izquierda, el objeto más pesado está en la esquina inferior izquierda y el tercero, en la esquina superior derecha. Determine la magnitud y dirección del campo gravitacional resultante en el centro del cuadrado.

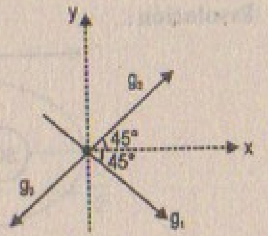
Resolución :



$$g_1 = \frac{m.G}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad g_1 = -\frac{2m.G}{a^2}\hat{r}$$

$$g_2 = \frac{G.\,3m}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad g_2 = -\frac{6m.G}{a^2}\hat{r}$$

$$g_3 = \frac{G\,.\,2m}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad g_3 = -\frac{4m.G}{a^2}\hat{r}$$



Entonces: $\vec{g}_{Rx} = (g_2 + g_1 - g_3)\cos 45°\,\hat{i}$

$$\Rightarrow \quad \vec{g}_{Rx} = \frac{2m\,.\,G\sqrt{2}}{a^2}\,(-\hat{i})$$

$$\vec{g}_{Ry} = (g_2 - g_1 - g_3)\cos 45°\,\hat{j} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{g}_{resultante} = \frac{2m\,.\,G\sqrt{2}}{a^2}\,(-\hat{i})$$

52. Un avión en un amplio rizo «exterior» puede crear un peso igual a cero en el interior de su cabina. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de la trayectoria de vuelo de un avión que se mueve a 480 km/h para crear una condición de ausencia de peso en su interior?

Resolución:

Datos: $v_{avión} = 133{,}3$ m/s

Por condición: $N - F_g = 0$

$$\Rightarrow \quad M_{avión}\cdot\frac{v^2}{R+R_T} = \frac{G.M_{avión}.M_T}{(R+R_T)^2} \quad \Rightarrow \quad R + R_T = \frac{G\,.\,M_T}{v^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{G\,.\,M_T}{v^2} - R_T$$

Reemplazando: $$R = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(400/3)^2} - 6{,}37\times10^6$$

$$\therefore \quad R = 2{,}24\times10^{10}\ \text{m}$$

53. ¿Qué velocidad angular (en revoluciones por minuto) se necesita para que una centrífuga produzca una aceleración de 1 000 g en un radio de 10,0 cm?

Resolución:

Sabemos que: $\vec{F}_g = F_{centrípeta}$

Entonces $F_{centrífuga} = -(-F_{centrípeta}) = m.a_{centríf.} = m\frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{r} = 10^3 g \ \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \omega.r = \sqrt{10^3 gr}$$

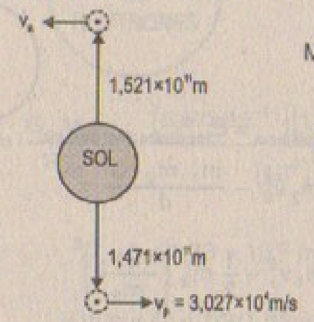
$$\therefore \quad \omega = \frac{\sqrt{10^3\,gr}}{r}\,\frac{rad}{s}\times\frac{1\ rev}{2\pi\ rad}\times\frac{60\ s}{1\ min}$$

Reemplazando resulta que: $$\omega = \frac{\sqrt{10^3\,(9{,}8)(0{,}1)}}{(0{,}1)}\times\frac{60}{2\,(3{,}1416)}$$

$$\therefore \quad \omega = 2{,}99\times10^3\ \frac{rev}{min}$$

54. La distancia Tierra-Sol es de $1{,}521\times10^{11}$ m en el afelio y de $1{,}471\times10^{11}$ m en el perihelio. Si la velocidad orbital de la Tierra en el perihelio es $3{,}027\times10^4$ m/s, determine a) su velocidad orbital en el afelio, b) la energía cinética y potencial en el perihelio, y c) la energía cinética y potencial en el afelio. ¿La energía total es constante? (Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.)

Resolución:



$M_{Tierra} = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

$M_{Sol} = 1{,}991\times10^{30}$ kg

Parte (a)

Por conservación del momento angular

$$L_{afelio} = L_{perihelio}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}521\times10^{11}\,(M_{Tierra})\,.\,v_{afelio} = 1{,}471\times10^{11}\,(M_{Tierra}).v_p$$

$$\therefore \quad v_{afelio\ Tierra} = \frac{1{,}471\times10^{11}}{1{,}521\times10^{11}}\,.\,(3{,}027\times10^4) = 2{,}93\times10^4\ \text{m/s}$$

Parte (b) $E_{K\,perihelio} = \frac{1}{2}M_{Tierra}\cdot v_p^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,perihelio} = \frac{1}{2}(5{,}98\times10^{24})(3{,}027\times10^4)^2 = 27{,}4\times10^{32}\ \text{joules}$$

$$E_{potencial} = \frac{-G\,.\,M_T\,.\,M_{Sol}}{r_p} = -\frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})(1{,}991\times10^{30})}{1{,}471\times10^{11}}$$

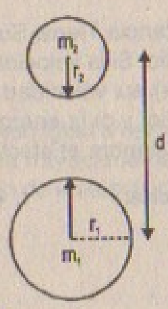
$$\therefore \quad E_{p\,perihelio} = |-54\times10^{32}\ \text{joules}|$$

Parte (c)

Como la energía mecánica en el perihelio es igual a la energía mecánica en el afelio e igual a $-26{,}5 \times 10^{32}$ joules entonces es constante.

55. Dos planetas hipotéticos de masa m_1 y m_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente, están en reposo cuando están apartados por una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se mueven uno hacia otro en el curso de una colisión. a) Cuando su separación centro a centro es d, encuentre la velocidad de cada planeta y su velocidad relativa. b) Encuentre la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen si $m_1 = 2{,}0 \times 10^{24}$ kg, $m_2 = 8{,}0 \times 10^{24}$ kg, $r_1 = 3{,}0 \times 10^6$ m y $r_2 = 5{,}0 \times 10^6$ m. (Sugerencia: Tanto la energía como el momento se conservan.)

Resolución:



Parte (a)

Por conservación del momento lineal:

$$\vec{P}_{\text{inicial sistema}} = \vec{P}_{\text{final sistema}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

$$\therefore \quad m_1 v_1 = m_2 v_2 \qquad \dots (1)$$

Por otro lado: $\quad E_{\text{mecánica inicial sistema}} = E_{\text{mecánica final sistema}}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{m_1 . m_2 . G}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 . m_2 . G}{d} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1 v_1}{m_2}\right]^2$$

$$\therefore \quad v_1 = m_2 \left[\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}\right]^{1/2}$$

Luego de (1) $\quad v_2 = m_1 \left[\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}\right]^{1/2}$

Por lo tanto la velocidad relativa será:

$$v_{2/1} = v_1 + v_2 = \left[\frac{2G\,(m_1 + m_2)}{d}\right]^{1/2}$$

Parte (b)

$$E_{K(m1)} = \frac{1}{2}(m_1)v_1^{\,2} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\times10^{24})(8\times10^{24})^2(2)(6{,}67\times10^{-11})}{(5{,}0\times10^{6})(10^{25})}$$

$$\therefore \quad E_{K(m1)} = 1{,}07 \times 10^{32} \text{ joules}$$

$$E_{K(m1)} = \frac{1}{2}(m_1)\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(8\times10^{24})(2\times10^{24})^2(2)(6{,}67\times10^{-11})}{(5{,}0\times10^{6})(10^{25})}$$

$$\therefore \quad E_{K(m2)} = 2{,}67 \times 10^{31} \text{ joules}$$

56. Después de una explosión supernova, una estrella puede experimentar un colapso gravitacional hasta alcanzar un estado extremadamente denso conocido como una estrella de neutrones, en el cual todos los electrones y protones se comprimen para formar neutrones. Una estrella de neutrones que tiene una masa aproximada o igual a la del Sol tendría un radio de casi 10 km. Encuentre a) la aceleración de caída libre en su superficie, b) el peso de una persona de 70 kg en su superficie, y c) la energía requerida para llevar un neutrón de $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg de masa desde su superficie hasta el infinito.

Resolución:

$M_{\text{est neut.}} = M_{\text{Sol}} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg

$R_{\text{estrella}} = 10^4$ m

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a) $\quad g = \dfrac{G \,.\, M_{\text{est}}}{R_{\text{est}}^2} = \dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(1{,}991\times10^{30})}{(10^4)^2}$

$$\therefore \quad g = 1{,}33 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

Parte (b) $\quad w_{\text{persona}} = m.g = (7 \times 10)(1{,}33 \times 10^{12})$

$$\therefore \quad w_{\text{persona}} = 9{,}3 \times 10^{13} \text{ N}$$

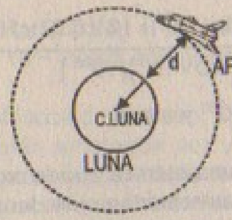
Parte (c) $\quad$ Masa del neutrón $= 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$$E_{\text{total}} = \frac{-G\,M_N \,.\, M_{\text{est}}}{2\,R_{\text{est}}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}(1{,}67\times10^{-27})(1{,}991\times10^{30})}{2\,(10^4)}$$

$$\therefore \quad E_{\text{total}} = -11{,}09 \times 10^{-12} \text{ joules}$$

57. En el momento de orbitar la Luna, la nave espacial *Apolo 11* tenía una masa de $9{,}979 \times 10^3$ kg, su periodo era de 119 min y su distancia media desde el centro de la Luna era de $1{,}849 \times 10^6$ m. Suponga que su órbita era circular y considere a la Luna como una esfera uniforme, calcule a) la masa de la Luna, b) la velocidad orbital de la nave, y c) la energía mínima necesaria para que la nave abandone la órbita y escape del campo gravitacional lunar.

Resolución :



d = 1,849 × 10⁶ m → $d = 1{,}849 \times 10^6$ m

$t = 119$ min

$M_{nave\ apolo} = 9{,}979 \times 10^3$ kg

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_{Luna}} \cdot d^3 \Rightarrow M_{Luna} = \dfrac{4\pi^2 . d^3}{G . T^2}$

Reemplazando: $M_{Luna} = \dfrac{4\pi^2 \times (1{,}849 \times 10^6)^3}{(6{,}67 \times 10^{-11})(119 \times 60)^2}$

$\therefore \quad M_{Luna} = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg

Parte (b) $v_{nave} = \dfrac{2\pi . d}{T}$

$\Rightarrow \quad v_{nave} = \dfrac{2\,(3{,}1416)(1{,}849 \times 10^6)}{7\,140} \qquad \therefore\ v_{nave} = 1{,}63 \times 10^3$ m/s

Parte (c) $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2 . G\, M_{Luna}}{R_{Luna\ (orbital)}}}$

$\Rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2 \times (6{,}67 \times 10^{-11})(7{,}34 \times 10^{22})}{1{,}849 \times 10^6}}$

$\therefore \quad v_{esc} = 23 \times 10^2$ m/s

Luego:
La energía mínima necesaria será:

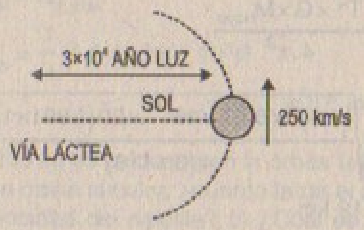
$E_{mínima} = -\dfrac{G . M_{nave} . M_{Luna}}{2d}$

$\Rightarrow \quad E_{mínima} = -\dfrac{(6{,}67 \times 10^{-11})(9{,}979 \times 10^3)(7{,}34 \times 10^{22})}{2 \times (1{,}849 \times 10^6)}$

$\therefore \quad |E_{mínima}| = 1{,}32 \times 10^{10}$ joules

58. Los estudios de la relación del Sol con su galaxia –la Vía Láctea– han revelado que nuestra estrella se localiza cerca del borde exterior del disco galáctico, aproximadamente a 30 000 años luz del centro. También, se han encontrado que el Sol tiene una velocidad orbital de casi 250 km/s alrededor del centro galáctico. a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? b) ¿Cuál es la masa aproximada de la Vía Láctea? A partir del hecho de que el Sol es una estrella ordinaria, calcule el número de estrellas en la Vía Láctea.

Resolución :



$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

Sabemos que: 1 año luz = $9{,}46 \times 10^{15}$ m

$\Rightarrow \quad v = \dfrac{2\pi . R}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi . R}{v}$

Luego: $T = \dfrac{2(3{,}1416)(28{,}38 \times 10^{19})}{25 \times 10^4} \qquad \therefore \quad T = 7{,}1 \times 10^{15}$ s

Parte (b)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G . M_{vía\ láctea}} \times d^3$

$\Rightarrow \quad M_{vía\ láctea} = \dfrac{4\pi^2}{G . T^2} \times d^3$

$\Rightarrow \quad M_{vía\ láctea} = \dfrac{4(3{,}1416)^2}{(6{,}67 \times 10^{-11})} \times \dfrac{1}{(7{,}1 \times 10^{15})^2} \times (28{,}38 \times 10^{19})^3$

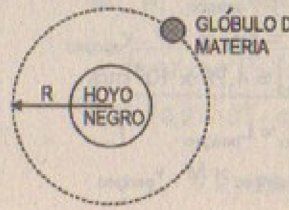
$\therefore \quad M_{vía\ láctea} = 2{,}68 \times 10^{41}$ kg

Parte (c)

Aparte del Sol, existen 9 estrellas de tipo planeta.

59. Durante vuelos de cohetes a gran altura se han registrado pulsos de rayos X desde Cisne X–1, una fuente celeste de rayos X, Puede interpretarse que las señales se originan cuando un glóbulo de materia ionizada orbita un hoyo negro con un periodo de 5,0 ms. Si el glóbulo estuviera en una órbita circular alrededor de un glóbulo estuviera en una órbita circular alrededor de un hoyo negro cuya masa es 20 M_{Sol}, ¿cuál es el radio de la órbita?

Resolución :



$M_{hoyo\ negro} = 20\ M_{Sol}$

$M_{Sol} = 1{,}991 \times 10^{30}$ kg

$T = 5{,}0$ ms

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_{hoyo}} \times R^3$

$$\Rightarrow \quad R^3 = \frac{T^2 \times G \times M_{hoyo}}{4.\pi^2}$$

Reemplazando: $R = \sqrt[3]{\dfrac{(5.0)^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 20(1{,}991 \times 10^{30})}{4(3{,}1416)^2}}$

$\therefore \quad R = 119 \text{ km}$

60. El *Vanguard I*, lanzado el 3 de marzo de 1958, es el satélite artificial más viejo aún en órbita. Su órbita inicial tenía un apogeo de 3 970 km y un perigeo de 650 km. Su velocidad máxima era de 8,23 km/s y tenía una masa de 1,60 kg. a) Determine el periodo de la órbita. (Utilice el eje semimayor.) b) Determine las velocidades en el apogeo y en el perigeo. c) Encuentre la energía total del satélite.

Resolución :

$d_{apogeo} = 3\ 970$ km
$d_{perigeo} = 650$ km
$v_{máx} = 8{,}23$ km/s
Masa = 1,60 kg

Parte (a) $\quad 2a = d_p + d_a = 3\ 970 + 650 = 462 \times 10^4$ m

$\therefore \quad a = 231 \times 10^4$ m

Luego: $\quad v = \dfrac{2\pi(a)}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi.(a)}{v}$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2(3{,}1416)(231 \times 10^4)}{8{,}23 \times 10^3} \quad \therefore \quad T = 1{,}76 \times 10^3 \text{ s}$$

Parte (b)

Por conservación del momento angular:

$$L_{máx} = L_{apogeo}$$

$\Rightarrow \quad (a) \times M.v_{máx} = d_{apogeo} \times M.v_{apogeo}$

$\Rightarrow \quad 231 \times 10^4 \times 8{,}23 \times 10^3 = 397 \times 10^4 \ .\ v_{apogeo}$

$\therefore \quad v_{apogeo} = 4{,}79 \times 10^3$ m/s

Luego: $\quad L_{apogeo} = L_{perigeo}$

$\Rightarrow \quad d_{apogeo} \times M \ .\ v_{apogeo} = d_{perigeo} \times M \ .\ v_{perigeo}$

$\Rightarrow \quad 397 \times 10^4 \times (4{,}79 \times 10^3) = 65 \times 10^4 \times v_{perigeo}$

$\therefore \quad v_{perigeo} = 29{,}25 \times 10^3$ m/s

Parte (c) $\quad E_{total} = E_{K\ máx}$

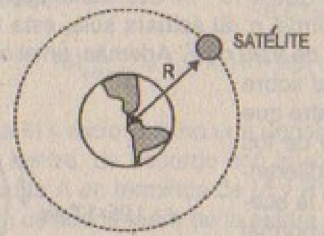
$\Rightarrow \quad E_{total} = \dfrac{1}{2}(1{,}6)(8{,}23 \times 10^3)^2$

$\therefore \quad E_{total} = 54{,}2 \times 10^6$ joules

61. Un satélite de 200 kg es colocado en la órbita terrestre a 200 km de la superficie. a) Suponiendo una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para poner en órbita este satélite (suponiendo que no hay fricción del aire)?

61A. Un satélite de masa m es colocado en la órbita terrestre a una altura h de la superficie. a) Suponiendo una órbita circular, ¿cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para poner en órbita este satélite (suponiendo que no hay fricción del aire)?

Resolución :



$M_{satélite} = 2 \times 10^2$ kg
$R \quad = 2 \times 10^5 \text{ m} + R_{Tierra}$
$M_{Tierra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
$G \quad = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N/m²
$R_{Tierra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

Parte (a)

Por la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G.M_{Tierra}} \times R^3$

$$\Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4(3{,}1416)^2 \times (2 \times 10^5 + 6{,}37 \times 10^6)^3}{(6{,}67 \times 10^{-11})(5{,}98 \times 10^{24})}} \quad \therefore \quad T = 5\ 298 \text{ s} \approx 5\ 300 \text{ s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad M_{sat} \cdot \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G.M_{sat} \cdot M_{Tierra}}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{G.M_{Tierra}}{R}}$

Reemplazando: $\quad v = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \times 10^{-11} \times (5{,}98 \times 10^{24})}{(0{,}2 \times 10^6 + 6{,}37 \times 10^6)}}$

$\therefore \quad v = 7{,}79$ km/s

Parte (c)

Energía requerida para poner en órbita será la energía mecánica final – energía mecánica inicial.

Entonces: $E_{\text{mecánica inicial}} = -\dfrac{G.M_s.M_T}{R_T}$ (mínima)

$$E_{\text{mecánica final}} = -\frac{G.M_s.M_T}{2(R_T+h)}$$

Entonces:

Energía requerida es:

$$\frac{G.M_s.M_T(R_T+2h)}{2R_T(R_T+h)} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(2\times10^{2})(5{,}98\times10^{24})\left[6{,}37\times10^{6}+4\times10^{5}\right]}{2(6{,}37\times10^{6})(6{,}37\times10^{6}+2\times10^{5})}$$

$$\therefore \quad E_{\text{requerida}} = 6{,}45\times10^{9} \text{ joules}$$

62. En la novela de ciencia ficción *Mundo anillo* (*Ringworld*) de Larry Niven, un anillo de materia gira alrededor de una estrella (Fig. P14.62). La velocidad rotacional del anillo es $1{,}25\times10^{6}$ m/s y su radio es $1{,}53\times10^{11}$ m. Los habitantes de este anillo experimentan una fuerza de contacto normal n. Si actuara sola, esta fuerza normal produciría una aceleración hacia adentro de 9,90 m/s². Además, en el centro del anillo la estrella ejerce una fuerza gravitacional sobre éste y sus habitantes. a) Muestre que la aceleración centrípeta total de los habitantes es 10,2 m/s². b) La diferencia entre la aceleración total y la aceleración brindada por la fuerza normal se debe a la atracción gravitacional de la estrella central. Compruebe que la masa de la estrella es aproximadamente igual a 10^{32} kg.

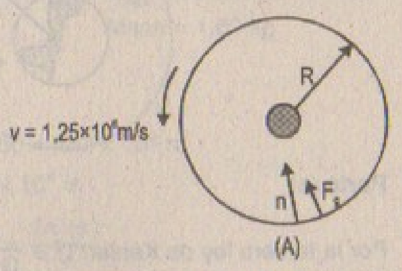


Figura P14.62

Resolución :

$R = 1{,}53\times10^{11}$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m²/kg²

Parte (a)

Por demostrar: $a_{\text{centrípeta hab}} = 10{,}2$ m/s²

Sabemos que: $F_g + n = m_{hab}\cdot a_{hab}$ en (A)

$\Rightarrow \quad m_{hab}\cdot a_{\text{centríp.hab}} = m_{hab}$

$\Rightarrow \quad a_{\text{cent. hab}} = (1{,}25\times10^{6})^2 / 1{,}53\times10^{11}$

$\therefore \quad a_{\text{cent.hab}} = 10{,}2$ m/s² l.q.q.d.

Parte (b)

Por demostrar que: $\dfrac{v^2}{R} - a_{\text{normal}} = a_{fg}$

Sabemos que: $n + F_g = m_{\text{total hab}}\cdot\dfrac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow \quad m_{hab}\,g + F_g = m_{\text{total hab}}\times\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore \quad a_f = \frac{v^2}{R} - g \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

Por demostrar que: $M_{\text{estrella}} = 10^{32}$ kg

De (b) sabemos que: $a_f = \dfrac{G.M_{\text{estrella}}}{R^2} = \dfrac{v^2}{R} - g$

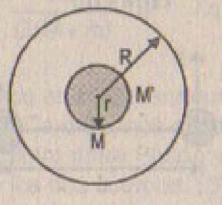
$$\Rightarrow \quad M_{\text{estrella}} = \frac{v^2R - gR^2}{G}$$

Reemplazando: $M_{\text{estrella}} = \dfrac{(1{,}25\times10^{6})^2(1{,}53\times10^{11}) - (9{,}90)(1{,}53\times10^{11})^2}{6{,}67\times10^{-11}}$

$$\therefore \quad M_{\text{estrella}} = 1{,}0\times10^{32}\text{ kg} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

63. Una esfera de masa M y radio R tiene una densidad no uniforme que varía con r, la distancia desde su centro, de acuerdo con la expresión $\rho = Ar$, para $0 \le r \le R$. a) ¿Cómo es la constante A en términos de M y R? b) Encuentre la fuerza sobre una partícula de masa m colocada fuera de la esfera. c) Calcule la fuerza sobre la partícula si se encuentra en el interior de la esfera. (Sugerencia: Vea la sección 14.10 y advierta que la distribución es esféricamente simétrica.)

Resolución :



$\rho = A.r$

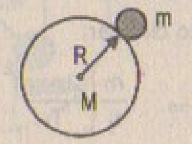
$0 \le r \le R$

Parte (a)

Sabemos que: $M' = \rho.v \quad \Rightarrow \quad dM' = Ar(4\pi r^2).dr$

$$\Rightarrow \quad \int dM' = \int \rho.dv = \int_0^R A.4\pi\,(r^3)\,dr \quad \therefore \quad A = \frac{M}{\pi R^4} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

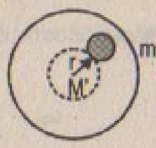
Parte (b)



$$\Rightarrow \quad F_g = -\frac{G.M.m}{R^2}$$

Parte (c)

$$F_g = -\frac{G.M'.m}{r^2}$$



Por otro lado: $\frac{M'}{M} = \frac{v.A.r}{v.A.R} = \frac{4/3\pi Ar^4}{4/3\pi AR^4}$

$$\therefore \; M' = \frac{M.r^4}{R^4}$$

Luego: $F_g = G.M.mr^2/R^4$

64. Dos estrellas de masas M y m, separadas por una distancia d, rotan en órbitas circulares alrededor de su centro de masa (Fig. P14.64). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\,d^3$$

(Sugerencia: Aplique la segunda ley de Newton a cada estrella y observe que la condición del centro de masa requiere que $Mr_2 = mr_1$, donde $r_1 + r_2 = d$.)

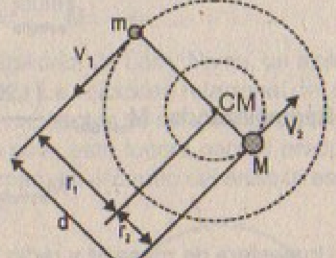
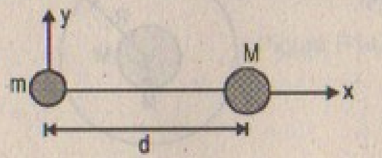


Figura P14.64

Resolución :

Por demostrar que: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \cdot d^3$



Por definición:

$$r_{CM} = \frac{M(d)}{m+M}$$

Por gráfico: $r_1 = \frac{M(d)}{m+M} = \frac{M(r_1+r_2)}{m+M}$

$$\Rightarrow \; r_1\,(m+M) = M(r_1+r_2) \quad \therefore \; Mr_2 = mr_1 \; ... (1)$$

Por otro lado: por movimiento circular:

$$F_{c(m)} = m.\frac{v_1^2}{r_1} \;\Rightarrow\; \frac{m}{r_1}\left(\frac{2\pi.r_1}{T_1}\right)^2 = \frac{G.m(M+m)}{r_1^2}$$

$$F_{c(M)} = \frac{M.v_2^2}{r_2} \;\Rightarrow\; \frac{M}{r_2}\left(\frac{2\pi r_2}{T_2}\right)^2 = \frac{G.M(M+m)}{r_2^2}$$

Luego: $m.r_1(4\pi^2) = T_1^2 \times G\,.\,\frac{m(M+m)}{r_1^2}$ ... (2)

$$M.r_2(4\pi^2) = T_2^2 \times G\,.\,\frac{M\,(M+m)}{r_2^2} \; ... (3)$$

Por condición de (1) entonces se cumple que (2) = (3)

Luego: $T_1^2 \times \frac{m}{r_1^2} = T_2^2 \times \frac{M}{r_2^2} \quad \therefore \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = k$

Por la tercera ley de Kepler:

$$T_1^2 = r_1^3\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right) = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\,(d-r_2)^3$$

$$T_2^2 = r_2^3\left(\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\right) = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\,(d-r_1)^3$$

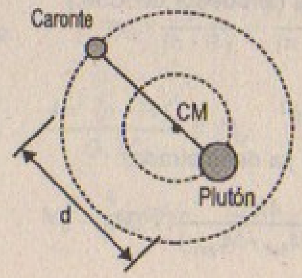
Si sumamos:

Resulta que: $T_1^2 + T_2^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}\,[(d-r_2)^3 + (d-r_1)^3]$

$$\Rightarrow \; T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \cdot d^3 \quad \text{l.q.q.d.}$$

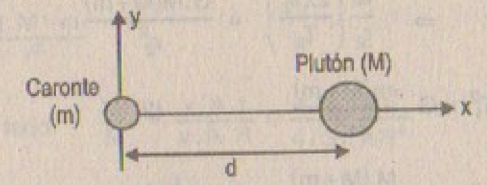
65. En 1978, los astrónomos en el Observatorio Naval de EU descubrieron que Plutón tiene una luna, llamada Caronte, que eclipsa al planeta cada 6,4 días. Dado que la separación centro a centro entre Plutón y Caronte es de 19 700 km, encuentre la masa total (M + m) de los dos cuerpos. (*Sugerencia: Véase el problema 64.*)

Resolución :



T = 6,4 días
d = 197 × 10⁵ m
G = 6,67 × 10⁻¹¹ N.m²/kg²

(hallando el centro de masa)



$$F_{CM} = \frac{d\,M_{Plutón}}{(M+m)}$$

Luego por condición y demostración del problema 64 se cumple que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G.(M+m)} \times d^3$$

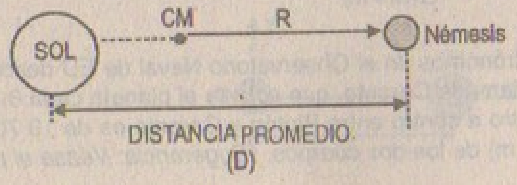
$$\Rightarrow \left(6{,}4 \text{ días} \times \frac{24}{1 \text{ día}} \times \frac{3\,600}{1 \text{ h}}\right)^2 = \frac{4(3{,}1416)^2(197\times10^5)^3}{(6{,}67\times10^{-11})(M+m)}$$

Despejando: $$M_{Caronte} + M_{Plutón} = \frac{4(3{,}1416)^2(197\times10^5)^3}{(6{,}4\times24\times3\,600)^2(6{,}67\times10^{-11})}$$

En consecuencia: Masa del Caronte + Masa del Plutón = $1{,}48 \times 10^{22}$ kg

66. En un intento por explicar los choques de grandes meteoros con la Tierra, los científicos han postulado la existencia de una estrella acompañante que es extremadamente tenue y que está muy alejada del Sol. Si esta estrella (que algunos científicos llaman Némesis) tiene un periodo orbital de $3{,}0 \times 10^7$ años alrededor del centro de masa Sol–Némesis, y una masa de $0{,}20\ M_{Sol}$, determine la distancia promedio de esta estrella desde el Sol. $M_{Sol} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.

Resolución:



Datos: $T_{Némesis} = 3{,}0 \times 10^7$ años (alrededor del C.M.)
$M_{Némesis} = 0{,}2\ M_{sol}$
$M_{Sol} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²

Sabemos que: (por el problema 64 ya demostrado)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G.(M_{Sol}+M_{Nem})} \times D^3$$

Por otro lado: $T = 3{,}0 \times 10^7 \text{ años} \times \frac{365 \text{ dias}}{1 \text{ año}} \times \frac{24 \text{ horas}}{1 \text{ dia}} \times \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ hora}} = 9{,}5 \times 10^{14}$ s.

Además: $M_{némesis} = 0{,}2\ M_{sol} = 0{,}2 \times 2 \times 10^{30} = 4 \times 10^{29}$ kg

$\Rightarrow M_{sol} + M_{némesis} = 2{,}0 \times 10^{30} + 4 \times 10^{29} = 2{,}4 \times 10^{30}$ kg

Luego: $$(9{,}5 \times 10^{14})^2 = \frac{4(3{,}1416)^2}{(6{,}67\times10^{-11})(2{,}4\times10^{30})} \cdot D^3$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{(9{,}5\times10^{14})^2\times(6{,}67\times10^{-11})(2{,}4\times10^{30})}{4\,(3{,}1416)^2}}$$

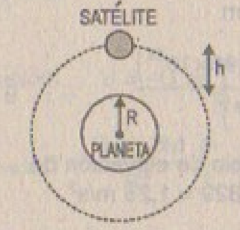
$\therefore\ D_{promedio}$ = calculadora

67. Un satélite está en una órbita circular alrededor de un planeta de radio R. Si la altitud del satélite es h y su periodo es T, a) muestre que la densidad del planeta es

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3$$

b) Calcule la densidad promedio del planeta si el periodo es de 200 min y la órbita del satélite es cercana a la superficie del planeta.

Resolución:



Datos: T

Sea: $M_{satélite} = m_s$
$M_{planeta} = M_p$

Parte (a)

Por demostrar que: $$\rho = \frac{3\pi}{G.T^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^3$$

Sabemos que: $$m_S \times \frac{v^2}{(h+R)} = \frac{m_S}{(h+R)}\left[\frac{2\pi\,(h+R)}{T}\right]^2 = \frac{G.m_S.M_p}{(h+R)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2\,(h+R)^3}{G.T^2} = M_p \quad \text{... (1)}$$

Pero: $$M_p = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3\,M_p}{4\pi R^3} \quad \text{... (2)}$$

Luego: (2) en (1): $\dfrac{4\pi^2\,(h+R)^3}{G.T^2} = \dfrac{4}{3}\,\pi R^3.\rho \quad \therefore \quad \rho = \dfrac{3\pi}{G.T^2}\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^3$ l.q.q.d.

Parte (b)

$h \to 0$ y $T = 2\times 10^2$ min $= 12\times 10^3$ s, $R_{Tierra} = 6{,}37\times 10^6$ m

Entonces: $\rho_{promedio} = \dfrac{3(3{,}1416)}{(6{,}67\times10^{-11})(12\times10^3)^2} \quad \therefore \ \rho_{prom} = 981\ kg/m^3$

68. Se afirma que un medidor de gravedad portátil, disponible en el comercio, es suficientemente sensible para detectar cambios en g hasta 1 parte en 10^{11}. En la superficie terrestre ¿qué cambio en la elevación produciría esta variación? Suponga que el radio de la Tierra es $6{,}0\times 10^6$ m.

Resolución:

Sabemos que: $g = \dfrac{G.M_T}{R_T^2}$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(6{,}37\times10^6)^2} \quad \text{considerando: } R_T = 6{,}37\times10^6\ m$$

$\therefore \quad g = 9{,}829\ m/s^2$

Si ahora suponemos $R_T = 6{,}0\times10^6$ m

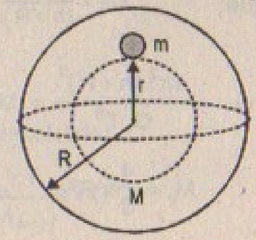
Entonces: $g = \dfrac{(6{,}67\times10^{-11})(5{,}98\times10^{24})}{(6{,}0\times10^6)^2} \quad \therefore \quad g = 11{,}079\ m/s^2$

En consecuencia produciría un cambio de elevación de:

$11{,}079 - 9{,}829 = 1{,}25\ m/s^2$

69. Una partícula de masa m se localiza en el interior de una esfera sólida uniforme de radio R y masa M. Si la partícula está a una distancia r del centro de la esfera, a) demuestre que la energía potencial gravitacional del sistema es $U = (GmM/2R^3)r^2 - 3GmM/2R$. b) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional al llevar la partícula desde la superficie de la esfera hasta su centro?

Resolución:

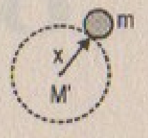


Parte (a)

Por demostrar que:

$$U = \frac{(G.m.M)}{2R^3}.r^2 - \frac{3G.m.M}{2R}$$

Hallando inicialmente la energía potencial del sistema



$0 \le x \le r$

Sabemos que: $dM' = \rho\,.\,4\pi\,.x^2.dx$

Además: como $M = \rho.\dfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

Luego: $U_{inicial} = -G.m\displaystyle\int_0^r \frac{dM'}{x} = -\frac{G.M.m}{R^3}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^r$

$\therefore \quad U_{inicial} = -\dfrac{G.m.M.r^2}{2R^3}$

Por otro lado:
Hallando U_p del sistema

$dm = \rho.\left(\dfrac{4}{3}\pi.r^3\right)' = 4.\pi.r^2.\rho.dr$

Además: $M = \rho\,\dfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \therefore \quad \rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

Luego: $dm = \dfrac{3M}{R^3}\,r^2dr$

Entonces: por definición: $U = -G.m\displaystyle\int \frac{3Mr^2dr}{R^3r}$

$\Rightarrow \quad U(r) - U_{inicial} = -\dfrac{G.m.3M}{R^3}\displaystyle\int_0^R r.dr$

$\Rightarrow \quad U(r) = \dfrac{G.m.M.r^2}{2R^3} - \dfrac{3.G.m.M}{R^3}\left(\dfrac{r^2}{2}\right)\Big|_0^R$

$\therefore \quad U(r) = \dfrac{G.m.Mr^2}{2R^3} - \dfrac{3G.m.M}{2R}$ l.q.q.d.

Capítulo 15

MECÁNICA DE FLUIDOS

PRESIÓN

1. Calcule la masa de una esfera de hierro sólida que tiene un diámetro de 3,0 cm.

Resolución:

Sabemos que: masa = ρ .V $\qquad \rho_{hierro} = 7{,}86 \times 10^3$ kg/m³

Por otro lado volumen = $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\,(3{,}1416)\left[\frac{3{,}0}{2}\right]^3 = 14{,}14 \text{ cm}^3 \equiv 14{,}14 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Luego: $\quad$ Masa = $(7{,}86 \times 10^3)(14{,}14 \times 10^{-6}) = 111{,}1 \times 10^{-3}$ kg = 0,111 kg

2. Un pequeño lingote de metal grisáceo brillante tiene un volumen de 25 cm³ y una masa de 535 g. ¿De qué tipo de metal se trata? (Véase la tabla 15.1.)

Resolución:

Por dato:
Volumen = 25 cm³ $\qquad$ Masa = 535 g

Entonces: $\qquad \rho = \frac{535}{25} = 21{,}4$ g/cm³

o equivalente a $\qquad \rho = 21{,}4 \times 10^3$ kg/m³

En consecuencia se trata del «platino».

3. Calcule la densidad del núcleo de un átomo. ¿Qué sugiere este resultado en relación con la estructura de la materia? (Aproveche el hecho de que la masa de un protón es de $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y su radio es aproximadamente 10^{-15} m.)

Resolución:

Sabemos que $\qquad \rho = \frac{M}{V}$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1,67\times10^{-27}}{\frac{4}{3}(3,1416)\left(10^{-15}\right)^3} \qquad \therefore \quad \rho = 3,99 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

Se podría concluir que:

Toda la masa del núcleo del átomo está contenida en el protón, esto quiere decir que el resto no contiene masa, es espacio libre.

4. Un rey manda a hacer una corona de oro con una masa de 0,5 kg. Cuando ésta llega del taller de orfebrería, se mide su volumen y se encuentra que es igual a 185 cm^3. ¿La corona es de oro sólido?

Resolución :

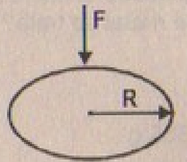
Sabemos que: $\rho = \frac{0,5}{185} \times 10^6$

$\therefore \quad \rho = 2,7 \times 10^3$ kg/m^3

Como la densidad del oro es: $19,3 \times 10^3$ kg/m^3, entonces:
La corona no es de oro sólido.

5. Una mujer de 50 kg se balancea sobre uno de los altos tacones de sus zapatos. Si el tacón es circular con radio de 0,5 cm, ¿qué presión ejerce la mujer sobre el piso?

Resolución :



Radio = 5×10^{-3} m
F = $50 \times (9,80)$

Por definición: $P = \frac{F}{A}$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{50\times(9,80)}{\pi\left(5\times10^{-3}\right)^2} = \frac{50.(9,80)}{(3,1416)\left(5\times10^{-3}\right)^2}$$

$\therefore \quad P = 6,24 \times 10^6$ N/m^2

6. ¿Cuál es la masa total de la atmósfera de la Tierra? (El radio terrestre es de $6,37 \times 10^6$ cm y la presión atmósferica en la superficie es $1,01 \times 10^5$ N/m^2.)

Resolución :

Datos: Radio terrestre $= 6,37 \times 10^6$ m
$P_{\text{atmosférica}} = 1,01 \times 10^5$ N/m^2

Sabemos que: $P = \frac{F_g}{\text{área}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Presión atm.} = \frac{F_g}{\pi\left(6,37\times10^6\right)^2} \quad \Rightarrow F_g = (1,01 \times 10^5)(3,1416)(6,37 \times 10^6)^2$$

$\therefore \quad F_g = 128,75 \times 10^{17}$ N

Como: $128,75 \times 10^{17} = M\ .\ (g) = M(9,80)$

$\therefore \quad M_{\text{total de la atmósfera}} = 13,14 \times 10^{17}$ kg

7. Encuentre la densidad de una estrella de neutrones. Se cree que uno de dichos objetos tiene un radio de sólo 10 km y una masa igual a la del Sol. ($M_{Sol} = 1,99 \times 10^{30}$ kg.)

Resolución :

Sabemos que: $\rho_{\text{estrella}} = \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{estrella}} = \frac{M_{Sol}}{V} = \frac{1,99\times10^{30}}{\frac{4}{3}(\pi)\left(10^4\right)^3}$

$\therefore \quad \rho_{\text{estrella}} = 4,75 \times 10^{17}$ kg/m^3

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD

8. Determine la presión absoluta en el fondo de un lago que tiene 30 m de profundidad.

Resolución :

$P_{\text{absoluta}} = P_{\text{atm.}} + \rho_{H_2O}\ .\ gh \quad \Rightarrow \quad P_{\text{abs.}} = 1,05 \times 10^5 + (1,00 \times 10^3)(9,80)(30)$

$\therefore \quad P_{\text{absoluta}} = 3,95 \times 10^5$

9. Un recipiente cúbico sellado con un borde L se coloca sobre un carrito, el cual se mueve horizontalmente con una aceleración a como en la figura P15.9. El cubo está lleno con un fluido que tiene densidad ρ. Determine la presión P en el centro del cubo.

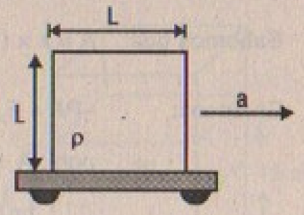
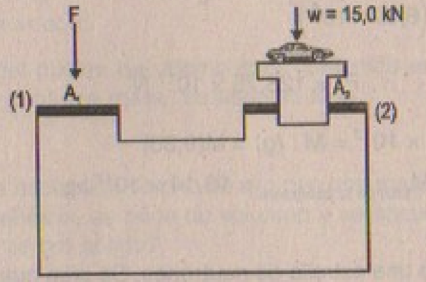


Figura P15.9

Datos incorrectos.

10. El pequeño émbolo de un elevador hidráulico tiene un área de sección transversal igual a 3,00 cm², en tanto que el área del émbolo grande es de 200 cm² (Fig. 15,4). ¿Qué fuerza debe aplicarse al émbolo pequeño para levantar una carga de 15,0 kN? (En los talleres esto usualmente se lleva a cabo con aire comprimido.)

Resolución :



$A_1 = 3{,}00\ cm^2$

$A_2 = 200\ cm^2$

Por el principio de Pascal: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{A_1} = \frac{F_1}{A_2} \Rightarrow \quad F = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_1 \quad \dots (1)$$

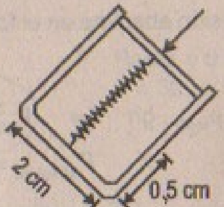
Pero: $F_1 = w = 15{,}0\ kN$

Entonces en (1): $F = \left(\frac{3}{200}\right)15{,}0\ kN \quad \therefore \quad F = 225\ N$

11. El resorte del medidor de presión mostrado en la figura 15.2 tiene una constante de fuerza de 1 000 N/m, y el émbolo tiene un diámetro de 2,0 cm. Calcule la profundidad en el agua para la cual el resorte se comprime 0,50 cm.

Resolución :

$k = 10^3\ N/m$
$P_0 = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$
$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3\ kg/m^3$

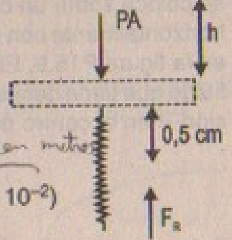


Sabemos que: $A = \pi \times (10^{-2})^2 = 3{,}1416 \times 10^{-4}\ m^2$

Entonces: $-PA + F_R = 0$

$\Rightarrow \quad \rho gh \cdot A = kx$

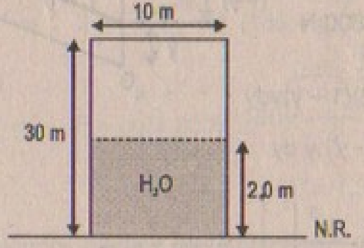
$$\Rightarrow \quad \underbrace{(10^3)}_{P_{agua}}\underbrace{(9{,}80)}_{g}\underbrace{(10^{-4})(3{,}1416)}_{A}h = \underbrace{10^3}_{K}\underbrace{(0{,}5 \times 10^{-2})}_{x\ \text{en metros}}$$



$\therefore \quad h = 1{,}62\ m$

12. Una alberca tiene dimensiones de 30 m × 10 m y un fondo plano. Cuando la alberca está llena a una profundidad de 2,0 m con agua potable, ¿cuál es la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo? ¿Sobre cada extremo? ¿Sobre cada lado?

Resolución :



$\rho_{H_2O} = 1{,}0 \times 10^3\ kg/m^3$

$P_0 = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

$F_{total/fondo} = (P_o + \rho gh)A$

$\Rightarrow \quad F_{total/fondo} = [1{,}013 \times 10^5 + (1{,}0 \times 10^3)(9{,}8)(2)](30)(10)$

$\therefore \quad F_{total/fondo} = 3{,}63 \times 10^7\ N$

Por otro lado: $F_{cada\ extremo} = P_0\ A$

$\Rightarrow \quad F_{cada\ extremo} = (1{,}013 \times 10^5)(30)(2)$

$\therefore \quad F_{cada\ extremo} = 6{,}078 \times 10^6\ N$

13. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una ventosa de succión (completamente al vacío) y un techo para soportar el peso de un estudiante de 80 kg?

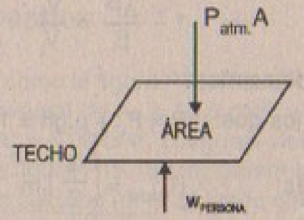
Resolución :

Entonces:

$A \times P_{atm.} = (80)(9{,}80)$

$\Rightarrow \quad A \times 1{,}013 \times 10^5 = 80(9{,}80)$

$\therefore \quad A = 77{,}4 \times 10^{-4}\ m^2 = 77{,}4\ cm^2$



14. El tanque en la figura P15.14 se llena a una profundidad de 2,0 m con agua. En el fondo del tanque hay una escotilla rectangular de 1,0 m de altura y 2,0 m de ancho que está articulada en su parte superior. a) Determine la fuerza neta sobre la escotilla. b) Encuentre el momento de torsión ejercido alrededor de las bisagras.

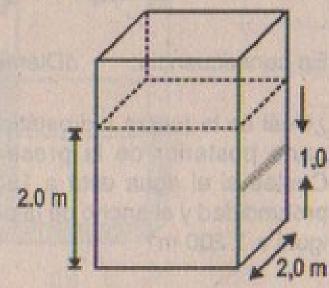
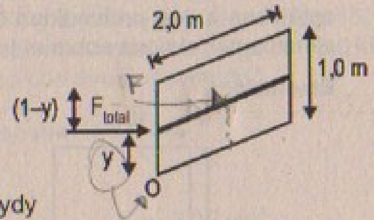


Figura P15.14

Resolución:

Parte (a)



$$dF = \rho_{H_2O}.g(1-y).2dy$$

$$\Rightarrow \quad F_{neta} = 2(9{,}8)(10^3)\int_0^1 (1-y)dy = 9\ 800\ \text{N}$$

Parte (b)

$$dM_0 = \overbrace{dF}^{\text{Momento}}.y = \overbrace{\rho_{H_2O}.g(2)(1-y)}^{dF}ydy$$

$$\Rightarrow \quad M_0 = 2(9{,}8)(10^3)\int_0^1 (1-y).y\ dy$$

$$\therefore \quad M_0 = 2(9{,}8)(10^3)\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1\right] = 3\ 266{,}7\ \text{N.m}$$

10000 Km

15. Una bola de cobre sólida con un diámetro de 3,00 m a nivel del mar se coloca en el fondo del océano, a una profundidad de 10,000 km. Si la densidad del agua de mar es 1,030 kg/m³, ¿en qué cantidad (aproximadamente) el diámetro de la bola disminuye cuando alcanza el fondo? El módulo volumétrico del cobre es 14×10^{10} N/m².

Resolución:

β: modulo volumétrico de elasticidad

Sabemos que: $\boxed{\Delta P = -\beta . \frac{\Delta V}{V}}$ $\Rightarrow$ $\Delta P = \beta\left(1 - \frac{V_f}{V_i}\right)$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{\Delta P}{\beta} = \frac{V_f}{V_i} \qquad \therefore \quad R^3_{final} = R^3_{inicial}\left(1 - \frac{\Delta P}{\beta}\right)$$

Reemplazando:

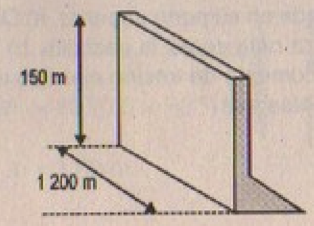
Sabemos que: $P = P_0 + \rho.gh = 1{,}013 \times 10^5 + (1{,}030)(9{,}80)(10^7)$

Además: $R_{inicial} = \left(\frac{3}{2}\right)$ m y como $\beta_{cobre} = 14 \times 10^{10}$ N/m²

Entonces: $R_{final} = 1{,}5\sqrt[3]{1 - \frac{(1{,}030)(9{,}80)(10^7)}{14 \times 10^{10}}} = 1{,}499 \times 10^3$ mm ✓//

En consecuencia: $\Delta\text{Diámetro} = D_{final} - D_{inicial} = 0{,}722$ mm } ¡hay error, ojo!

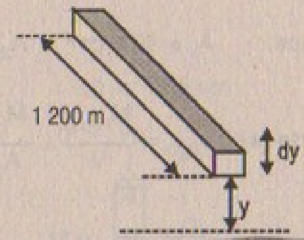
16. ¿Cuál es la fuerza hidrostática en la parte posterior de la presa Grand Coulee si el agua está a 150 m de profundidad y el ancho de la presa es igual a 1 200 m?



Resolución:

este mal!!! es el área = 1200 · 150 = 180.000 m²

Entonces: $dF = P.dA$



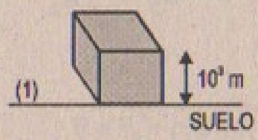
$$\Rightarrow \quad \int dF = \int_0^{150} \rho g\ \overbrace{(150-y)}^{h}(1\ 200)dy$$

$$\Rightarrow \quad F = \rho g(1\ 200)\left[150y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{150}$$

$$\therefore \quad F = 1{,}323 \times 10^{11}\ \text{N}$$ X $\boxed{F = 1{,}98 \cdot 10^{12} (N)}$ ✓

17. En algunos lugares de la placa de hielo de Groenlandia el espesor es de 1,0 km. Calcule la presión sobre el suelo que está debajo del hielo. (ρ_{hielo} = 920 kg/m³.)

Resolución:



ρ_{hielo} = 920 kg/m³

$$P_1 = P_0 + \rho.gh$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = 1{,}013 \times 10^5 + (920)(9{,}80)(10^3)$$

$$\therefore \quad P_1 = 91{,}2 \times 10^5\ \text{Pa}$$

MEDIDA DE LA PRESIÓN

18. Se vierte mercurio dentro de un tubo en U, como la figura P15.18a. El brazo izquierdo del tubo tiene un área de sección transversal de A_1 = 10,0 cm², y el área de la sección transversal del brazo derecho es A_2 = 5,00 cm². Luego se vierten 100 g de agua en el brazo derecho, como se ve en la figura P15.18b. a) Determine la longitud de la columna de agua en el brazo derecho del tubo en U. b) Dado que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm³, ¿qué distancia, h, sube el mercurio en el brazo izquierdo?

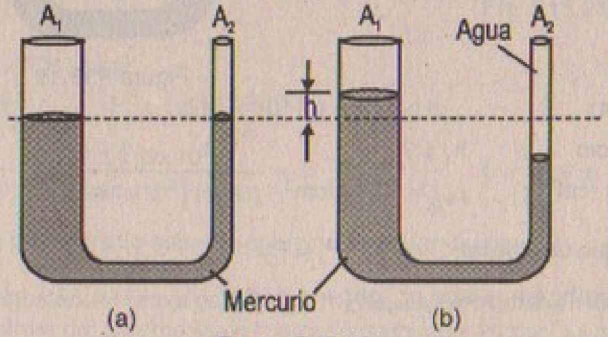


Figura P15.18

en este ejercicio no se considera la presión atmosférica (P_0)

Resolución :

Datos: $A_1 = 10,0\ cm^2$; $A_2 = 5,00\ cm^2$; $m_{H_2O} = 100\ g$; $\rho_{mercurio} = 13,6\ g/cm^3$

Parte (a) $\rho_{H_2O} = \dfrac{M_{H_2O}}{V} = \dfrac{M_{H_2O}}{A_2.H}$

$$\Rightarrow \quad A_2H\,.\,\rho_{H_2O} = M_{H_2O} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{M_{H_2O}}{A_2\times\rho} = \frac{100}{(1\ g/cc)(5)} = 20,0\ cm$$

Parte (b)
Por el principio de Arquímedes: $P_C = P_D$

$$\Rightarrow \quad P_C = \rho_{Hg}.\,g.h \quad ; \quad P_D = \frac{F_2}{A_2} = \frac{M_{H_2O}\cdot g}{A_2}$$

Luego: $\rho_{Hg}\cdot gh = \dfrac{M_{H_2O}\cdot g}{A_2}$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{M_{H_2O}}{A_2\cdot\rho_{Hg}} = \frac{100\ g}{(5\ cm^2)(13,6\ g/cm^3)}$$

$$\therefore \quad h = 1,47\ cm$$

19. Un tubo en U de área de sección transversal constante, abierto a la atmósfera, se llena parcialmente con mercurio. Se vierte agua después en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como la mostrada en la figura P15.19, con $h_2 = 1,00$ cm, determine el valor de h_1.

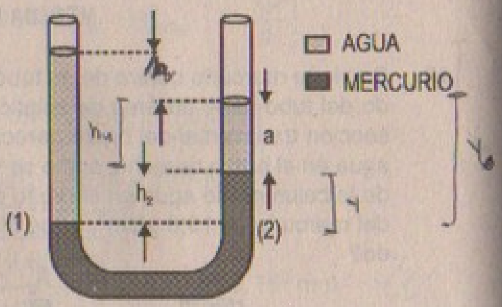


Figura P15.19

Resolución :

$h_2 = 1,00$ cm ; $h_1 = ?$

$\rho_{H_2O} = 1\ g/cm^3$; $\rho_{Hg} = 13,6\ g/cm^3$

Por principio de Pascal: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\,g(h_2 + h_1 + a) = \rho_{Hg}\,gh_2 + \rho_{H_2O}.ga$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\cdot gh_2 + \rho_{H_2O}\cdot gh_1 + \rho_{H_2O}.ga = \rho_{Hg}.gh_2 + \rho_{H_2O}\cancel{ga}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\cdot h_1 = h_2(\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})$$

Reemplazando: $h_1 = \dfrac{(1,00)(13,6-1)}{1,00}$ $\quad\therefore\quad h_1 = 12,6$ cm

20. El tubo vertical abierto en la figura P15.20 contiene dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2, que no se mezclan. Demuestre que la presión a la profundidad $h_1 + h_2$ está dada por la expresión $P = P_o + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2$.

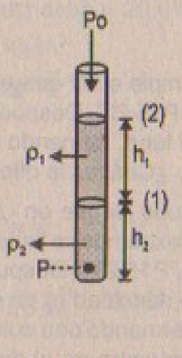


FIGURA P15.20

Resolución :

Por demostrar que: $P = P_o + \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2$

Sabemos que: $P = \rho_2\cdot gh_2 + P_1 + P_2$

Además: $P_1 = \rho_1\,g\,h_1$; $P_2 = P_o$

Entonces: $P = P_o + \rho_1\,g\,h_1 + \rho_2\,g\,h_2$ l.q.q.d.

21. Blaise Pascal reprodujo el barómetro de Torricelli utilizando (como un francés lo haría) un vino tinto de Bordeaux como el líquido de trabajo (Fig. P15.21). La densidad del vino empleado fue de $0,984 \times 10^3\ kg/m^3$. ¿Cuál fue la altura h de la columna de vino para la presión atmosférica normal? ¿Esperaría usted que el vacío sobre la columna fuera tan bueno como para el mercurio?

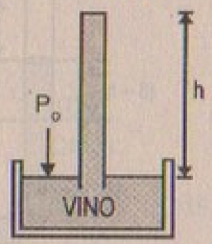


Fig. P15.21

Resolución :

$\rho_{vino} = 0,984 \times 10^3\ kg/m^3$

Por Torrichelli: $P_o = 1,013 \times 10^5\ Pa = \rho_{vino}.g.h$

$$\Rightarrow \quad \frac{1,013\times10^5}{(0,984\times10^3)(9,80)} = h \quad \therefore \quad h = 10,5\ m$$

No esperaría que el vacío sobre la columna fuera tan bueno.

22. La presión atmosférica normal es $1,013 \times 10^5$ Pa. La aproximación de una tormenta hace que la altura del barómetro de mercurio disminuya 20 mm a partir de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica? (La densidad del mercurio es $13,59\ g/cm^3$.)

Resolución :

Sabemos que: $P_0 = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa} = \rho_{Hg}\, g \times (0{,}76 \text{ m})$

Si «h» disminuye 20 mm = 2,0 cm, entonces:

$$P_0 = (13{,}59)(9{,}80)(0{,}74) \times 10^3$$

$$\therefore \quad P_0 = 0{,}986 \times 10^5 \text{ Pa}$$

23. Un tubo simple en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua (Fig. P15.23). Después se vierte queroseno ($\rho_k = 0{,}82 \times 10^3$ kg/m³) en una de los brazos del tubo, formando una columna de 6,0 cm de altura, como se muestra en el diagrama . ¿Cuál es la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido?

23A. Un tubo simple en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua (Fig. P15.23). Después se vierte queroseno de densidad ρ_k en una de los brazos del tubo, formando una columna de altura h_k, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la diferencia h en las alturas de las dos superficies de líquido?

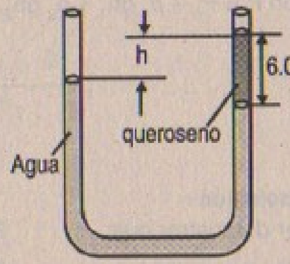
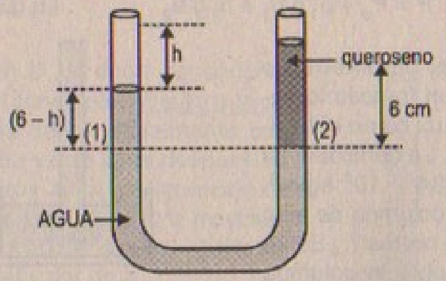


Figura P15.23

Resolución :



$\rho_{H_2O} = 1{,}0 \times 10^3$ kg/m³

$\rho_k = 0{,}82 \times 10^3$ kg/m³

Por principio de hidrostática y pascal $\quad P_1 = P_2$

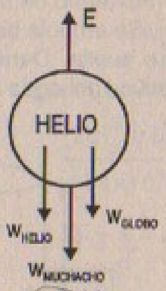
$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g(6 - h) = P_{atm} + \rho_k \cdot g\,(6)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{6}{10^3}\,(1 \times 10^3 - 0{,}82 \times 10^3) \qquad \therefore \; h = 1{,}08 \text{ cm}$$

FUERZAS DE FLOTACIÓN Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

24. Globos de helio que tienen masas de 5,0 g cuando están desinflados y con radio de 20,0 cm cada uno son utilizados por un muchacho de 20,0 kg para levantarse a sí mismo del suelo. ¿Cuántos globos se necesitan si la densidad del helio es 0,18 kg/m³ y la densidad del aire es 1,29 kg/m³?

Resolución :



Masa del globo = 5×10^{-3} kg

Radio del globo = 0,2 m

Masa del muchacho = 20,0 kg

$\rho_{helio} = 0{,}18$ kg/m³

$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³

$$n.\rho_{aire} \cdot g\left(\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right) = n.0{,}005g + 20g + n.\rho_{He} \cdot g\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right]$$

Entonces: $\quad n\left[\rho_{aire}\left(\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right) - \rho_{He}\left[(4/3)\pi(0{,}2)^3\right] - 0{,}005\right] = 20$

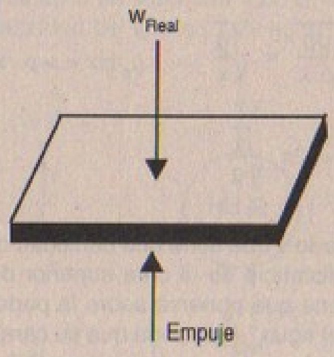
$$\Rightarrow \quad n = \frac{20}{(1{,}29)\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right] - (0{,}18)\left[\frac{4}{3}\pi\,(0{,}2)^3\right] - 0{,}005}$$

$$\therefore \quad n = 621 \text{ globos}$$

$V = 1\,m^3$

25. ¿Cuál es el peso real de un metro cúbico de madera de balsa que tiene una densidad relativa de 0,15? Recuerde que el verdadero peso de un objeto es su peso en el vacío.

Resolución :



Datos:

$$\frac{\rho_{madera}}{\rho_{H_2O}} = 0{,}15$$

Sabemos que:

$$W_{real\ madera} = \rho_{madera} \cdot g \cdot V_{madera}$$

$$\Rightarrow \quad W_{real\ madera} = (0{,}15)\,\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{madera}$$

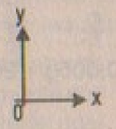
$$\Rightarrow \quad W_{real\ madera} = (0{,}15)\,(1000)(9{,}81)(1)$$

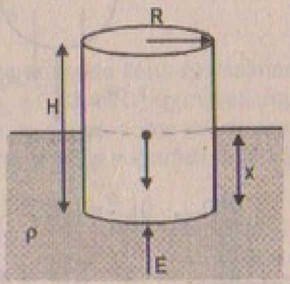
$$\therefore \quad W_{real\ madera} = 1\,470 \text{ N}$$

26. Un largo tuvo cilíndrico de radio r se pesa en un extremo de manera que flota verticalmente en un fluido que tiene una densidad ρ. Se empuja hacia abajo una distancia x a partir de su posición de equilibrio y se suelta. Demuestre que ejecutará movimiento armónico simple si los efectos resistivos del agua se ignoran, y determine el periodo de las oscilaciones.

Resolución :

Inicialmente se encuentra en equilibrio, entonces





$\Sigma F_y = 0$

$\rightarrow \quad \rho_c . gA.H = \rho gA.x$

$\therefore \quad \rho_c . H = \rho . x \quad ... (1)$

Sabemos que el empuje del agua es una fuerza en contra del movimiento, entonces:

$$-E = m.\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\rho g \pi R^2 x = \rho_c . \pi R^2 H.\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \rho_c H\ddot{x} + \rho g x = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{\rho g}{\rho_c H}.x = 0$$

(Ecuación diferencial del M.A.S.)

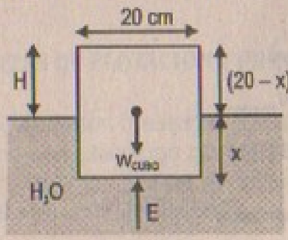
En consecuencia: $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Pero: $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho_c H}} = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho . x}} = \sqrt{\dfrac{g}{x}} \qquad \rho_c Hx <> \rho . x$

Entonces: $\quad T = 2\pi . \sqrt{\dfrac{\rho_c H}{\rho g}} = 2\pi . \sqrt{\dfrac{x}{g}}$

27. Un cubo de madera de 20 cm de lado y que tiene una densidad de $0,65 \times 10^3$ kg/m³ flota en el agua. a) ¿Cuál es la distancia de la cara superior del cubo al nivel de agua? b) ¿Qué peso de plomo tiene que ponerse sobre la parte superior del cubo para que ésta esté justo al nivel del agua? (Suponga que su cara superior permanece paralela a la superficie del agua.)

Resolución :



$\rho_{cubo} = 0,65 \times 10^3$ kg/m³

$\rho_{H_2O} = 1,00 \times 10^3$ kg/m³

Parte (a)

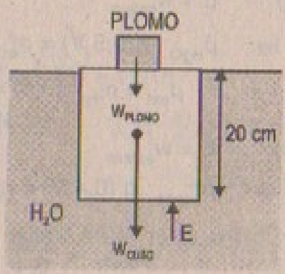
Por la tercera ley: $\quad w_{cubo} = \text{empuje}$

$$\Rightarrow \quad \rho_{cubo} V_{cubo} . g = \rho_{H_2O} . g\,(20)^2(x)$$

$$\therefore \quad x = \frac{(20)^3 (0,65 \times 10^3)}{(1,0 \times 10^3)(20)^2} = 13 \text{ cm}$$

Nos piden: $\quad H = 20 - x = 20 - 13 = 7$ cm

Parte (b)



Entonces:

$$w_{plomo} + w_{cubo} = \text{empuje}$$

$$w_{plomo} = \text{empuje} - w_{cubo}$$

Reemplazando: $\quad w_{plomo} = \pi_{H_2O} . g\, V_{cubo} - \rho_{cubo} . g\, V_{cubo}$

$\Rightarrow \quad w_{plomo} = g . V_{cubo}\,(\rho_{H_2O} - \rho_{cubo})$

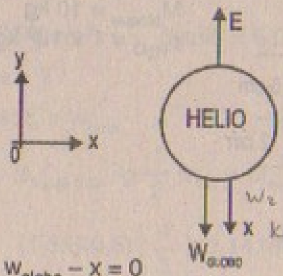
$\Rightarrow \quad w_{plomo} = (9,80)(0,2)^3\,[1 \times 10^3 - 0,65 \times 10^3]$

$\therefore \quad w_{plomo} = 2,8$ kg

— 400 kg

28. Un globo aerostático se llena con 4,00 m³ de helio. ¿Qué carga puede levantar el globo? (La densidad del aire es 1,29 kg/m³; la densidad del helio es 0,180 kg/m³.)

Resolución :



$V_{helio} = 4 \times 10^2$ m³

$\rho_{aire} = 1,29 \times$ kg/m³

$\rho_{helio} = 0,180$ kg/m³

$W_2 = m \cdot g$

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad E - w_{globo} - x = 0$

$\Rightarrow \quad x = \rho_{aire} \cdot g\, V_{globo} - \rho_{helio} \cdot g\, V_{helio}$

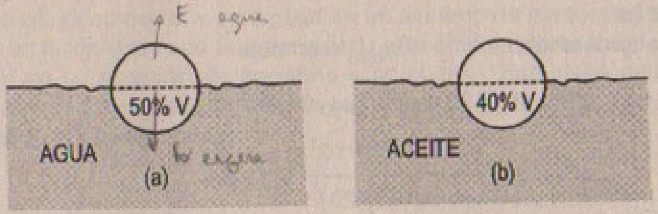
$\Rightarrow \quad x = g\, V_{helio}\,(\rho_{aire} - \rho_{helio})$

$\therefore \quad x = \underline{(9,80)(4 \times 10^2)\,(1,29 - 0,180)} = 444$ kg // ✓

1,20

29. Una esfera de plástico flota en el agua con 50% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en aceite con 40% de su volumen sumergido. Determine las densidades del aceite y de la esfera.

Resolución :



En (a): $E = w_{esfera}$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot g(0,5\ \cancel{V}) = \rho_{est} \cdot g\cancel{V}$

$\therefore \quad \rho_{est} = \rho_{H_2O} \cdot (0,5) = (1,00 \times 10^3)(0,5) = 0,5 \times 10^3\ kg/m^3$

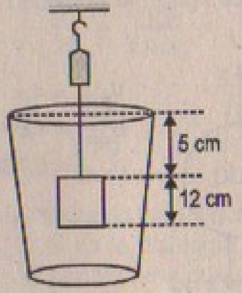
En (b): $E = w_{esfera}$

$\Rightarrow \quad \rho_{aceite} \cdot g\ (0,4\ V) = \rho_{est} \cdot gV$

$\therefore \quad \rho_{aceite} = \dfrac{\rho_{est}}{0,4} = \dfrac{0,5}{0,4} \times 10^3 = 1,25 \times 10^3\ kg/m^3$

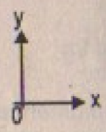
30. Un bloque de metal de 10 kg que mide 12 cm × 10 cm × 10 cm se suspende de una balanza y se sumerge en agua, como muestra la figura 15.9b. El lado de 12 cm está vertical, y la parte superior del bloque se encuentra a 5,0 cm de la superficie del agua. a) ¿Cuáles son las fuerzas sobre la parte superior e inferior del bloque? (Considere $P_0 = 1,0130 \times 10^5\ N/m^2$.) b) ¿Cuál es la lectura de la balanza de resorte? c) Muestre que la fuerza de flotación es igual a la diferencia entre las fuerzas en la parte superior y en la inferior del bloque.

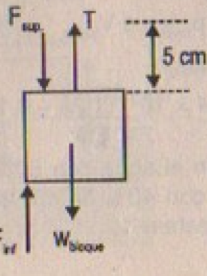
Resolución :

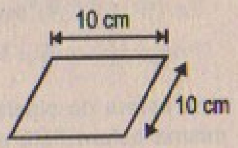


$P_o = 1,013 \times 10^5$ Pa
$M_{bloque} = 10$ kg
$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3\ kg/m^3$

Parte (a)
D.C.L. (bloque)







$F_{superior} = \rho_{H_2O} \cdot g(5 \times 10^{-2}).A = (1 \times 10^3)(9,80)(5 \times 10^{-2}).\ (0,1)^2 + P_o \cdot (0,1)^2$

$\therefore \quad F_{superior} = (1,013 \times 10^5)\ (0,1)^2 + 4,9 = 1\ 018$ N

Hallando la fuerza inferior:

$\Rightarrow \quad F_{inferior} = (P_o + \rho_{H_2O} \cdot g.17 \times 10^{-2})(0,1)^2$

$\therefore \quad F_{inferior} = (1,013 \times 10^5)(0,1)^2 + (10^3)(9,80)(17 \times 10^{-2})(0,1)^2 = 1\ 029,7$ N

Parte (b)

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + F_{inf} - F_{sup} - W_{bloque} = 0$

$\Rightarrow \quad T = \text{Lectura de la balanza} = -1\ 029,7 + \overbrace{(10)(9,80)}^{w} + 1\ 018$ } error!!!

$\therefore \cancel{T = 109,66\ N}$ X T = 86,3 (N)

Parte (c)

Sabemos que $F_{inf} - F_{sup} = 11,76$ ... (1)

Por otro lado Empuje $= \rho_{H_2O} \cdot gV_{cubo} = (1 \times 10^3)(9,80)(0,1)^2(0,12) = 11,76$

Por lo tanto: (1) = (2)

En consecuencia Empuje $= F_{inf} - F_{superior}$ l.q.q.d.

31. Una rana en una vaina hemisférica (Fig. P15.31) descubre que flota verdaderamente sin hundirse en un mar azul-gris (densidad de 1,35 g/cm³). Si la vaina tiene un radio de 6,0 cm y una masa despreciable, ¿cuál es la masa de la rana?

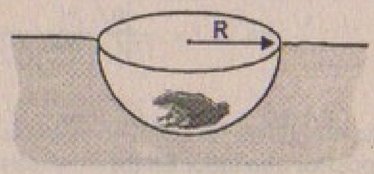


Figura P15.31

Resolución :

$\rho_{mar\ azul-gris} = 1,35\ g/cm^3$; Radio = 6,0 cm

Masa de la rana = ?

Por Arquímedes: $E = w_{rana}$

$\Rightarrow \quad \rho_{agua\ mar} \cdot g\ \dfrac{1}{2}\ V_{esf} = M_{rana}\ g$

$\Rightarrow \quad (1,35)(0,5)\left(\dfrac{4}{3}\right)(3,1416)(6)^3 = M_{rana}$

$\therefore \quad M_{rana} = 0,611$ kg

32. Un globo ligero lleno de helio de 0,180 kg/m³ de densidad se amarra a una cuerda ligera de longitud L = 3,00 m. La cuerda se amarra al suelo, formando un péndulo simple «invertido» como en la figura P15.32a. Si el globo se desplaza ligeramente del equilibrio, como en la figura P15.32b, a) demuestre que el movimiento es armónico simple, y b) determine su periodo. Considere la densidad del aire igual a 1,29 kg/m³ e ignore cualquier pérdida de energía debida a la fricción del aire.

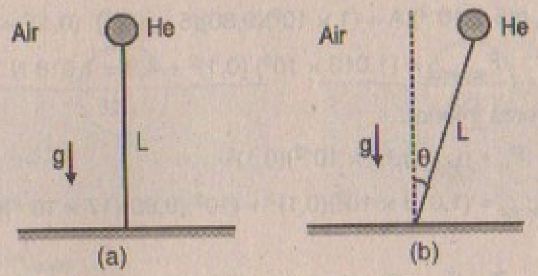


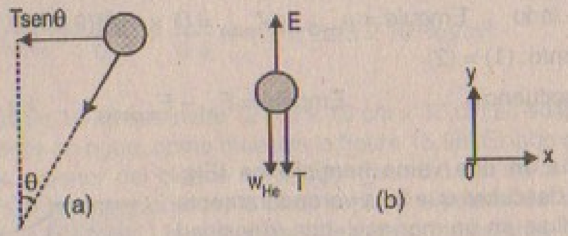
Figura P15.32

Resolución :

$\rho_{helio} = 0{,}180\ kg/m^3$; $L = 3{,}00\ m$

$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

Parte (a)



En (b): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = E - W_{He} = \rho_{aire} \cdot gV - \rho_{helio} \cdot gV$

Por otro lado: En (b)

(«E» es una fuerza que se opone al movimiento, es decir es una fuerza recuperadora)

$\Rightarrow -ELsen\theta = I_o \cdot \ddot{\theta}$ (Para desplazamientos pequeños $sen\theta \approx \theta$)

$\Rightarrow \rho_{aire} \cdot gV\ Lsen\theta + \rho_{helio} \cdot VL^2\, \ddot{\theta} = 0$

$\therefore\ \ddot{\theta} + \dfrac{g\,(\rho_{aire})}{L\,(\rho_{helio})} \cdot \theta = 0$ (Ecuación diferencial de un M.A.S.)

Parte (b)

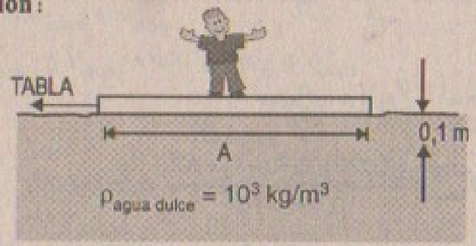
Como: $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,(\rho_{aire})}{L\,(\rho_{helio})}}$

Entonces: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L(\rho_{helio})}{g(\rho_{aire})}} = 2(3{,}1416) \times \sqrt{\dfrac{3}{9{,}80}\left(\dfrac{0{,}180}{1{,}29}\right)} = 1{,}3\ s$

33. Una tabla de estireno tiene un espesor de 10 cm y una densidad de 300 kg/m³. ¿Cuál es el área de la tabla si flota sobre agua dulce cuando un nadador de 75 kg está sobre ella.

33A. Una tabla de estireno tiene un espesor h y densidad ρ_s ¿Cuál es el área de la tabla si flota en agua dulce cuando un nadador de masa m está sobre ella?

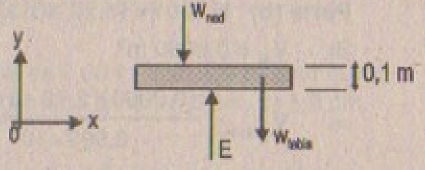
Resolución :



$W_{nadador} = 75\ kg$

$\rho_{tabla} = 300\ kg/m^3$

$\Sigma F_y = 0$



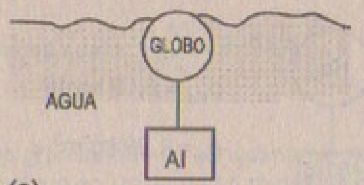
$\Rightarrow\ E = W_{tabla} + W_{nadador}$

$\rho_{H_2O} \cdot g\ A(0{,}1) = A(0{,}1)g \cdot \rho_{tabla} + 75g$

$\Rightarrow\ A(0{,}1)\,[\rho_{H_2O} - \rho_{tabla}] = 75 \quad \therefore \quad A = \dfrac{75}{(0{,}1)(0{,}7\times10^3)} = 1{,}07\ m^2$

34. Un globo se usa para suspender un bloque de aluminio de 0,020 m³ en agua llenándolo con aire. a) ¿Qué volumen de aire es necesario para sólo suspender el bloque con la parte superior del globo en la superficie del agua? b) Si en lugar de ser sólido, el aluminio tenía una cavidad hueca en su interior de 0,0060 m³, ¿qué fracción del globo estaría sobre el agua? Ignore la masa del aire en el globo.

Resolución :



$V_{aluminio} = 0{,}020\ m^3$

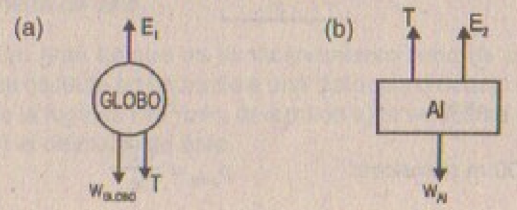
$\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3$

$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

$\rho_{aluminio} = 2{,}7 \times 10^3\ kg/m^3$

Parte (a)

Diagrama de cuerpo libre de cada objeto



En (a) $E_1 = w_{globo} + T$ ... (1)

En (b) $T = w_{aluminio} - E_2$ ... (2)

(2) en (1) $E_1 + E_2 = w_{globo} + w_{aluminio}$

$\Rightarrow \rho_{aire}\, gV_{globo} + \rho_{aluminio}\, gV_{Al} = \rho_{agua}\, gV_{globo} + \rho_{agua} \cdot gV_{Al}$

Nos piden $V_{aire} = V_{globo}$

$\Rightarrow V_{globo}(\rho_{agua} - \rho_{aire}) = V_{Al}\,(\rho_{Al} - \rho_{agua})$

Reemplazando: $V_{globo} = V_{aire} = \dfrac{(0{,}020)(2{,}70-1)\times 10^3}{0{,}999\times 10^3} = 0{,}034\ m^3$

Parte (b)

Si: $V_{Al} = 0{,}0060\ m^3$

$\Rightarrow V_{globo} = \dfrac{(0{,}0060)(2{,}70-1)\times 10^3}{0{,}999\times 10^3} = 0{,}010\ m^3$

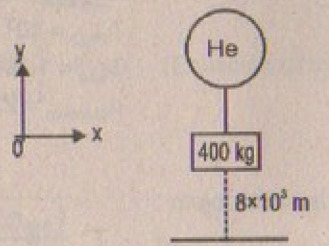
En consecuencia:

La fracción de volumen que estaría sobre el agua sería:

$$\frac{0{,}024}{0{,}034} = \frac{12}{17} \text{ ó } 70{,}59\%$$

35. ¿Cuántos metros cúbicos de helio ($\rho_{He} = 0{,}18\ kg/m^3$) son necesarios para elevar un globo con una carga de 400 kg hasta una altura de 8 000 m? Suponga que el globo mantiene un volumen constante y que la densidad del aire disminuye con la altura z de acuerdo con la expresión $\rho_{aire} = \rho_0\, e^{-z/8\,000}$, donde z está en metros y $\rho_0 = 1{,}29\ kg/m^3$) es la densidad del aire al nivel del mar.

Resolución :



$\rho_{He} = 0{,}19\ kg/m^3$

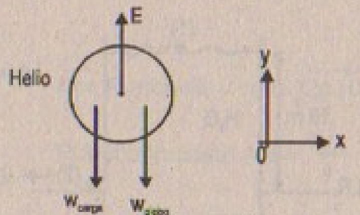
$\rho_o = 1{,}29\ kg/m^3$

Sabemos que:

$$\rho_{aire} = \rho_0\, e^{-z/8\,000}$$

A una altura de 8 000 m entonces: $\rho_{aire} = \dfrac{1{,}29}{e}$

Haciendo un diagrama de cuerpo libre:



$\Rightarrow E = w_{carga} + w_{globo}$

$\Rightarrow \rho_{aire} \cdot g\, V_{globo} = 400\, g + \rho_{He}\, g\, V_{globo}$

$$V_{globo}\left(\frac{1{,}29}{e} - 0{,}18\right) = 400$$

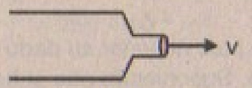
$\therefore V_{globo\ de\ helio} = 1\,430\ m^3$ ~ 1357,93 m³

DINÁMICA DE FLUIDOS Y LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

36. La tasa de flujo de agua por un tubo horizontal es $2{,}00\ m^3/min$. Determine la velocidad del flujo en un punto donde el diámetro del tubo es a) 10,0 cm, b) 5,0 cm.

Resolución :

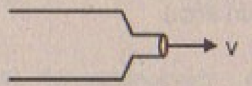
Parte (a) Q = flujo de agua.



Diámetro: 10,0 cm

$\dfrac{\text{Volumen}}{t} = \dfrac{2{,}00}{60} = \pi(0{,}05)^2 \cdot v \qquad \therefore\ v = 4{,}24\ m/s$

Parte (b)



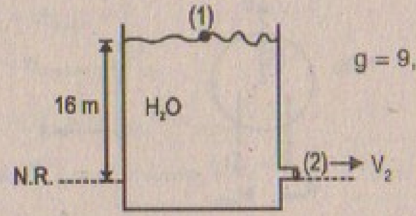
Diámetro = 5,0 cm

Entonces como: $\dfrac{2{,}00}{60} = \pi\left(\dfrac{0{,}05}{2}\right)^2 \cdot v \qquad \therefore\ v = 16{,}98\ m/s$

37. En un gran tanque de almacenamiento lleno de agua se forma un pequeño hoyo en su costado en un punto 16 m debajo del nivel de agua. Si la tasa de flujo de la fuga es $2{,}5 \times 10^{-3}\ m^3/min$, determine a) la velocidad a la cual el agua sale por el hoyo, y b) el diámetro de éste.

37A. En un gran tanque de almacenamiento lleno de agua se forma un pequeño hoyo en su costado en un punto a una distancia h debajo del nivel de agua. Si la tasa de flujo de la fuga es Rm^3/min, determine a) la velocidad a la cual el agua sale por el hoyo, y b) el diámetro de éste.

Resolución :



$g = 9{,}80\ m/s^2$

Por Bernoulli: $P_o + \rho g(16) + \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 = P_o + \rho g(0) + \frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2(9{,}8)(16)} = 17{,}7\ m/s$$

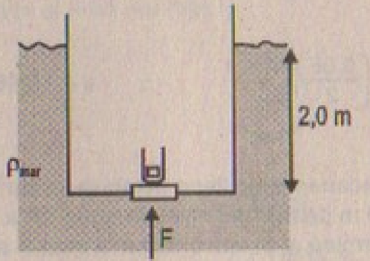
Parte (b)

Por continuidad: $\frac{2{,}5\times10^{-3}}{60} = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \times (17{,}7)$

$$\Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{(2{,}5)(4)\times10^{-3}}{(60)(3{,}1416)(17{,}7)}} = 0{,}173 \times 10^{-2}\ m \ \equiv 1{,}73\ mm$$

38. El legendario niño holandés que salvó a su país al poner su dedo en el hoyo de un dique tenía un dedo de 1,2 cm de diámetro. Suponiendo que el hoyo estaba 2,0 m debajo de la superficie del mar (densidad de 1 030 kg/m³), a) ¿cuál es la fuerza sobre su dedo? b) Si quita su dedo del hoyo, ¿cuánto tardaría al agua liberada en inundar un acre de tierra a una profundidad de un pie suponiendo que el hoyo permanece del mismo tamaño. (Una familia estadounidense común de cuatro miembros utiliza esta gran cantidad de agua en un año.)

Resolución :



$\rho_{mar} = 1\ 030\ kg/m^3$

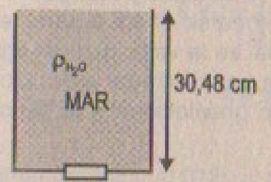
Diámetro = 1,2 cm

Parte (a)

$$F_{\text{sobre su dedo}} = \text{Empuje} = \rho_{H_2O\ mar} \cdot g\, V = \rho_{H_2O\ mar}\, g(2)\pi \left[\frac{0{,}012}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad F_{\text{sobre su dedo}} = (1\ 030)(9{,}8)(3{,}1416)(2)\left[\frac{0{,}012}{2}\right]^2 = 2{,}28\ N$$

Parte (b)



Por Torrichelli: $v = \sqrt{2g\,(0{,}3)} = 2{,}44\ m/s$

Por continuidad: $A.v = \frac{V}{t}$

$$\Rightarrow \quad \pi\,\frac{(0{,}012)^2}{2} \cdot 2{,}44 = \frac{\pi\left(\frac{0{,}012}{2}\right)^2 \cdot (0{,}3043)}{t}$$

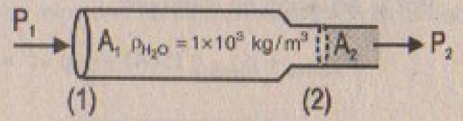
$$\therefore \quad t = 0{,}125\ s$$

39. Un tubo horizontal de 10,0 cm de diámetro tiene una reducción uniforme que lo conecta con un tubo de 5,0 cm de diámetro. Si la presión del agua en el tubo más grande es $8{,}0 \times 10^4$ Pa y la presión en el tubo más pequeño es $6{,}0 \times 10^4$ Pa, ¿a qué tasa circula el agua a través de los tubos?

Resolución :

Datos:

$P_1 = 8 \times 10^4$ Pa ; $P_2 = 6 \times 10^4$ Pa



$$A_1 = \pi\left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 25\pi \times 10^{-4}\ m^2$$

$$A_2 = \pi\left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 = 625\pi \times 10^{-6}\ m^2$$

Por Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Por otro lado: Por continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$

$$\Rightarrow \quad 2(P_1 - P_2) = \rho\, v_1^2 \left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right]$$

Reemplazando:

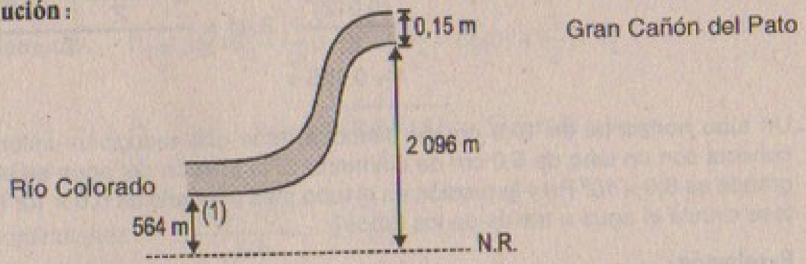
$$2(8 \times 10^4 - 6 \times 10^4) = (1 \times 10^3) \cdot v_1^2 \left[\frac{(25\pi\times10^{-4})^2 - (625\pi\times10^{-6})^2}{(625\pi\times10^{-6})^2}\right]$$

$$\therefore \quad v_1 = 1{,}638\ m/s$$

En consecuencia: $\frac{\text{Volumen}}{t} = (25\pi \times 10^{-4}) \times (1{,}638) = 0{,}0128\ m^3/s$

40. Se bombea agua desde el río Colorado hasta la Villa del Gran Cañón a través de una tubería de 15,0 cm de diámetro. El río está a 564 m de altura y el pueblo a 2 096 m. a) ¿Cuál es la presión mínima con que debe bombearse el agua para llegar a la población? b) Si se bombea 4 500 m³ diarios, ¿cuál es la velocidad del agua en la tubería? c) ¿Cuál es la presión adicional necesaria para entregar este flujo? (Nota: Usted puede suponer que la intensidad del campo gravitacional y la densidad del aire son constantes en este intervalo de alturas.)

Resolución:



Parte (a)

Por la ecuación de Bernoulli:

$$P_{minima} + \rho_{H_2O}\, g\,(564) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_{atm} + \rho_{H_2O}\cdot g(2\,096) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Por continuidad: $A_1v_1 = A_2v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \dfrac{A_1\,v_1}{A_2}$

Entonces despejando:

$$P_{minima} = P_{atm} + \rho\, g(1\,532) - \frac{1}{2}\cdot v_1^2\left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right] \quad \text{(Presión atmosférica)}$$

$$\Rightarrow \quad P_{minima} = 1{,}013 \times 10^5 + (1 \times 10^3)(9{,}80)(1\,532)$$

$$\therefore \quad P_{mínima} = 151{,}15 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{V}{t} = \dfrac{4\,500\text{ m}^3}{24\text{ horas}} \Rightarrow \dfrac{4\,500}{24} \times \dfrac{1}{3\,600\text{ s}} = \pi\left(\dfrac{0{,}15}{2}\right)^2 .v$

$$\therefore \quad v = 2{,}95 \text{ m/s}$$

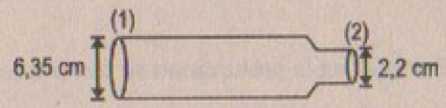
Parte (c)

La presión adicional será la presión dinámica, entonces:

$$P_{adicional} = \frac{1}{2}(1 \times 10^3)(2{,}95)^2 = 4{,}34 \times 10^3 \text{ Pa}$$

41. Por una manguera contra incendios de 6,35 cm de diámetro fluye agua a una tasa de 0,0120 m³/s. La manguera termina en una boquilla de diámetro interior igual a 2,20 cm. ¿Cuál es la velocidad con la cual el agua sale de la boquilla?

Resolución:



La tasa de flujo es: 0,0120 m³/s

Sabemos que: $0{,}0120 = \pi\left[\dfrac{6{,}35}{2}\times 10^{-2}\right]^2 v_1 \qquad \therefore \quad v_1 = 3{,}789 \text{ m/s}$

Por continuidad: $A_1v_1 = A_2v_2$

$$\Rightarrow \quad \pi\left[\frac{6{,}35}{2}\times 10^{-2}\right]^2(3{,}789) = \pi\left[\frac{2{,}2}{2}\times 10^{-2}\right]v_2$$

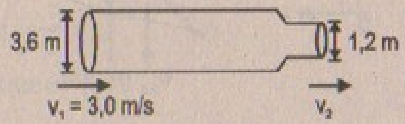
$$\therefore \quad v_2 = 31{,}6 \text{ m/s}$$

42. El túnel de agua Garfield Thomas en la Universidad Estatal de Pensilvania tiene una sección transversal circular que se acorta desde un diámetro de 3,6 m hasta la sección de prueba, cuyo diámetro es de 1,2 m. Si la velocidad de flujo es 3,0 m/s en la tubería de mayor diámetro, determine la velocidad de flujo en la sección de prueba.

Resolución:

Por continuidad:

$$\pi\left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 v_1 = \pi\left(\frac{1{,}2}{2}\right)^2 v_2$$



$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2(3{,}0) = \left(\frac{1{,}2}{2}\right)^2 v_2$$

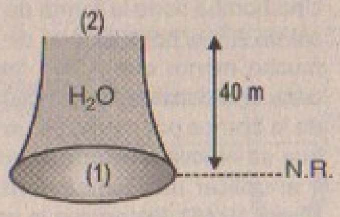
$$\therefore \quad v_2 = 27 \text{ m/s}$$

43. El géiser Old Faithful en el parque Yellowstone genera erupciones en intervalos de aproximadamente 1 hora, y la altura de la fuente alcanza 40 m. a) ¿Con qué velocidad sale agua del suelo? b) ¿Cuál es la presión (arriba de la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m?

Resolución:

Parte (a)

Por el principio de Bernoulli se cumple que:



$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_{salida}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{salida} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81)(40)} = 28 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Por el principio de Bernoulli en la profundidad se cumple que:

$$P_{total} = P_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$$

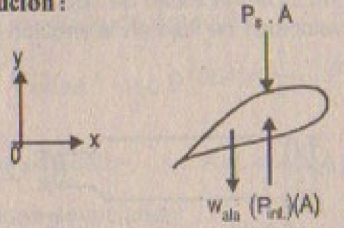
$$\Rightarrow \quad P_{total} = 1{,}013 \times 10^5 + (1000)(9{,}81)(175) + \frac{1}{2} \times (1\,000)(28)^2$$

$$\therefore \quad P_{total} = 22{,}1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

OTRAS APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

44. Un avión tiene una masa de $1{,}6 \times 10^4$ kg y cada ala tiene un área de 40,0 m². Durante un vuelo horizontal, la presión sobre la superficie inferior del ala es $7{,}0 \times 10^4$ Pa. Determine la presión sobre la superficie superior del ala.

Resolución :



Área del ala = 40,0 m²

Masa del ala = $1{,}6 \times 10^4$ kg

$P_{inf} = 7{,}0 \times 10^4$ Pa

Por el principio de Arquímedes $\quad \Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow \quad w_{ala} = \text{Empuje} = (P_{inf} - P_{sup})\,A$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}6 \times 10^4)(9{,}8) = (7{,}0 \times 10^4)(40{,}0) - P_{sup}\,(40)$$

$$\Rightarrow \quad P_{superior} = \frac{280 \times 10^4 - 15{,}68 \times 10^4}{40} \qquad \therefore \quad P_{superior} = 6{,}6 \times 10^4 \text{ Pa}$$

45. Una bomba tiene la forma de un cilindro horizontal con un área de sección transversal de A y el hoyo abierto de área de sección transversal **a** de modo que ésta es mucho menor que A. Un fluido que tiene una densidad ρ se obliga a salir de la bomba por medio de un émbolo que se mueve a velocidad constante v al aplicar una fuerza constante F (Fig. P15.45). Determine la velocidad w del chorro del fluido.

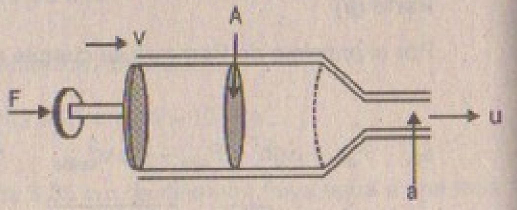


Figura P15.45

Resolución :

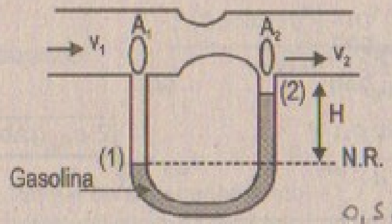
Por continuidad: $\qquad A.v = au \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{A.v}{a}$

46. Un tubo de Venturi puede utilizarse como un medidor de flujo de fluido (Fig. 15.16). Si la diferencia en la presión $P_1 - P_2 = 21$ kPa, encuentre la tasa de flujo del fluido en m³/s dado que el radio del tubo de salida es 1,0 cm. El radio del tubo de entrada es 2,0 cm y el fluido es gasolina (ρ = 700 kg/m³).

no hacer, tiene errores

0,5 cm

Resolución :



$\rho_{gasolina}$ = 700 kg/m³ $\quad$ 100 kPa = 10^5 N/m²

$P_1 - P_2 = 21$ kPa $\quad$ 1 kPA = 10^3 N/m²

Radio de salida = 1,0 cm

Radio de entrada = ~~2,0 cm~~ 0,5 cm

Tiene errores

Por continuidad: $\qquad v_1\,\pi(1{,}0)^2 = v_2\pi(\underbrace{0{,}5}_{0{,}5\text{ cm}})^2 \qquad \ldots (1)$

$Q = A_1 \cdot v_1$ ó

$Q = A_2 \cdot v_2$

Por otro lado por el principio de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \rho.g(0) + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 \qquad \ldots (2)$$

Además por el principio de la hidrostática:

$$P_1 = P_2 + \rho g H \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho g H = 21 \text{ kPa}$$

Luego: $\qquad 21\text{kPa} = \frac{1}{2}(700)(15).\,v_1^2 \qquad \therefore \quad \cancel{v_1 = 0{,}063 \text{ m/s}} \quad V_1 = 2$ m/s

$2 \cdot 10^3$ N/m²

Entonces: De (1)

$$Q = (\underbrace{0{,}063}_{v_1})(10^3)\underbrace{(3{,}1416)(0{,}0001)}_{A_1 = \pi \cdot (0{,}01)^2 \text{ m}^2} = \frac{\text{Volumen}}{t} = \cancel{0{,}02 \text{ m}^3\text{/s}} = 6{,}28 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

2 m/s

47. Con un tubo de Pitot se puede determinar la velocidad del flujo de aire al medir la diferencia entre la presión total y la presión estática (Fig. P15.47). Si el fluido en el tubo es mercurio, densidad ρ_{Hg} = 13 600 kg/m³ y Δh = 5,00 cm, encuentre la velocidad del flujo de aire. (Suponga que el aire está estancado en el punto A y considere ρ_{aire} = 1,25 kg/m³.)

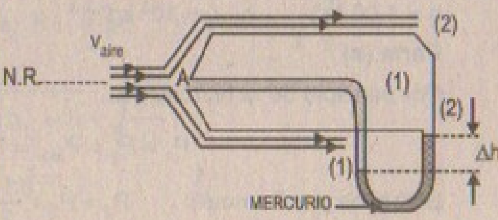


Figura P15.47

Resolución :

$\rho_{Hg} = 13,6 \times 10^3\ kg/m^3$; $\Delta h = 5 \times 10^{-2}$ m
$\rho_{aire} = 1,25\ kg/m^3$

Por Bernoulli: $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = cte$

Entonces: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_{aire} v^2 \quad ...(1)$

Por otro lado:
Por el principio de la Hidrostática:

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g \Delta h$

$P_1 - P_2 = \rho_{Hg} g \Delta h \quad ...(2)$

Luego (2) en (1) $\rho_{Hg}\, g\, \Delta h = \frac{1}{2}\rho_{aire} . v^2 \Rightarrow v_{aire} = \sqrt{\dfrac{2.\rho_{Hg}\, g\, \Delta h}{\rho_{aire}}}$

Reemplazando: $v_{aire} = \sqrt{\dfrac{2(13\ 600)(9,8)(0,05)}{1,25}}$

$\therefore \quad v_{aire} = 103$ m/s

48. En la figura P15.48 se muestra un sifón con el que se extrae agua de un tanque. El sifón tiene un diámetro uniforme. Considere flujo estable. a) Si la distancia h = 1,00 m, encuentre la velocidad del flujo de salida en el extremo del sifón. b) ¿Cuál es el límite de la altura de la parte superior del sifón sobre la superficie del agua? (Con el fin de tener un flujo continuo de líquido, la presión no debe descender por debajo de la presión de vapor del líquido.)

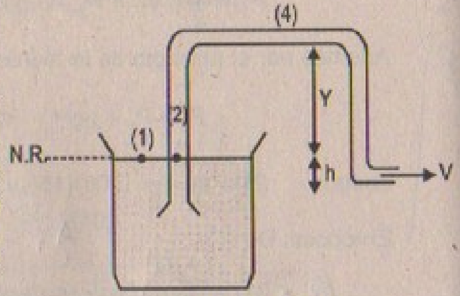


Figura P15.48

Resolución :

h = 1,00 m ; $\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3$

Parte (a)

Por principio de la hidrostática:

$$P_1 = P_2 = P_{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Entonces por Bernoulli: $P_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho . v_3^2 - \rho gh$

$\Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(1)} = 4,43$ m/s

Parte (b)

Por continuidad: $A_4 v_4 = A_3 v_3 \quad \therefore \quad v_4 = v_3$

Entonces por Bernoulli: $P_2 = P_4$

$\Rightarrow \quad P_{atm} = \frac{1}{2}\rho . v_3^2 + \rho gY \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2P_{atm} - 2\rho g . Y}{\rho} = v_3^2$

Despejando: «Y» $\dfrac{-\rho v_3^2 + 2P_{atm}}{2\rho g} = Y$

Reemplazando: $\dfrac{2\left(1{,}013 \times 10^5\right) - 10^3(2)(9{,}8)(1)}{2\left(10^3\right)(9{,}8)} = Y$

$\therefore \quad Y = 9,34$ m

49. Un gran tanque de almacenamiento se llena hasta una altura h_o. Si el tanque se perfora a una altura h medida desde el fondo del tanque (Fig. P15.49), ¿a qué distancia del tanque cae la corriente?

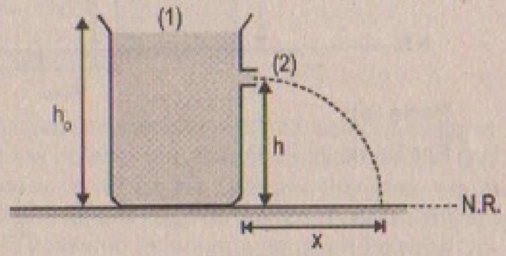


Figura P15.49

Resolución :

$A_1 >> A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 0$

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho . gh_0 = P_{atm} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\therefore \quad v_2 = \sqrt{2g(h_o - h)}$

Luego: Por movimiento de proyectiles: $h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

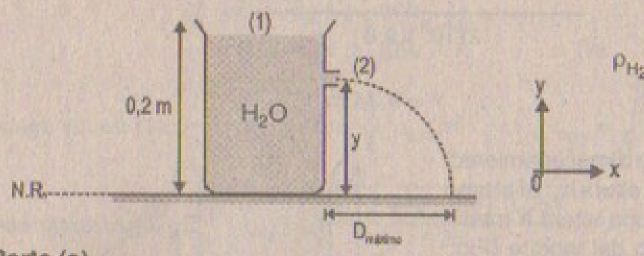
Entonces: $x = v_2 t = \sqrt{2g(h_o - h)} \times \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$\therefore \quad x = 2(h[h_o - h])^{1/2}$

50. Se perfora un hoyo en el costado de un recipiente lleno de agua de 20 cm de altura, como se ilustra en la figura P15.49. Si lo que se quiere es que el agua llegue lo más lejos posible horizontalmente, a) ¿a qué distancia del fondo del recipiente debe perforarse el hoyo? b) Si se ignoran las pérdidas por fricción, ¿a qué distancia (inicialmente) desde el costado del recipiente llegará el agua al suelo?

50A. Se perfora un hoyo en el costado de un recipiente lleno de agua de altura h, como se ilustra en la figura P15.49. Si lo que se quiere es que el agua llegue lo más lejos posible horizontalmente, a) ¿a qué distancia del fondo del recipiente debe perforarse el hoyo? b) Si se ignoran las pérdidas por fricción, ¿a qué distancia (inicialmente) desde el costado del recipiente llegará el agua al suelo?

Resolución:



$\rho_{H_2O} = 1{,}0 \times 10^3$ kg/m³

Parte (a)

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho.g(0{,}2) = P_{atm} + \rho.g(y) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(0{,}2-y)} \quad ...(1)$

Por otro lado por movimiento de proyectiles:

En el eje y: $\quad y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

En el eje x: $\quad D_{máx} = v_2 \times t = \sqrt{4y\,(0{,}2-y)}$

Como: $\quad 4y(0{,}2-y) \geq 0 \Rightarrow y(y-0{,}2) \leq 0$

$\therefore \quad y \in [0; 0{,}2]$ m

Luego el hoyo debe de perforarse aproximadamente a la altura del recipiente o entre dicho intervalo.

Parte (b)

Si tomamos un valor en dicho intervalo

Sea: y = 0,198 m

$\Rightarrow \quad D_{máximo} = \sqrt{4(0{,}198)(0{,}2-0{,}198)} \quad \therefore \quad D_{máximo} = 0{,}04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$

ENERGÍA DEL VIENTO

51. Calcule la salida de potencia de un molino de viento que tiene aspas de 10,0 m de diámetro si la velocidad del viento es de 8,0 m/s. Suponga que la eficiencia del sistema es igual a 20%.

Resolución:

Sabemos que $\quad A = \pi.R^2 = (3{,}1416)\left(\frac{10{,}0}{2}\right)^2 = 78{,}54 \text{ m}^2 \qquad$ Nota: $\rho_{aire} = 1{,}2$ kg/m³

La potencia máxima con una eficiencia de 100% sería:

$$\text{Potencia máxima} = \frac{1}{2}\rho_{aire}v^3A = \frac{1}{2}(1{,}20)(8)^3(78{,}54)$$

$\therefore \quad$ Potencia máxima = 24,127 kW

Pero como la eficiencia del sistema es 20% entonces:

24,127 — 100%
x — 20%
$\therefore \quad x = 4{,}83$ kW

52. De acuerdo con un plan bastante ambicioso, se necesitarían 50 000 aerogeneradores, cada uno con 800 pies de diámetro, para obtener una salida promedio de 200 GW. Éstos se localizarían estratégicamente a través de las Grandes Planicies, en las Islas Aleutianas y sobre plataformas flotantes a lo largo de las costas del Atlántico y el Golfo y sobre los Grandes Lagos. El consumo de energía anual en Estados Unidos en 1980 fue aproximadamente de $8{,}3 \times 10^{10}$ J. ¿Qué fracción de esta cantidad sería suministrada por los aerogeneradores?

Resolución:

Por conversión: 1 pie = 30,48 cm, luego diámetro = 800 pies = 243,84 m

Entonces $\quad A = \pi(121{,}92)^2 = 4{,}67 \times 10^4 \text{ m}^2$

Además: $\quad$ Potencia (promedio) $= 200 \text{ GW} = \frac{1}{2}\rho_{aire}v^3A = \frac{2\times10^{11}\text{ W}}{5\times10^4}$

$\therefore \quad v_{salida} = 5{,}23$ m/s (cada generador)

Entonces la energía cinética anual de los 50 000 generadores será:

$$E_c = P \times 1 \text{ año} \Rightarrow \frac{E_c}{\text{año}} = 2\times10^{11}\frac{J}{s} \times 365 \text{ días} \times \frac{24\text{ h}}{1\text{ día}} \times \frac{3\,600\text{ s}}{1\text{ h}}$$

$\therefore \quad E_c = 6{,}3 \times 10^{18}$ J/año

Si: $\quad E_c$/año en (EE.UU) ----- $8{,}3 \times 10^{19}$ J ---- 1

$\Rightarrow \quad E_c$/año (generadores) ----- $6{,}3 \times 10^{18}$ ---- x

$\therefore \quad x = 63/830$

53. Considere un aerogenerador con aspas de área de sección transversal A, como el de la figura P15.53, y suponga que el aerogenerador está directamente enfrente del viento. Si la velocidad del viento es v, demuestre que la energía cinética del aire que pasa libremente a través de un área A en un tiempo Δt es $K = 1/2\rho\, Av^3\, \Delta t$. ¿Por qué no es posible que las aspas extraigan esta cantidad de energía cinética?

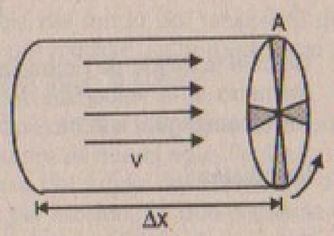


Figura P15.53

Resolución :

Por demostrar $K = \frac{1}{2}\rho A v^3 \Delta t$

Sabemos que: $\frac{E_c}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\rho\, v^2$ ... (1)

Por otro lado:

Por continuidad $\frac{\text{Volumen}}{\Delta t} = A.v \Rightarrow \text{Volumen} = Av\Delta t$

Luego: (1) $E_c = \frac{1}{2}\rho . v^2 \text{ (volumen)}$

$\therefore\ E_c = \frac{1}{2}\rho v^3 A \Delta t$ l.q.q.d.

PROBLEMAS ADICIONALES

54. El suministro de agua de un edificio se alimenta a través de una tubería principal de 6,0 cm de diámetro. Se observa que una llave de 2,0 cm de diámetro localizada 2,0 m arriba de la tubería principal llena un recipiente de 25 litros en 30,0 s. a) ¿Cuál es la velocidad a la cual el agua sale de la llave? b) ¿Cuál es la *presión manométrica* en la tubería principal de 6,0 cm? (Suponga que la llave es la única «fuga» en el edificio.)

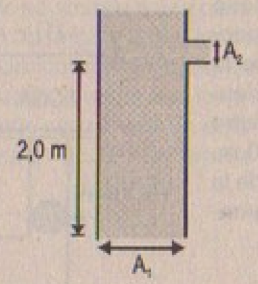
Resolución :

Parte (a)
Nos piden la velocidad a la cual sale el agua a través de la llave cuyo diametro es 2,0 cm. Entonces:

Por continuidad: $A.v = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}}$

$\Rightarrow \pi\left(\frac{2,0}{2}\right)^2 v = \frac{25\times10^3}{30\text{ s}}\text{ cm}^3 \qquad \therefore\ v = 2,65\text{ m/s}$

Parte (b)



$$A_1 = \pi\left(\frac{6,0}{2}\times10^{-2}\right)^2$$

$$A_2 = \pi\left(\frac{2,0}{2}\times10^{-2}\right)^2$$

$$P_{\text{manométrica}} = P_{\text{absoluta}} - P_{\text{atmosférica}}$$

Entonces por Bernoulli: $P_{\text{absoluta}} = P_{\text{atm}} + \rho_{H_2O}\times\frac{1}{2}v^2 + \rho.g(2,0)$

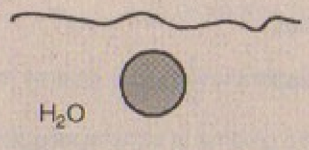
$$P_{\text{manométrica}} = \rho_{H_2O}\, g(2,0) + \frac{\rho_{H_2O}}{2}(2,65)^2$$

$$P_{\text{manométrica}} = 1\times10^3\left[(9,8)(2,0) + \frac{(2,65)^2}{2}\right]$$

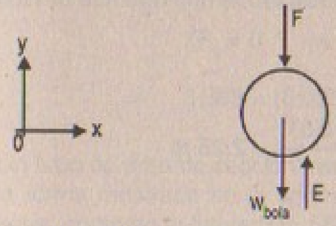
$$\therefore\ P_{\text{manométrica}} = 23,1\text{ kPa}$$

55. Una bola de ping pong tiene un diámetro de 3,8 cm y una densidad promedio de 0,084 g/cm³. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

Resolución :



Diámetro bola = 3,8 cm
$\rho_{\text{Bola}} = 0,084\text{ g/cm}^3$
$\rho_{H_2O} = 1\text{ g/cm}^3$



Como E > w $\Rightarrow$

F tiene que estar en el sentido del peso para mantener a la bola completamente sumergida en agua.

Luego: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F = E - w = \rho_{H_2O}\cdot gv - \rho_B gv$

$\Rightarrow F = [10^3(9,8) - (0,084)(10^3)(9,8)]\,\frac{4}{3}\pi(0,019)^3$

$\therefore\ F = 0,258\text{ N}$

56. La figura P15.56 muestra un tanque de agua con una válvula en el fondo. Si esta válvula se abre, ¿cuál es la máxima altura que alcanza la corriente de agua al salir del lado derecho del tanque? Suponga que h = 10 m, L = 2,0 m y θ = 30°, y que el área de la sección transversal en A es muy grande comparada con la de B.

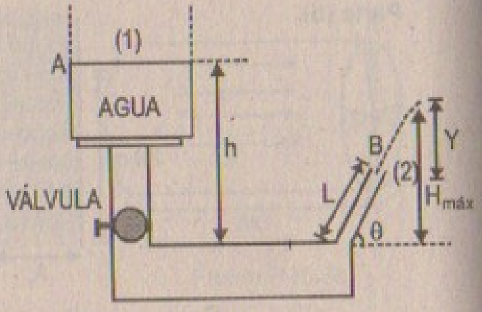


Figura P15.56

Resolución :

h = 10,0 m ; L = 2,0 m

θ = 30° ; A > B

Por Bernoulli: $P_1 = P_2$

$$P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot gh + \frac{1}{2}\rho_{H_2O} \cdot v_1^2 = P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g(L\,sen30°) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como: $A > B \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 0$

Entonces: $\rho_{H_2O} \cdot gh - \rho_{H_2O} gL\,sen30° = \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\therefore \quad v_2 = 13{,}28 \text{ m/s} \qquad \dots (1)$

Luego: Por movimiento de proyectiles:

$$H_{máximo} = v_2 sen30° . t - \frac{1}{2}gt^2$$

Por otro lado: $0 = v_2 sen30° - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_2\,sen30°}{g}$

Luego: $H_{máximo} = \dfrac{v_2^2\,sen^2\,30°}{2g}$

Reemplazando: $H_{máximo} = \dfrac{(2)(9{,}80)(9)(0{,}5)^2}{2\,(9{,}8)} = 2{,}25 \text{ m}$

Pero como nos piden «Y»

Entonces: $Y = H_{máx} - L sen30° = 2{,}25 - (2)(0{,}5) = 1{,}25 \text{ m}$

Nota:
"Y" viene a ser la altura máxima que alcanza el agua al salir del lado derecho del tanque de área "B".

57. Un globo lleno de helio se amarra a una cuerda uniforme de 2,0 m de largo y 0,050 kg de peso. El globo es esférico con un radio de 0,40 m. Cuando se suelta, levanta una longitud, h, de cuerda, y luego permanece en equilibrio, como en la figura P15.57. Determine el valor de h.

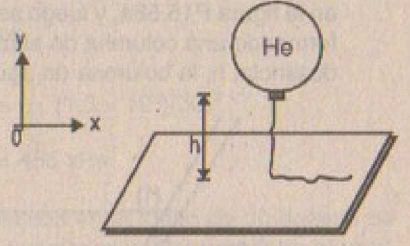


Figura P15.57

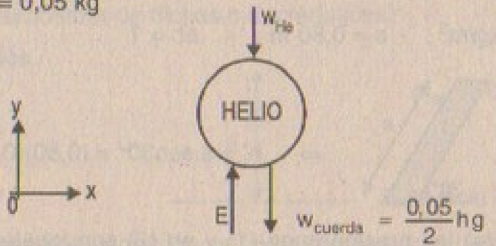
Resolución :

Radio = 0,4 m ; $L_{cuerda} = 2{,}0$ m

$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³ ; $\rho_{helio} = 0{,}18$ kg/m³

$M_{cuerda} = 0{,}05$ kg

D.C.L



Sabemos que $W_{helio} = \rho_{He}\, g \frac{4}{3}\pi (0{,}4)^3 = (0{,}18)(9{,}8)\left(\frac{4}{3}\right)(3{,}1416)(0{,}4)^3 = 0{,}473$ N

Inicialmente $W_{cuerda} = (0{,}05)(9{,}8) = 0{,}49$ N

Sabemos que empuje $= \rho_{aire} g(\text{Volumen}) = (1{,}29)(9{,}8)\left(\frac{4}{3}\right)(3{,}1416)(0{,}4)^3 = 3{,}389$ N

Inicialmente: W_{He} es inferida al empuje para poder equilibrar al globo lo que produce que el globo se eleve. Cuando el globo alcanza una altura h de cuerda, el peso de la cuerda sumado con el del globo con helio equilibrará al empuje entonces:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E = W_c + W_{He}$$

$$\Rightarrow \quad 3{,}389 = (0{,}025)(9{,}8)h + 0{,}473 \qquad \therefore \quad h = 1{,}91 \text{ m}$$

58. Un tubo de área de sección transversal uniforme está abierto a la atmósfera y tiene la forma mostrada en la figura P15.58, con θ = 30,0°. Está inicialmente lleno de agua, como en la figura P15.58a, y luego se le vierte aceite (densidad = 750 kg/m³) en el brazo izquierdo, formando una columna de 0,80 m de largo (altura de la inclinación, s), como en la figura P15.58b. ¿Qué distancia, h, la columna de agua asciende en el brazo derecho?

58A. Un tubo de área de sección transversal uniforme está abierto a la atmósfera y tiene la forma mostrada en la figura P15.58. Está inicialmene lleno de agua, como en la figura P15.58a, y luego se le vierte aceite de densidad ρ_0 en el brazo izquierdo, formando una columna de altura de inclinación s, como en la figura P15.58b. ¿Qué distancia, h, la columna de agua asciende en el brazo derecho?

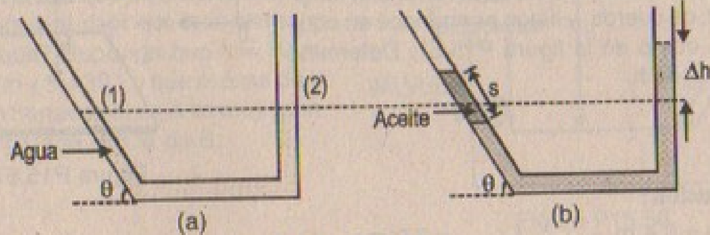
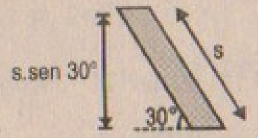


Figura P15.58

Resolución :

Datos:

$\theta = 30°$; $\rho_{aceite} = 750\ kg/m^3$; $s = 0{,}80\ m$; $\Delta h = ?$



$\Rightarrow\ h' = s.sen30° = (0{,}80)(0{,}5) = 0{,}4\ m$

Inicialmente en el tubo (a) las presiones en (1) y en (2) son iguales. Cuando se agrega aceite la presión en (1) aumenta y por consiguiente en (2) también aumentará por el principio de Pascal; luego:

$$P_1 = P_2$$

$$\Rightarrow\ P_{atm} + \rho_{aceite}\,gh' = P_{atm} + \rho_{H_2O}.g\Delta h$$

$$\Rightarrow\ (750)(0{,}4) = (10^3)(\Delta h)$$

$$\Rightarrow\ \Delta h = \frac{(750)(0{,}4)}{1\,000} \qquad \therefore\ \Delta h = 0{,}3\ m$$

59. De un extinguidor contra incendios sale agua bajo presión de aire, como se muestra en la figura P15.59. ¿Qué tanta presión de aire manométrica (arriba de la atmosférica) se requiere para que el chorro de agua tenga una velocidad de 30 m/s cuando el nivel del agua está a 0,50 m debajo de la boquilla?

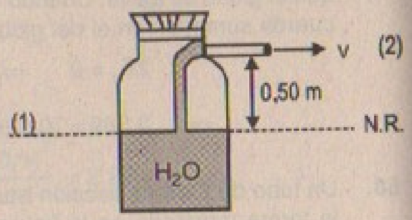


Figura P15.59

Resolución :

$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3\ kg/m^3$; $P_{atm} = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

Por dato: $v = 30\ m/s$

Por Bernoulli, como: $P_1 = P_2 = P_{absoluta}$

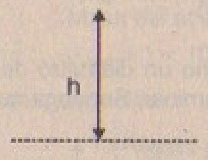
$$\Rightarrow\ P_{absoluta} = \rho_{H_2O}\cdot g(0{,}5) + P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow\ P_{absoluta} - P_{atm} = (1 \times 10^3)(9{,}8)(0{,}5) + \frac{1}{2}\,(1{,}0 \times 10^3)(30)^2$$

$$\Rightarrow\ P_{manométrica} = 4{,}9 \times 10^3 + 450 \times 10^3 = 455\ kPa$$

60. Torricelli fue el primero en darse cuenta que vivimos en el fondo de un océano de aire. Supuso correctamente que la presión de nuestra atmósfera se debe al peso del aire. La densidad disminuye al aumentar la altura cuando la atmósfera se hace menos densa. Si suponemos que la densidad es constante (1,29 kg/m³) hasta cierta altura h, y 0 arriba, entonces h representaría el espesor de nuestra atmósfera. Utilice este modelo para determinar el valor de h que produce una presión de 1,0 atm en la superficie de la Tierra. ¿La cima del monte Everest estaría arriba de la superficie de una atmósfera de dichas características?

Resolución :



$\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$

En la superficie la presión es una atmósfera (por dato).

Entonces: $1\ atm = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$

$$\Rightarrow\ 1{,}013 \times 10^5\ Pa = \rho_{aire}\,gh \qquad \Rightarrow\ 1{,}013 \times 10^5 = (1{,}29)(9{,}8)h$$

$$\therefore\ h = 8{,}013 \times 10^3\ m$$

61. El peso real de un cuerpo es su peso cuando se mide en un vacío donde no hay fuerzas de flotación. Un cuerpo de volumen V se pesa en el aire sobre una balanza utilizando pesas de densidad ρ. Si la densidad del aire es ρ_0 y la balanza registra un valor w', muestre que el peso real w es $w = w' + \left(V - \frac{w'}{\rho g}\right)\rho_0 g$

Resolución :

Sabemos que: E = Peso del fluido desalojado $= \rho_0\,gV''$

Además: $w' = w - E = w - \rho_0\,g(V - V')$

Pero: $\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad mg = \rho g.V$

$$\therefore\ w' = \rho g.V'$$

Luego: $w' = w - \rho_0\,g\left(V - \frac{W'}{\rho.g}\right)$

$$\therefore\ w = \text{peso real} = w' + \left(V - \frac{w'}{\rho.g}\right).\rho_0 g \qquad \text{l.q.q.d.}$$

62. Una boya de madera tiene un diámetro de 1,20 cm. Flota en agua con 0,40 cm de su diámetro fuera (Fig. P15.62). Determine la densidad de la boya.

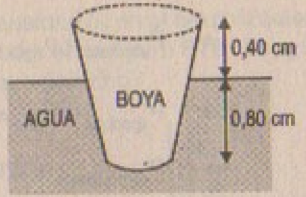


Figura P15.62

Resolución :

Diámetro = 1,2 cm

$\rho_{boya} = ?$

Por equilibrio: $W_{boya} = \text{Empuje}$

$\Rightarrow \quad \rho_{boya} \cdot gA\,(1,2) = \rho_{H_2O} \cdot gA(0,8) \qquad \Rightarrow \quad \rho_{boya} = \dfrac{1\text{ g}}{\text{cm}^3} \times \dfrac{0,8\text{ cm}}{1,2\text{ cm}}$

$\therefore \quad \rho_{boya} = 0,67\text{ g/cm}^3$

63. Una tubería que conduce agua tiene un diámetro de 2,5 cm. Calcule la máxima velocidad de flujo si éste va a ser laminar. Suponga que la temperatura es 20° C.

Resolución :

Sea la figura:

Donde:
Diámetro = 2,5 cm

Sabemos que por la ecuación de Bernoulli se cumple que:

$$v_{salida} = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Como me piden: $v_{salida\ máxima;}$ Entonces:

$P_1 >> P_2$: entonces $P_2 \approx$ mínima y $A_2 \approx$ mínima

Luego: $A_1^2 - A_2^2 \approx 1 \quad \wedge \quad P_1 - P_2 = \text{Máxima}$

Entonces: $v_{máxima} = \dfrac{\pi}{4}(2,5)^2 \times \sqrt{\dfrac{2(100)}{1\,000}}$

$\therefore \quad v_{máxima} = 8\text{ cm/s}$

64. Un vaso de laboratorio de 1,0 kg que contiene 2,0 kg de aceite (densidad = 916,0 kg/m³) descansa sobre una balanza. Un bloque de hierro de 2,0 kg se suspende de una balanza de resorte y se sumerge por completo en el aceite, como muestra la figura P15.64. Determine las lecturas de equilibrio de estas balanzas.

64A. Un vaso de laboratorio de masa m_b contiene aceite de masa m_0 (densidad = ρ_0) descansa sobre una balanza. Un bloque de hierro de masa m_i se suspende de una balanza de resorte y se sumerge por completo en el aceite, como muestra la figura P15.64. Determine las lecturas de equilibrio de las balanzas.

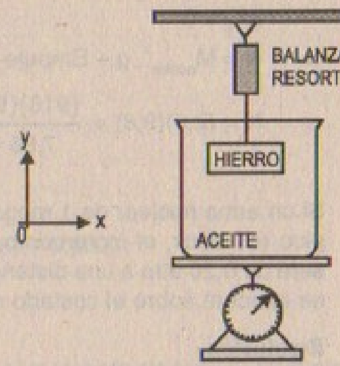


Figura P15.64

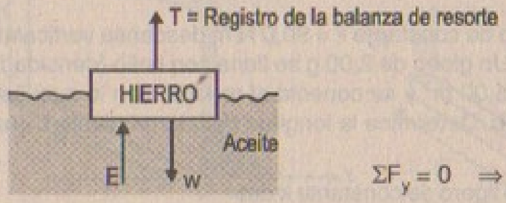
Resolución :

Masa del vaso = 1,0 kg ; Masa del hierro = 2,0 kg

$\rho_{aceite} = 916,0\text{ kg/m}^3$; Masa del aceite = 2,0 kg

$\rho_{hierro} = 7,86 \times 10^3\text{ kg/m}^3$; $\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3$ kg/m = 3

Haciendo el diagrama de cuerpo libre:



$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + E = w$

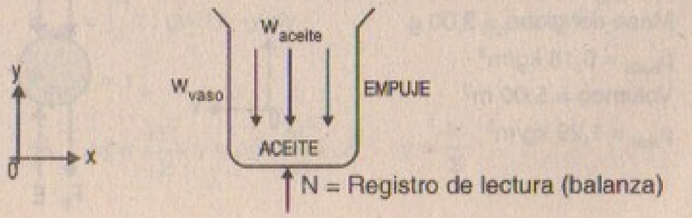
$\Rightarrow \quad \text{Registro de lectura} = \dfrac{-\rho_{aceite} \cdot g \cdot M_{hierro}}{\rho_{hierro}} + M_{hierro} \cdot g$

$\Rightarrow \quad \text{Registro de lectura} = M_{hierro} \cdot g \left[\dfrac{-\rho_{aceite} + \rho_{hierro}}{\rho_{hierro}}\right]$

Reemplazando: $\text{Registro de lectura} = (2,0)(9,8) \cdot \left[\dfrac{-916 + 7,86 \times 10^3}{7,86 \times 10^3}\right]$

$\therefore$ Registro de lectura = 17,32 N
(balanza de resorte)

Por otro lado:



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad N = M_{aceite} \cdot g + \text{Empuje} + M_{vaso} \cdot g$

$\therefore \quad N = (2,0)(9,8) + \dfrac{(916)(9,8)(2)}{7,86 \times 10^3} + (1,0)(9,8) = 31,68 \text{ N}$

65. Si un arma nuclear de 1 megatón hace explosión a nivel del suelo, la sobrepresión pico (es decir, el incremento de presión arriba de la presión atmosférica normal) será de 0,20 atm a una distancia de 6,0 km. ¿Qué fuerza producida por la explosión se ejercerá sobre el costado de una casa con dimensiones de 4,5 m × 22 m?

Resolución :

Sabemos que el incremento de presión atmosférica es:

$$0,2 \text{ atm} = 0,2 \times (1,013 \times 10^5) \text{ Pa}$$

Entonces sobre una casa al costado se ejercerá dicha presión atmosférica. Entonces:

$$\frac{F}{(4,5)(22)} = (0,2)(1,013 \times 10^5) \qquad \therefore \quad F = 2,0 \times 10^6 \text{ N}$$

66. Un resorte ligero de constante k = 90,0 N/m descansa verticalmente sobre una mesa (Fig. P15.66a). Un globo de 2,00 g se llena con helio (densidad = 0,180 kg/m³) hasta un volumen de 5,00 m³ y se conecta al resorte, con lo cual éste se alarga como en la figura P15.66b. Determine la longitud del alargamiento L cuando el globo está en equilibrio.

66A. Un resorte ligero de constante k descansa verticalmente sobre una mesa (Fig. 15.66a). Un globo de masa m se llena con helio (densidad = ρ_{He}) hasta un volumen V y se conecta al resorte, con lo cual éste se alarga como en la figura P15.66b. Determine la longitud del alargamiento L cuando el globo está en equilibrio.

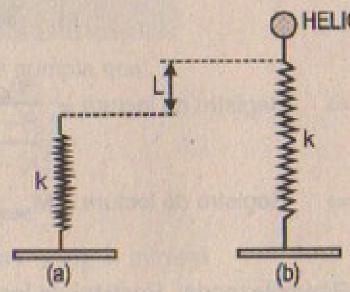


Figura P15.66

Resolución :

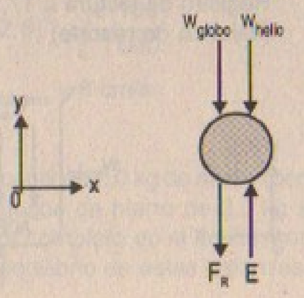
k = 90 N/m

Masa del globo = 2,00 g

$\rho_{helio} = 0,18 \text{ kg/m}^3$

Volumen = 5,00 m³

$\rho_{aire} = 1,29 \text{ kg/m}^3$



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad W_{globo} + W_{helio} + F_R = E$

$\Rightarrow \quad \text{Masa globo} \cdot g + \rho_{helio} \cdot V \cdot g + k \cdot L = \rho_{aire}\, gV$

$\Rightarrow \quad k \cdot L = g(\rho_{aire}\, V - \rho_{helio}\, V - M_{globo})$

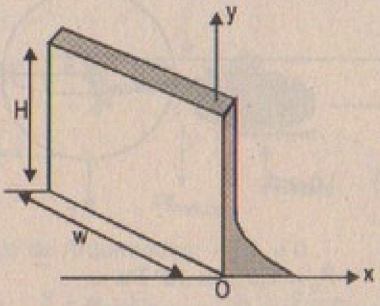
Reemplazando: $L = \dfrac{(9,8)}{90}\,[(1,29)(5) - (0,18)(5) - 0,002]$

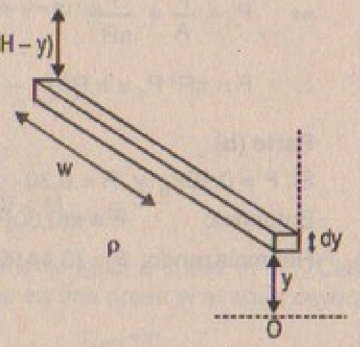
$\therefore \quad L = 0,604 \text{ m}$

67. En relación con la figura 15.5, demuestre que el momento de torsión total ejercido por el agua detrás de la presa alrededor de un eje que pasa por O es 1/6 $\rho g w H^3$. Muestre que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia 1/3 H arriba de O.

Resolución :

Parte (a)





Por demostrar:

$$M_{total/o} = \tau_o = \frac{1}{6}\,\rho g w H^3$$

Sabemos que: $\quad dF = P.dA = \rho g(H - y).w.dy \ldots (1)$

Entonces: $\quad dM_o = \rho g w y dy$

$$\Rightarrow \quad \int dM_o = \rho g w \int_0^H (H - y)\,y dy \quad \Rightarrow \quad \tau_o = \rho g w \frac{H^3}{6} \quad \ldots \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

De (1): $\quad F_{total} = \int_0^H \rho \cdot g w(H - y)dy \qquad \therefore \quad F_{total} = \rho g w \dfrac{H^2}{2}$

Por otro lado: $\quad F_{total} \cdot y = \tau_o$

$$\Rightarrow \quad \rho g w \frac{H^2}{2}\, y = \rho g w \frac{H^3}{6} \quad \therefore \quad y = \frac{H}{3}$$

68. En 1657 Otto von Guericke, inventor de la bomba de aire, extrajo el aire a una esfera hecha de dos hemisferios de latón. Sólo después de algunos intentos, dos grupos de ocho caballos cada uno podían separar los hemisferios y «con enorme dificultad» cuando se podía (Fig. P15.68). a) Muestre que la fuerza F necesaria para separar los hemisferios es $\pi R^2 (P_o - P)$, donde R es el radio de los hemisferios y P es la presión interna en ellos, la cual es mucho menor que P_0. b) Encuentre la fuerza si $P = 0{,}10P_0$ y $R = 0{,}30$ m.

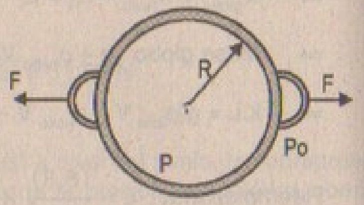
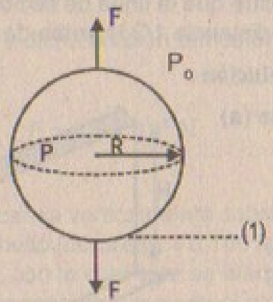


Figura P15.68 (Henry Leap y Jim Lehman)

Resolución:

Por demostrar que: $F = \pi.R^2 (P_o - P)$

Parte (a)



$P_1 = P_o - P$

$\Rightarrow \quad P_1 = \dfrac{F}{A} = \dfrac{F}{\pi R^2}$

$\therefore \quad F = \pi R^2 P_1 = \pi R^2 (P_o - P)$ l.q.q.d.

Parte (b)

Si: $P = 0{,}10P_o$ y $R = 0{,}30$; $P_o = 1{,}013 \times 10^5$ Pa

Entonces: $F = \pi(0{,}30)^2[P_o - 0{,}1P_o] = \pi(0{,}30)^2\,[0{,}9\,P_o]$

Reemplazando: $F = (3{,}1416)(0{,}30)^2\,[0{,}9] \times 1{,}013 \times 10^5$

$\therefore \quad F = 25{,}78 \times 10^3$ N

69. En 1983, en Estados Unidos se empezó a acuñar la moneda de centavo de zinc revestida de cobre en lugar de cobre puro. Si la masa del antiguo centavo de cobre es de 3,083 g en tanto que la del nuevo centavo es 2,517 g, calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo. La densidad del cobre es 8,960 g/cm³ y la del zinc es 7,133 g/cm³. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen.

Resolución:

Sabemos que el volumen es el mismo, entonces

$$V_{moneda} = \frac{M_{Cu}}{\rho_{Cu}} = \frac{3{,}083}{8{,}960}$$

Por otro lado sea: $X_{Cu} + Y_{Zn} = 2{,}517$ g ... (1)

Además por dato: $\dfrac{X_{Cu}}{\rho_{Cu}} + \dfrac{Y_{Zn}}{\rho_{Zn}} = \dfrac{3{,}083}{8{,}960}$ ... (2)

De (2): $(7{,}133)\,X_{Cu} + (8{,}960)Y_{Zn} = \left(\dfrac{3{,}083}{8{,}960}\right)(8{,}960)(7{,}133)$

$\Rightarrow \quad X_{Cu} + Y_{Zn}\left(\dfrac{8{,}960}{7{,}133}\right) = 3{,}083$ ... (3)

(3) – (1): $0{,}256\,Y_{Zn} = 0{,}566 \quad \therefore \quad Y_{Zn} = 0{,}566/0{,}256$ g

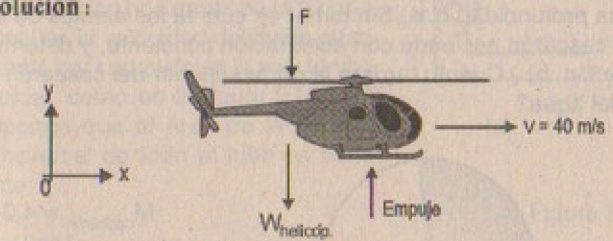
Por último:

Como: $3{,}083/8{,}960$ ——— 100%

$\dfrac{0{,}566}{(0{,}256)(7{,}133)}$ ——— x $\quad \therefore \quad x = 90{,}04\%$

70. ¿Cuánto aire debe empujarse hacia abajo a 40,0 m/s con el fin de mantener un helicóptero de 800 kg en vuelo?

Resolución:



$\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m³

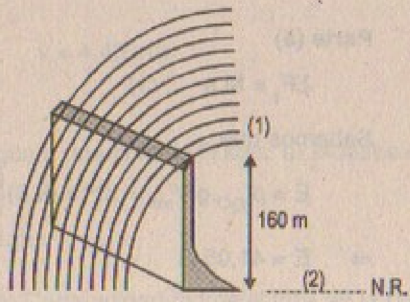
$M_{helicóptero} = 800$ kg

Por el principio de Arquímedes: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad F + w = E \quad \Rightarrow \quad F = \rho_{aire}\,gV - M_{Helip}.g$

71. La tasa de flujo del río Columbia es aproximadamente igual a 3 200 m³/s. ¿Cuál sería la salida de potencia máxima de las turbinas en una presa si el agua cayera desde una distancia vertical de 160 m?

Resolución:



Por continuidad:

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} = 3\,200\ \frac{m^3}{s} = A.v \quad ... (1)$$

Por el principio y teorema de Bernoulli: $P_1 = P_2$

$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \dfrac{1}{2}\,\rho_{H_2O}\,v_s^2$

$\Rightarrow \quad v_{salida} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8)(160)} = 56$ m/s

Entonces de (1): 3 200 = A(56) $\therefore$ A = 57,14 m²

En consecuencia:

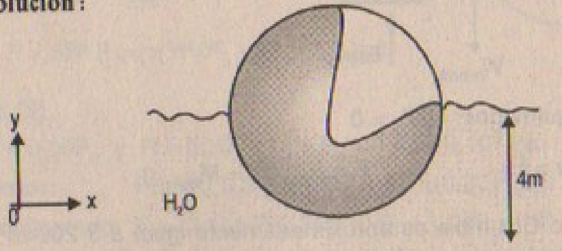
$$\text{Potencia máxima} = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}v^3A = \frac{1}{2}(10^3)(56)^3(57,14)$$

$$\therefore\ P_{máxima} = 5,02\ \text{GW}$$

72. Un delgado cascarón esférico de 4,0 kg de masa y 0,20 m de diámetro se llena con helio (densidad = 0,180 kg/m³). Después se suelta desde el reposo sobre el fondo de un estanque de agua que tiene 4,0 m de profundidad. a) Sin tomar en cuenta los efectos de la fricción, demuestre que el cascarón asciende con aceleración constante, y determine el valor de esa aceleración. b) ¿Cuánto tardará la parte superior del cascarón en alcanzar la superficie del agua?

72A. Un delgado cascarón esférico de masa m y diámetro d se llena con helio (densidad = ρ_{He}). Después se suelta desde el reposo sobre el fondo de un estanque de agua que tiene una profundidad h. a) Sin tomar en cuenta los efectos de la fricción, demuestre que el cascarón asciende con aceleración constante, y determine el valor de esa aceleración. b) ¿Cuánto tardará la parte superior del cascarón en alcanzar la superficie del agua?

Resolución:



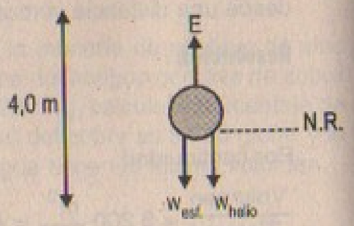
$M_{cascarón} = 4,0$ kg

Diámetro = 0,20 m

$\rho_{Helio} = 0,18$ kg/m³

Parte (a)

$\Sigma F_y = M.a$ ... (1)



Sabemos que:

$$E = \rho_{H_2O}.g.V_{esf.} = 10^3 \times (9,8)\left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{0,2}{2}\right)^3$$

$\Rightarrow$ E = 41,05 N

Además: $w_{esf} = (4,0)(9,8) = 39,2$ N

$w_{helio} = \rho_{He}.gV = (0,18)(9,8)(4/3\ \pi)(0,1)^3 = 0,0074$ N

Como $E > w_{esf.} + w_{He}$ $\Rightarrow$ El cuerpo acelera hacia arriba

Luego en (1): $41,05 - (39,2 + 0,0074) = \left(4,0 + \frac{0,0074}{9,80}\right)a$

$\therefore$ a = 0,46 m/s²

Parte (b)

Por cinemática: $h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 4,0 = \frac{1}{2}(0,46)t^2$

$\therefore$ t = 4,17 s

73. Un fluido no viscoso e incomprensible al principio está en reposo en la parte vertical de la tubería mostrada en la figura P15,73a, donde L = 2,0 m. Cuando la válvula se abre, el fluido circula por la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la velocidad del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como en la figura P15.73b? Suponga que el área de la sección transversal de todo el tubo es constante.

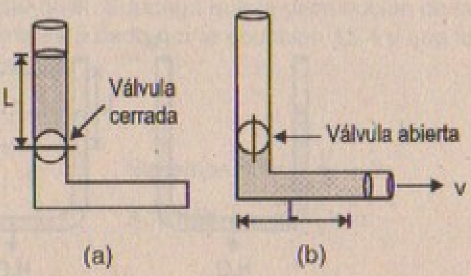


Figura P15.73

Resolución:

L = 2,0 m ; $\rho_{H_2O} = 10^3$ kg/m³

$$P_a = P_b$$

$$\Rightarrow\ P_a + \rho_L.g\frac{L}{2} = P_b + \frac{1}{2}\rho_L.v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{(1)\,gL}$$

Reemplazando: $v = \sqrt{(1)(9,8)(2)}$ $\therefore$ v = 4,43 m/s

74. Sobre una presa de altura h metros cae agua a una tasa de R kg/s: a) Muestre que la potencia disponible del agua es

$$P = \frac{16}{27}Rgh$$

donde g es la aceleración en caída libre. b) Cada unidad hidroeléctrica en la presa Grand Coulee descarga agua a razón de 8,5 × 10⁵ kg/s desde una altura de 87 m. La potencia generada por el agua que cae se convierte en potencia eléctrica con una eficiencia de 85%. ¿Cuánta potencia eléctrica produce cada unidad hidroeléctrica?

Datos incorrectos.

75. Un tubo en U abierto en ambos extremos se llena parcialmente de agua (Fig. P15.75a). Luego se vierte aceite (densidad = 750 kg/m^3) dentro del brazo derecho y forma una columna L = 5,00 cm de altura (Fig. P15.75b). a) Determine la diferencia, h, en las alturas de las dos superficies del líquido. Suponga que la densidad del aire es 1,29 kg/m^3, pero asegúrese de incluir las diferencias en la presión atmosférica debido a diferencias en la altura. b) El brazo derecho después se aísla de cualquier movimiento de aire mientras se sopla aire a través de la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos quedan a la misma altura (Fig. P15.75c). Determine la velocidad del aire que se sopla sobre el brazo izquierdo.

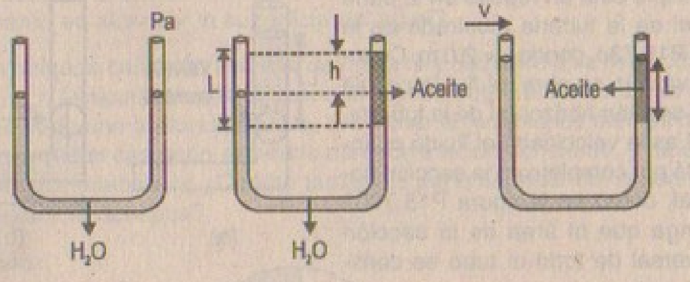


Figura P15.75

Resolución:

$\rho_{aceite} = 750$ kg/m^3 ; L = 5,00 cm

$\rho_{aire} = 1,29$ kg/m^3

Parte (a)

Por principio de estática de fluidos: $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O} \cdot g(L-h) + P_{atm} = \rho_{aceite}\, gL + P_{atm}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{\rho_{H_2O}}(\rho_{H_2O} - \rho_{aceite}) = h$$

$$\therefore \quad h = 1,25 \text{ cm}$$

Parte (b)

Cuando se aisla el brazo derecho del tubo y empieza a soplar en la parte izquierda, la presión por el blindado hacia el aceite hace que se transmita por el principio de Pascal, también hacia el agua hasta que el nivel del agua en el tubo izquierdo llegue al nivel del aceite en el tubo derecho.

Luego:

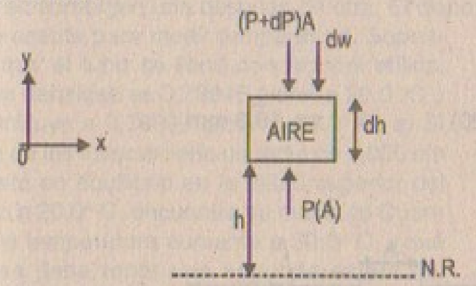
Por Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho_{aire} \cdot v^2 = \rho_{H_2O}\, gh \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{2\rho_{H_2O} \cdot gh}{\rho_{Aire}}$

Reemplazando: $v^2 = \frac{2(10^3)(9,8)(1,25\times 10^{-2})}{1,29}$

$$\therefore \quad v = 13,8 \text{ m/s}$$

76. Muestre que la variación de la presión atmosférica con la altura está dada por $P = P_0 e^{-\alpha h}$, donde $\alpha = \rho_0 g/P_0$, P_0 es la presión atmosférica a cierto nivel de referencia, y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución de la presión atmosférica con la altura creciente está dada por la ecuación 15.4 y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

Resolución:



Sabemos que: $\frac{\rho}{P} = k$

Además: $\rho_o \cdot g/P_o = \alpha$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad dw + (P + dP)A = PA$$

$$\Rightarrow \quad \rho\, Adhg = -dP.A$$

$$\Rightarrow \quad -gk.dh = \frac{1}{P}\, dP$$

Integrando: $-g.kh = \ln\left[\frac{P}{P_o}\right]$

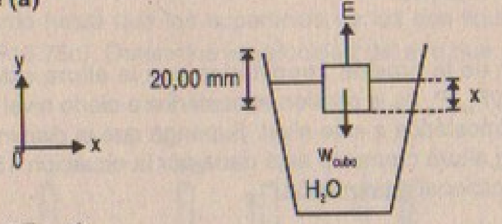
$$\Rightarrow \quad e^{-kg.h} . P_o = P \qquad \text{Pero } k = \frac{\rho_o}{P_o} \qquad \therefore \quad e^{-\frac{\rho_o \cdot g.h}{P_o}} = e^{-\alpha h} = \frac{P}{P_o} \quad \text{l.q.q.d.}$$

77. Un cubo de hielo cuyo borde mide 20 mm flota en un vaso de agua casi tan fría como el hielo con una de sus caras paralela a la superficie del agua. a) ¿A qué distancia por debajo de la superficie del agua se encuentra la cara inferior del bloque? b) Alcohol etílico hecho hielo se vierte con cuidado sobre la superficie del agua para formar una capa de 5 mm de espesor sobre el agua. Cuando el cubo de hielo

alcanza el equilibrio hidrostático otra vez, ¿cuál será la distancia desde la parte superior del agua hasta la cara inferior del bloque? c) Se vierte alcohol etílico adicional sobre la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Cuál es el espesor que se requiere del alcohol etílico?

Resolución :

Parte (a)



$\rho_{hielo} = 0,917 \times 10^3$ kg/m^3

$\rho_{H_2O} = 1 \times 10^3$ kg/m^3

$\Sigma F_y = 0$

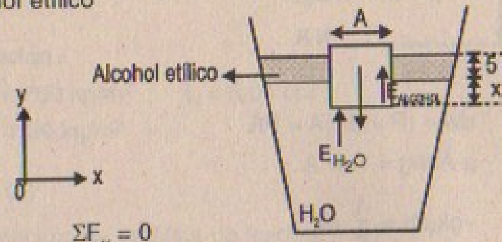
$\Rightarrow \quad E = w_{cubo}$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}\, gAx = \rho_{hielo}\, gA(20)$

$\Rightarrow \quad (10^3)\, x = (0,917 \times 10^3)\,(20) \qquad \therefore \quad x = 18,3$ mm

Parte (b)

alcohol etílico



$\rho_{alcohol} = 0,806 \times 10^3$ kg/m^3

$\Sigma F_y = 0$

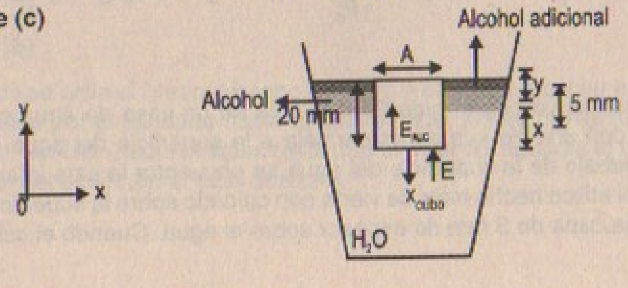
$\Rightarrow \quad w_{cubo} = E_{alcohol} + E_{agua}$

$\Rightarrow \quad \rho_{hielo} \cdot gA(20) = \rho_{alcohol}\, gA(5) + \rho_{H_2O}\, gA(x)$

$\Rightarrow \quad (0,907 \times 10^3)(20) = (0,806 \times 10^3)\, 5 + (1 \times 10^3)(x)$

$\therefore \quad x = 14,3$ mm

Parte (c)



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad w_{cubo} = E_{alcohol} + E_{H_2O} \quad \Rightarrow \quad \rho_{hielo}\, gA(20) = \rho_{alcohol}\, gA(5 + y) + \rho_{H_2O}\, gA(x)$

Pero siempre que: $x + y + 5 = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 15 - y$

$\Rightarrow \quad (0,917 \times 10^3)(20) = (0,806 \times 10^3)(5 + y) + (10^3)(15 - y)$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{15 + 5(0,806) - 20\,(0,917)}{0,194} = 3,556 \text{ mm}$$

En consecuencia:

El espesor que se requiere de alcohol etílico será: 5 + 3,56 = 8,56 mm

78. El *termómetro de alma en vidrio*, inventado en Florencia, Italia, alrededor de 1654, consta de un tubo de líquido (el alma) que contiene un número de esferas de vidrio sumergidas con masas ligeramente diferentes (Fig. P15.78). A temperaturas suficientemente bajas todas las esferas flotan, pero cuando la temperatura aumenta, las esferas se sumergen una después de otra. El dispositivo es una herramienta burda pero interesante para medir temperatura. Suponga que el tubo se llena con alcohol etílico, cuya densidad es 0,78945 g/cm^3 a 20,0° C y disminuye a 0,78097 g/cm^3 a 30,0° C. a) Si una de las esferas tiene un radio de 1,000 cm y está en equilibrio en la mitad superior del tubo a 20,0° C, encuentre su masa. b) Cuando la temperatura aumenta a 30,0° C, ¿qué masa debe tener una segunda esfera del mismo radio para estar en equilibrio en el punto ubicado a la mitad? c) A 30,0° C la primera esfera ha caído hasta el fondo del tubo. ¿Qué fuerza hacia arriba debe ejercer el fondo del tubo sobre esta esfera?

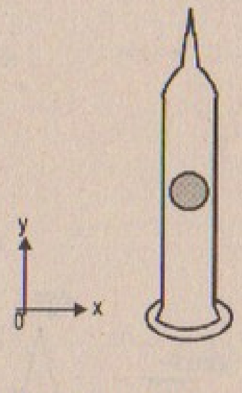


Figura P15.78 (Cortesía de Jeanne Maier)

Resolución :

$\rho_{alcohol} = 0,78945$ g/cm^3

Radio = 1,000 cm ; Masa = ?

Parte (a)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{esf} = E_{alcohol} \quad \Rightarrow \quad M.g = \rho_{alcohol}\, g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \quad M = (0,78945)\left(\frac{4}{3}\right)(3,1416)(1,0)^3$$

$\therefore$ Masa de la esfera = 3,3 g

Parte (b)

A 30°C $\quad \rho_{alcohol} = 0,78097$ g/cm^3

Entonces: $M = (0,78097)(4/3)(3,1416)(10)^3 \qquad \therefore \qquad M = 3,27$ g

Capítulo 16

MOVIMIENTO ONDULATORIO

ONDAS VIAJERAS UNIDIMENSIONALES

1. En t = 0, un pulso de onda transversal en un alambre se describe por medio de la función $y = \dfrac{6}{x^2+3}$, donde x e y están en metros. Escribe la función y(x; t) que represente esta onda si ésta viaja en la dirección x positiva con una velocidad de 4,5 m/s.

Resolución :

Sabemos que: $x(t) = x - vt$ (dirección positiva)

$\Rightarrow \quad x(t=0) = x_0 \quad \wedge \quad x = x - 4{,}5t$

Luego: $\quad y(x;\,t) = f(x;\,t) = \dfrac{6}{(x-4{,}5\,t)^2+3}$

2. Dos pulsos de onda A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada con una velocidad de 2 cm/s. La amplitud de A es dos veces la amplitud de B. Los pulsos se muestran en la figura P16.2 en t = 0. Dibuje la forma de la cuerda en t = 1; 1,5; 2; 2,5 y 3 s.

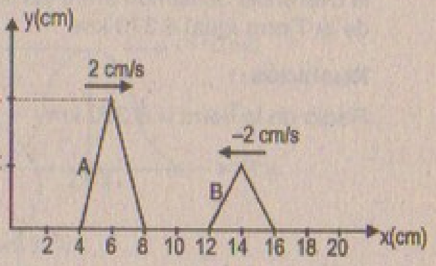
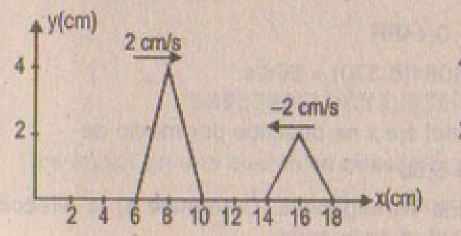


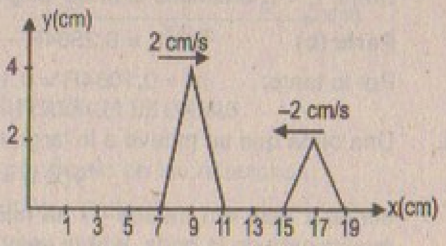
Figura P16.2

Resolución :

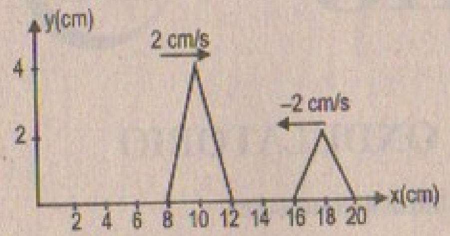
Para t = 1 s



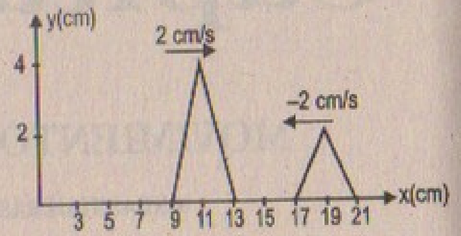
Para t = 1,5 s



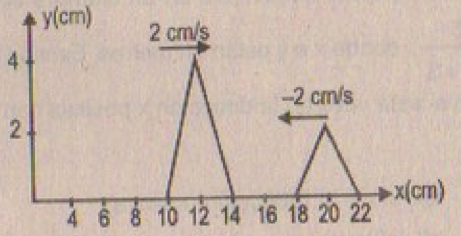
Para t = 2 s



Para t = 2,5 s



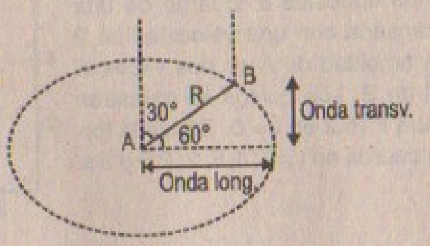
Para t = 3 s



3. Dos puntos, A y B, sobre la Tierra están a la misma longitud y 60,0° separados en latitud. Un terremoto en el punto A envía dos ondas hacia B. Una onda transversal viaja por la superficie de la Tierra a 4,50 km/s y una onda longitudinal viaja por el interior de la Tierra a 7,8 km/s. a) ¿Cuál de las ondas llega a B primero? b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de las dos ondas en B? Considere el radio de la Tierra igual 6 370 km.

Resolución:

Radio de la Tierra = 6 370 km



Parte (a)

$6\,370\text{ km} = (4{,}5)\text{sen}30°t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}148R$ (onda longitudinal)

$6\,370\text{ km} = (7{,}8)\cos 30°t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}2564R$ (onda transversal)

Como $t_1 < t_2$ entonces la onda longitudinal llegará más rápido a B

Parte (b) $\quad t_2 - t_1 = 0{,}2564R - 0{,}148R$

Por lo tanto: $\quad \Delta t = 0{,}1084R = 0{,}1084(6\,370) = 666\text{ s}$

4. Una onda que se mueve a lo largo del eje x se describe por medio de

$$y(x;t) = 5{,}0e^{-(x+5{,}0t)^2}$$

donde x está em metros y t se mide en segundos. Determine a) la dirección del movimiento de la onda, y b) la velocidad de la onda.

Resolución:

$$y(x;t) = (5{,}0)e^{-(x+5{,}0t)^2}$$

Parte (a)

Como: $y(x;t) = f(x \pm vt)$

$$\Rightarrow \quad -(x+5t) = -x - 5t = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad -dx - 5dt = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -5\text{ m/s} = v_{onda}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces el pulso viaja en la dirección «x» negativa.

Parte (b)

La velocidad de la onda = 5 m/s

5. Las ondas en el océano con una distancia cresta a cresta de 10 m pueden describirse mediante:

$$y(x;t) = (0{,}80\text{ m})\text{sen}\,[0{,}63(x - vt)]$$

donde v = 1,2 m/s. a) Dibuje y(x; t) en t = 0. b) Dibuje y(x; t) en t = 2,0 s. Advierta cómo toda la forma de la onda se ha movido 2,4 m en la dirección x positiva en este intervalo de tiempo.

Resolución:

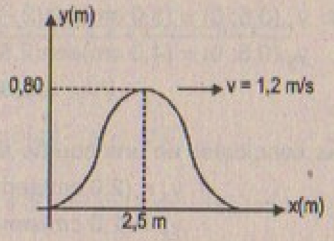
$$y(x;t) = (0{,}80\text{ m})\text{ sen}[0{,}63(x - vt)]$$

Por dato: $\lambda = 10$ m; $v = 12$ m/s

Parte (a)

En t = 0

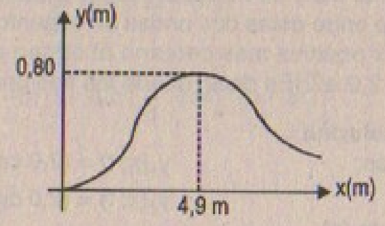
$y(x;0) = (0{,}80)\text{sen}[0{,}63x]$



Parte (b)

En t = 2,0 s

$y(x;2) = (0{,}80)\text{sen}[0{,}63(x - 1{,}2(2))]$



SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIA DE ONDAS

6. Dos ondas en una cuerda se describen por medio de las relaciones:

$$y_1 = 3{,}0\cos(4{,}0x - 5{,}0t)$$
$$y_2 = 4{,}0\text{sen}(5{,}0x - 2{,}0t)$$

donde x e y están en centímetros y t en segundos. Encuentre la superposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos a) x = 1,0; t = 1,0; b) x = 1,0; t = 0,50; c) x = 0,50; t = 0. (Recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.)

Resolución:

Parte (a)

$$x = 1{,}0\ \text{cm}; \quad t = 1{,}0\ \text{s} \quad \text{nos piden: } y_1 + y_2$$

Entonces: $y_1(1;\ 1) = (3{,}0\ \text{cm})\cos[4{,}0 - 5{,}0] = (3{,}0\ \text{cm})\cos[1{,}00\ \text{rad}]$

$y_2(1;\ 1) = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[5{,}0 - 2{,}0] = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[3{,}00\ \text{rad}]$

Por lo tanto:

$y_1 + y_2 = (3{,}0\ \text{cm})\cos[1{,}00\ \text{rad}] + (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}[3{,}00\ \text{rad}] = 3{,}0(0{,}54) + 4{,}0(0{,}141)$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = 2{,}18\ \text{cm}$$

Parte (b)

Para x = 1,0 y t = 0,5

Entonces: $y_1(1;\ 0{,}5) = 3{,}0\cos(4 - 2{,}5) = 3{,}0\cos(1{,}5) = 0{,}212\ \text{cm}$

$y_2(1;\ 0{,}5) = 4{,}0\text{sen}(5 - 1) = 4{,}0\ \text{sen}(4) = -3{,}027\ \text{cm}$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = -2{,}82\ \text{cm}$$

Parte (c)

Para: x = 0,50 y t = 0

Entonces: $y_1\ (0{,}5;\ 0) = (3{,}0\ \text{cm})\cos(2 - 0) = (3{,}0)\cos(2) = -1{,}248\ \text{cm}$

$y_2\ (0{,}5;\ 0) = (4{,}0\ \text{cm})\text{sen}(2{,}5) = (4{,}0)\ \text{sen}(2{,}5) = 2{,}393\ \text{cm}$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = 1{,}146\ \text{cm}$$

7. Dos ondas senoidales en una cuerda se definen mediante las funciones:

$$y_1 = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}(20x - 30t)$$
$$y_2 = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}(25x - 40t)$$

donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto x = 5,0 cm en t = 2,0 s? b) ¿Cuál es el valor de x positiva más cercano al origen para el cual las dos fases difieren en $\pm\pi$ en t = 2,0 s? (Es decir, donde las dos ondas suman cero.)

Resolución:

Sean: $y_1(x;\ t) = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 30t]$

$y_2(x;\ t) = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[25x - 40t]$

Parte (a)

Cuando: x = 5 cm y t = 2,0 s

Entonces: $y_1\ (5;\ 2) = (2{,}0)\text{sen}[40\ \text{rad}] = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[40\ \text{rad} + 0]$

$y_2\ (5;\ 2) = (2{,}0)\text{sen}[45\ \text{rad}] = (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[40\ \text{rad} + 5\ \text{rad}]$

En consecuencia: la diferencia de fase entre y_1, y_2 será:

$$5\ \text{rad} - 0 = 5{,}00\ \text{radianes}$$

Parte (b)

Por dato, diferencia de fase = + π = 3,1416

Entonces en: t = 2,0 s

$$(2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 30(2)] - (2{,}0)\ \text{sen}[25x - 80] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2{,}0\ \text{cm})\text{sen}[20x - 60] = (2{,}0)\ \text{sen}[25x - 80]$$

$$\Rightarrow \quad 20x - 60 = 25x - 80 \qquad \therefore \quad x = \pm\frac{20}{5}$$

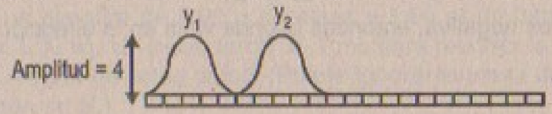
Como nos piden «x» positivo (cercano), entonces:

$$x = \frac{20-\pi}{5} = \frac{20-3{,}1416}{5}$$

8. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Cada una tiene una amplitud de 4,0 cm, y están 90° fuera de fase. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

8A. Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Cada una tiene una amplitud A, y están fuera de fase un ángulo ϕ. Encuentre la amplitud de la onda resultante.

Resolución:



Sea: $y_1(x;\ t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[ax - bt]$

$y_2(x;\ t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[ax - bt + \pi/2]$

Entonces:

$$y_1(x;\ t) + y_2(x;\ t) = y_{result}\ (x;\ t) = (4{,}00\ \text{cm})\text{sen}[(ax - bt)] + (4{,}00)\cos[(ax - bt)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\ (x;\ t)}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{sen}\big[(ax-bt)\big] + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\big[(ax-bt)\big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\ (x,t)}{4\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\ \big[(ax-bt)\big] + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\big[(ax-bt)\big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_{result}\ (x;\ t)}{4\sqrt{2}} = \text{sen}\left[(ax-bt)+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\therefore \quad y_{result}(x;\ t) = \left(4\sqrt{2}\ \text{cm}\right)\text{sen}\left[ax - bt + \frac{\pi}{4}\right]$$

En consecuencia:

La amplitud de la onda resultante es: $4\sqrt{2}$ cm

9. Dos pulsos que viajan en la misma cuerda se describen por medio de

$$y_1 = \frac{5}{(3x-4t)^2+2} \quad ; \quad y_2 = \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2}$$

a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? b) ¿En qué tiempo se cancelan los dos? c) ¿En qué punto las dos ondas siempre se cancelan?

Resolución :

Parte (a) $y_1 = \dfrac{5}{(3x-4t)^2+2} \Rightarrow 3x - 4t = \text{cte}$

$$\Rightarrow 3dx - 4dt = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{4}{3} = v_{pulso}$$

Como: v_{pulso} es positiva, entonces la onda viaja en la dirección «x» positiva

$$y_2 = \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2} \Rightarrow 3x + 4t - 6 = \text{cte}$$

$$\Rightarrow 3dx + 4dt = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-4}{3} = v_{pulso}$$

Como: v_{pulso} es negativa, entonces la onda viaja en la dirección «x» negativa

Parte (b)

Se debe de cumplir que: $y_1 + y_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{5}{(3x-4t)^2+2} + \frac{-5}{(3x+4t-6)^2+2} = 0 \Rightarrow \frac{5}{(3x-4t)^2+2} = \frac{5}{(3x+4t-6)^2+2}$$

$$\Rightarrow (3x-4t)^2 = (3x+4t-6)^2$$

Resolviendo, resulta que: $-8t + 6 = 0 \quad \therefore \quad t = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ s

Parte (c)

En: $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Luego: $y_1(3/4;\, 1) = 5/2 \ \wedge \ y_2(3/4;\, 1) = -5/2$

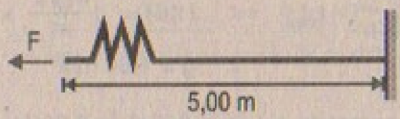
Luego:
Las dos ondas siempre se cancelan en x = 1,0 m

LA VELOCIDAD DE ONDAS EN CUERDAS

10. Se producen ondas transversales con una velocidad de 50 m/s en una cuerda tensada, cuya longitud es de 5,0 m con una masa total de 0,060 kg. ¿Cuál es la tensión requerida?

Resolución :

Sabemos que:



$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

$$\Rightarrow (50)^2 = \frac{(F)(5)}{0{,}060} \qquad \therefore F = 30 \text{ N}$$

11. Una cuerda de piano de masa por longitud unitaria igual a $5{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m se somete a una tensión de 1 350 N. Encuentre la velocidad con la cual una onda se propaga en esta cuerda.

Resolución :

T ← ———— → T = 1 350 N

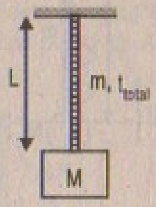
Sabemos que: $v_{onda} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow v_{onda} = \sqrt{\dfrac{1\,350}{5{,}00\times10^{-3}}} = 520$ m/s

12. Un astronauta sobre la Luna desea encontrar el valor local de g midiendo el tiempo de pulsos que viajan por un alambre que tiene una gran masa suspendida de él. Suponga que un alambre de 4,00 g de masa y 1,60 m de largo tiene una masa suspendida de 3,00 kg. Un pulso tarda 36,1 ms para recorrer la longitud del alambre. Calcule g a partir de estos datos. (Puede ignorar la masa del alambre cuando calcule la tensión en él.)

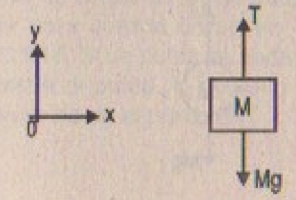
12A. Un astronauta sobre la Luna desea encontrar el valor local de g midiendo el tiempo de pulsos que viajan por un alambre que tiene una gran masa suspendida de él. Suponga que un alambre de masa m y largo L tiene una masa M suspendida. Un pulso tarda un tiempo t para recorrer la longitud del alambre. Calcule g a partir de estos datos. (Puede ignorar la masa del alambre cuando calcule la tensión en él.)

Resolución :

Por dato: L = 1,60 m;
$m_{alambre} = 4 \times 10^{-3}$ kg ;
M = 3,00 kg
$t_{total} = 36{,}1 \times 10^{-3}$ s



D.C.L. (bloque)



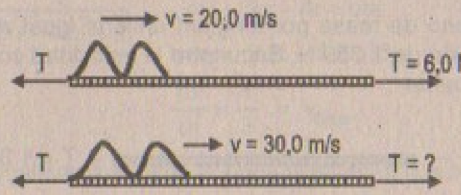
$$\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = Mg$$

Luego: $L = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \times t_{total} \Rightarrow (1,6) = \sqrt{\dfrac{MgL}{m}} \times 36,1 \times 10^{-3}$

$\therefore\ g = 1,64\ m/s^2$

13. En un alambre sometido a una tensión de 6,00 N viajan ondas transversales con una velocidad de 20,0 m/s. ¿Qué tensión se requiere para una velocidad de onda de 30,0 m/s en la misma cuerda?

Resolución :



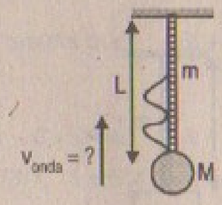
Sabemos que: $20 = \sqrt{\dfrac{6,0}{\mu}} \Rightarrow \dfrac{6,0}{(20)^2} = \mu$ ... (1)

Por otro lado: $30 = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{T}{(6,0)} \times (20)^2}$

$\Rightarrow (30)^2 = \dfrac{T}{(6,0)} \times (20)^2 \quad \therefore\ T = 13,5\ N$

14. Un péndulo simple se compone de una bola de masa M que cuelga de una cuerda uniforme de masa m y longitud L, con m << M. Si el periodo de oscilación del péndulo es T, determine la velocidad de una onda transversal en la cuerda cuando el péndulo cuelga verticalmente.

Resolución :



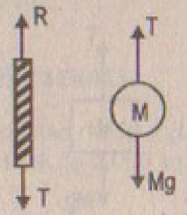
Datos: m << M

$T_{pend} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_f}{g}} = T$

Por dato: $T^2 = 4\pi^2\,\dfrac{L_f}{g}$

$\therefore\ L_f = T^2g/4\pi^2$

Por otro lado:

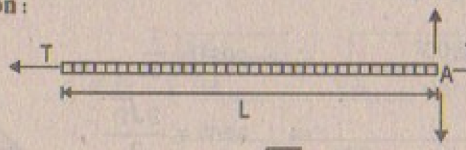


Entonces: $v_{onda\ trans.} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{Mg.L_f}{m}} = \sqrt{\dfrac{Mg}{m}\left(\dfrac{T^2.g}{4\pi^2}\right)}$

$\therefore\ v_{onda\ trans.\ (cuerda)} = \dfrac{Tg}{2\pi}\left(\dfrac{M}{m}\right)^{1/2}$

15. El límite elástico de un pedazo de alambre de acero es de $2,7 \times 10^9$ Pa. ¿Cuál es la velocidad máxima a la cual pueden propagarse pulsos de onda transversales a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es de $7,86 \times 10^3$ kg/m³.)

Resolución :



$\rho_{acero} = 7,86 \times 10^3\ kg/m^3$

Sabemos que: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ ... (α)

Por otro lado: $\dfrac{T}{A} = 2,7 \times 10^9$ Pa $\Rightarrow T = 2,7 \times 10^9 A$ ... (1)

Además: $7,86 \times 10^3 = \dfrac{m}{V} = \dfrac{M_{acero}}{A.L} \Rightarrow \dfrac{M}{L} = \mu = 7,86 \times 10^3 \times A$ ... (2)

Luego (1) y (2) en (α): $v = \sqrt{\dfrac{2,7 \times 10^9 \times A}{7,86 \times 10^3 \times A}} \quad \therefore\ v = 586\ m/s$

16. Una cuerda ligera de 10,0 g de masa y longitud L = 3,00 m tiene sus extremos sujetos a dos paredes que están separadas por una distancia D. Dos masas, cada una de masa M = 2,00 kg, están suspendidas de esta cuerda como en la figura P16.16. Si un pulso de onda se envía desde el punto A, ¿cuánto tarda en viajar hasta el punto B?

16A. Una cuerda ligera de masa m y longitud L tiene sus extremos sujetos a dos paredes que están separadas por una distancia D. Dos masas, cada una de masa M, están suspendidas de esta cuerda como en la figura P16.16. Si un pulso de onda se envía desde el punto A, ¿cuánto tarda en viajar hasta el punto B?

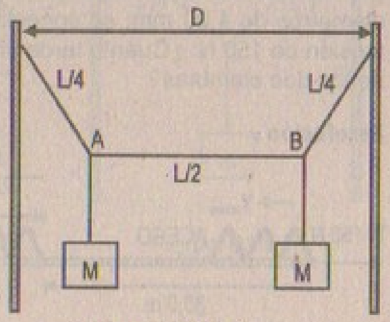


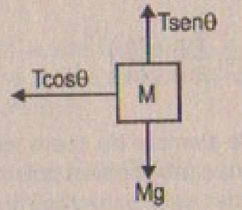
Figura P16.16

Resolución :

$M_{cuerda} = 10{,}0\ g$; $L_{cuerda} = 3{,}00\ m$

$D = 2{,}00\ m$; $M = 2{,}00\ kg$

D.C.L. (en el punto A)



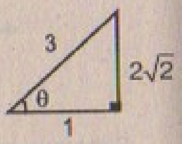
$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow\ T = \dfrac{Mg}{sen\theta}$

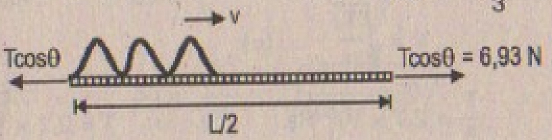
Por otro lado: $\dfrac{L}{4}\cos\theta + \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{4}\cos\theta = D$

$\Rightarrow\ \dfrac{3{,}00}{2}\cos\theta + \dfrac{3{,}00}{2} = 2{,}00 \quad \therefore \quad \cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow\ sen\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



Luego:



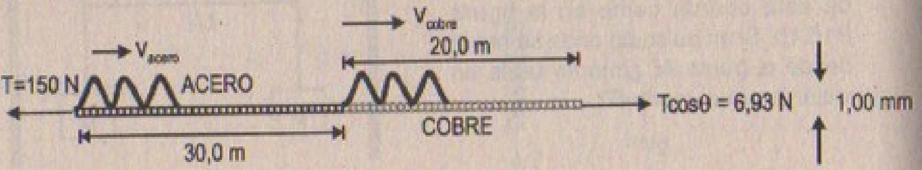
Como $\quad T = \dfrac{Mg}{sen\theta} \Rightarrow Tcos\theta = Mg.cot\theta = \dfrac{(2)(9{,}8)(1)}{2\sqrt{2}}$

Entonces: $\quad v = \sqrt{\dfrac{T\cos\theta}{M_{cuerda}} \times L} = \sqrt{\dfrac{\frac{9{,}8\sqrt{2}}{2}}{\frac{0{,}01}{3}}}$

En consecuencia: $\quad \dfrac{L}{2} = v.t \quad \therefore \quad t = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{45{,}59} = 0{,}0329\ s$

17. Un alambre de acero de 30,0 m y un alambre de cobre de 20,0 m, ambos con diámetros de 1,00 mm, se conectan extremo con extremo y se estiran hasta una tensión de 150 N. ¿Cuánto tarda una onda transversal en viajar por la longitud total de los dos alambres?

Resolución :



Sabemos que: $\rho_{acero} = 7{,}86 \times 10^3\ kg/m^3$; $\rho_{cobre} = 8{,}92 \times 10^3\ kg/m^3$

$$v_{acero} = \sqrt{\frac{T \times L}{M_{Acero}}} = \sqrt{\frac{T \cdot L_{acero}}{\rho_{acero} \times \text{área} \times L_{acero}}}$$

Reemplazando: $v_{acero} = \sqrt{\dfrac{150}{(7{,}86\times10^3)\left[\pi\left((0{,}5)\times10^{-3}\right)^2\right]}}$

$\therefore \quad v_{acero} = 155{,}88\ m/s$

Luego: $\quad 30 = v_{acero} t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}192\ s$

$$v_{cobre} = \sqrt{\frac{T \times L_{cobre}}{M_{cobre}}} = \sqrt{\frac{T \cdot L_{cobre}}{\rho_{cobre} \times \text{área} \times L_{cobre}}}$$

Entonces: $\quad v_{cobre} = \sqrt{\dfrac{150}{(8{,}92\times10^3)(\pi)\left[(0{,}5)(10^{-3})\right]^2}}$

$\therefore \quad v_{cobre} = 146{,}3\ m/s$

Luego: $\quad 20{,}0\ m = v_{cobre} \times t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}1367\ s$

En consecuencia:

El tiempo total que tarda una onda transversal en recorrer la longitud de los dos alambres será $t_1 + t_2$

$\therefore \quad T_{total} = t_1 + t_2 = (0{,}192) + (0{,}1367) = 0{,}3237$ segundos

18. Una cuerda ligera de 8,00 g/m de masa por longitud unitaria tiene sus extremos sujetos a dos paredes separadas por una distancia igual a tres cuartos de la longitud de la cuerda (Fig. P16.18). Una masa m se suspende del centro de la cuerda, a la cual le impone una tensión. a) Encuentre una expresión para la velocidad de la onda transversal en la cuerda como una función de la masa colgante. b) ¿Qué cantidad de masa debe suspenderse de la cuerda para tener una velocidad de onda de 60,0 m/s?

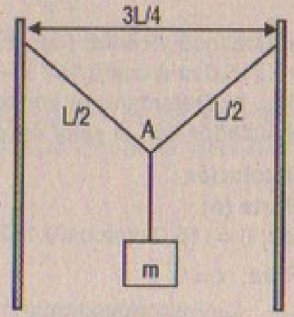
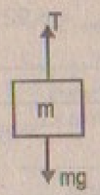


Figura P16.18

Resolución :

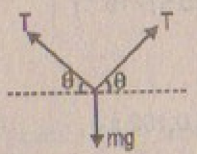
$\mu_{cuerda} = 8{,}00\ g/m$

Parte (a)
D.C.L. (m)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = mg$

Por otro lado:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T\text{sen}\theta = mg$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta = T\cos\theta$

Además: $2\left(\dfrac{L}{2}\right)\cos\theta = \dfrac{3L}{4} \quad \therefore \cos\theta = \dfrac{3}{4}$

Luego: $\text{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Luego: $T = \dfrac{mg}{2\text{sen}\theta} = \dfrac{2\,mg}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}\,.\,mg$

Luego: $v_{transversal} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{\left(2\times\sqrt{7}\times 10^3\right)(9,8)(m)}{56}}$

$\therefore \; v_{trans.} = 30,4\,\sqrt{m}$

Parte (b)
Si: $v_{trans} = 60,0$ m/s $\Rightarrow (60,0)^2 = (80,4)^2 \times m$

$\therefore \; m = 1,95$ kg

ONDAS SENOIDALES

19. a) Grafique y contra t en $x = 0$ para una onda senoidal de la forma: $y = (15,0\text{ cm})\cos(0,157\,x - 50,3\,t)$, donde x e y están en centímetros y t en segundos. b) Determine el periodo de vibración a partir de esta gráfica y compare sus resultados con el valor encontrado en el ejemplo 16.3.

Resolución:

Parte (a)

$y(x;\,t) = (15,0\text{ cm})\cos(0,157x - 50,3\,t)$

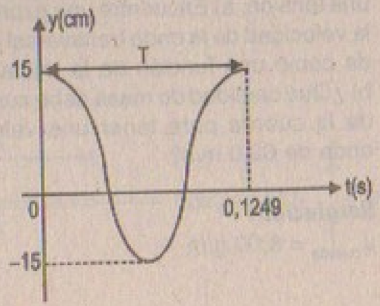
Para: $x = 0$

$\Rightarrow \; y(0;t) = 15\cos(50,3t)$

Para $y(0;t) = 15$ cm

$\Rightarrow \; \cos(50,3t) = 2\pi$

$\Rightarrow \; t = 0,1249$ s



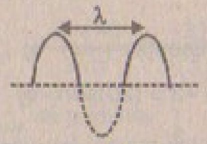
Luego: $T = 0,1249 - 0 = 0,125$ s

Parte (b) $T = t - 0 = 0,1249 - 0 = 0,1249 \approx 0,125$ s

20. Para cierta onda transversal, la distancia entre dos máximos sucesivos es de 1,2 m y ocho máximos pasan por un punto dado a lo largo de la dirección de propagación cada 12 s. Calcule la velocidad de onda.

20A. Para cierta onda transversal la distancia entre dos máximos sucesivos es λ y N máximos pasan por un punto dado a lo largo de la dirección de propagación cada t s. Calcule la velocidad de onda.

Resolución:



$\lambda = 1,2$ m

Además: En (3) máximos tenemos 7λ

Entonces: $(7\lambda)(12\text{ s}) = v_{onda}$

$\therefore \; v_{onda} = 7(1,2)(12) = 100,8$ m/s

21. Una onda senoidal viaja por una cuerda. El oscilador que genera a la onda completa 40,0 vibraciones en 30,0 s. Además, un máximo dado viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10,0 s. ¿Cuál es la longitud de onda?

Resolución:

Por dato: $f = \dfrac{40}{30}\,\dfrac{\text{vib.}}{\text{s}} \Rightarrow T = \dfrac{3}{4}\text{s}$

Por otro lado: $v_{onda} \times 10\text{ s} = 425\text{ cm} \equiv 4,25\text{ m}$

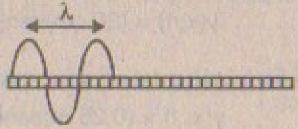
$\therefore \; v_{onda} = 0,425$ m/s

Como: $\lambda = v_{onda} \times T \Rightarrow \lambda = (0,425)\left(\dfrac{3}{4}\right) = 0,319$ m

22. Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de 4,00 Hz, se produce una onda transversal de 60,0 cm de longitud de onda. Determine la velocidad de los pulsos de onda a lo largo del alambre.

Resolución:

Por dato: $\lambda = 0,6$ m
Además: $f = 4,00$ Hz



Pero: $v_{onda} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\,.\,f = (0,6)(4,00)$

$\therefore \; v_{onda} = 2,4$ m/s

23. Una onda senoidal que viaja en la dirección –x(hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20,0 cm, una longitud de onda de 35,0 cm y una frecuencia de 12,0 Hz. El desplazamiento de la onda en t = 0, x = 0 es y = –3,00 cm y la onda tiene una velocidad positiva aquí. a) Dibuje la onda en t = 0. b) Encuentre el número de onda angular, el periodo, la frecuencia angular y la velocidad de fase de la onda. c) Escriba una expresión para la función de onda y(x; t).

Resolución:

Datos: $A = 0{,}2$ m ; $\lambda = 0{,}35$ m ; $f = 12{,}0$ Hz
En $t = 0$, $x = 0$ $y = -3$ cm $v = ?$

Parte (a) y (b)

Sabemos que: $y(x;t) = 2\text{sen}[kx + \omega t - \phi]$

Entonces: $y(0;0) = -3 = (20)\text{sen}[-\phi]$

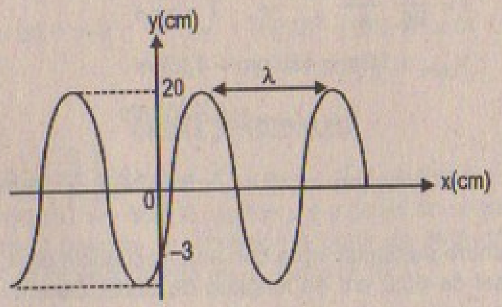
$\therefore \quad \text{sen}(\phi) = \dfrac{3}{20} \Rightarrow \phi = \text{arc sen}\left(\dfrac{3}{20}\right) = 8{,}63° <> \pi/20$

Por otro lado: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{35}$ y $\omega = 2\pi \times f = 24\pi$ rad/s

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{12}\text{ s}$$

Graficando:

Para $t = 0$ $\quad y(0;x) = 20\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{35}x - \dfrac{\pi}{20}\right] = 20\text{sen}(0{,}18x - 0{,}157)$



Parte (c)

La función de onda para cualquier instante de tiempo será:

$$y(x;t) = (20\text{ cm})\text{sen}[2{,}18x + 75{,}4t - 0{,}157]$$

24. Un tren de onda senoidal se describe por medio de

$$y(x;t) = (0{,}25\text{ m})\text{sen}(0{,}30x - 40t)$$

donde x e y se miden en metros y t en segundos. Determine para esta onda la a) amplitud, b) frecuencia angular, c) número de onda angular, d) longitud de onda, e) velocidad de onda, y f) dirección de movimiento.

Resolución:

$$y(x;t) = (0{,}25\text{ m})\text{sen}[0{,}30x - 40t]$$

Parte (a) Amplitud = (0,25 m)

Parte (b) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 40$ rad/s

Parte (c) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0{,}30$ rad/m

Parte (d) Como: $\dfrac{2\pi}{\lambda} = (0{,}30) \Rightarrow \lambda = 21$ m

Parte (e) $v_{onda} = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{21\times 40}{2\times\pi} = \dfrac{21\times 40}{2(3{,}1416)} = 133{,}7$ m/s

Parte (f) Como v_{onda} es positiva
$\Rightarrow$ La dirección del movimiento es en el eje «x» positivo

25. Dos ondas se describen mediante

$$y_1(x;t) = 5{,}0\text{sen}(2{,}0x - 10t)$$
$$y_2(x;t) = 10\cos(2{,}0x - 10t),$$

donde x está en metros y t en segundos. Demuestre que la onda resultante es senoidal y determine la amplitud y fase de esta onda senoidal.

Resolución:

Por demostrar que la onda resultante es senoidal.

Sea: $2x - 10t = \alpha$

Entonces: (+) $y_1(x;t) = 5\text{sen}\alpha$
$y_2(x;t) = 10\cos\alpha$

$$y_1(x;t) + y_2(x;t) = y_R(x;t) = 5\text{sen}\alpha + 10\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{y_R}{5}(x;t) = \text{sen}\alpha + 2\cos\alpha \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\text{sen}\alpha + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cos\alpha$$

(por artificio)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)y_R(x;t) = \cos\left(\alpha - \frac{53°}{2}\right) \text{ (por ángulo notable)}$$

$$\Rightarrow y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\cos[2{,}0x - 10t - \frac{53\pi}{360}] = 5\sqrt{5}\cos\left[\frac{53\pi}{360} - 2{,}0x + 10t\right]$$

y esto es equivalente a:

$$y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\cos\left[2{,}0x - 10t + \frac{127}{360} - \frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore \quad y_R(x;t) = 5\sqrt{5}\,\text{sen}\left[2{,}0x - 10t + \frac{127}{360}\pi\right]$ (es función de onda senoidal)

Amplitud = $5\sqrt{5}$ fase = $\frac{127}{360}\pi = 63{,}4°$ l.q.q.d.

26. Un murciélago puede detectar pequeños objetos, como un insecto cuyo tamaño es aproximadamente igual a una longitud de onda del sonido que el murciélago emite. Si estos animales emiten un chirrido a una frecuencia de 60,0 kHz y si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es el insecto más pequeño que un murciélago puede detectar?

Resolución :

λ = insecto más pequeño que un murciélago puede detectar.

Por otro lado: $v_{sonido} = \lambda f \Rightarrow \quad 340 = \lambda\,(60\text{ kHz})$

$\therefore \quad \lambda = 0{,}0057$ m

27. a) Escriba la expresión para y como una función de x y t de una onda senoidal que se propaga a lo largo de una cuerda en la dirección x negativa con las siguientes características: A = 8,00 cm, λ = 80,0 cm, f = 3,00 Hz y y(0; t) = 0 en t = 0. b) Escriba la expresión para y como una función de x para la onda en el inciso a) suponiendo que y(x; 0) = 0 en el punto x = 10,0 cm.

Resolución :

Parte (a)

Datos: A = 8,00 cm ; λ = 80,0 cm ; f = 3,00 Hz
y(0; t) = 0 ; t = 0

Entonces: $\omega = 2\pi \times f = 2(3{,}1416)(3) = 18{,}85$ rad/s

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2(3{,}1416)}{80} = 0{,}078 \text{ rad/cm}$$

Para $y(0;0) = 0 = \text{sen}(-\phi) \quad \therefore \quad \phi = 0$

En consecuencia: $y(x;t) = (8{,}00\text{ cm})\text{sen}[0{,}078x + 18{,}85t]$

Parte (b) $y(x;0) = (8{,}00\text{ cm})\text{sen}[0{,}7854]$
x = 10 cm
$\therefore \quad y(x;0) = 0{,}1$ cm

28. Una onda transversal en una cuerda se describe por medio de

$$y = (0{,}12\text{ m})\text{sen}\pi(x/8 + 4t)$$

a) Determine la velocidad y aceleración transversales de la cuerda en t = 0,20 s para el punto sobre la cuerda localizado en x = 1,6 m. b) ¿Cuáles son la longitud de onda, el periodo y la velocidad de propagación de esta onda?

Resolución :

$$y(x;t) = (0{,}12\text{ m})\text{ sen}\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$$

Parte (a) $\frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = (4\pi)(0{,}12)\cos\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$

Entonces: para: t = 0,20 s y x = 1,6 m

$$V_{transv} = \frac{\partial y(0{,}2;1{,}6)}{\partial t} = (4)(3{,}1416)\cos\left[\frac{1{,}6\,\pi}{8} + 4\pi\,(0{,}2)\right](0{,}12)$$

$$\therefore \quad V_{trans.} = +\,1{,}507 \text{ m/s}$$

Aceleración transversal de la cuerda = $-(4\pi)^2(0{,}12)\text{ sen}\left[\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right]$

Entonces: Para t = 0,2 s ; x = 1,6 m

$$A_{trans.} = -(4)^2(3{,}1416)^2(0{,}12)\text{sen}(\pi) = 0$$

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = 4\pi = \frac{2\pi}{T} \quad \therefore \quad T = 0{,}5$ s

Además: $\frac{\pi}{8} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda = 16$ m

En consecuencia: $v_{onda} = \frac{\lambda}{T} = \frac{(16)}{0{,}5} \quad \therefore \quad v_{onda} = 32$ m/s

29. Una onda senoidal transversal en una cuerda tiene un periodo T = 25,0 ms y viaja en la dirección x negativa con una velocidad de 30,0 m/s. En t = 0, una partícula sobre la cuerda en x = 0 tiene un desplazamiento de 2,00 cm y viaja hacia la izquierda con una velocidad de 2,0 m/s. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? c) ¿Cuál es la máxima velocidad transversal de la cuerda? d) Escribe la función de onda de la onda.

Resolución :

$T_{onda} = 25 \times 10^{-3}$ s ; $v_{onda} = 39{,}0$ m/s

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{30\times 25}{1000} = 75{,}0 \text{ cm} = 0{,}75 \text{ m}$$

Además: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{75{,}0} = \frac{8\pi}{3} \quad \wedge \quad \omega = \frac{2\pi}{25\times 10^{-3}} = 80\pi$ rad/s

Entonces: $y(x;t) = A\cos\left[\frac{8\pi}{3}x + 80\pi t - \phi\right]$

Pero: $y(0;\,0) = 0{,}02$ m

Además: $\dfrac{\partial y(x;t)}{\partial t} = -2$ m/s para $x = 0,\ t = 0$

Luego: $y(0;0) = 0{,}02\text{ m} = A\cos(\phi)$

Y: $+2 = -80\pi \times A\operatorname{sen}(-\phi)$ $(t = 0,\ x = 0)$

Luego: $\tan(\phi) = 2/(0{,}02)(40\pi)$ $\therefore$ $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{(0{,}02)(40\pi)}\right) = 0{,}379$ rad

En consecuencia: $\left|\dfrac{0{,}02}{\operatorname{sen}(\phi)}\right| = A$ $\therefore$ $A = 2{,}15$ cm

Parte (b)

El ángulo de fase inicial es: $\phi = 0{,}379$ rad

Parte (c) $v_{trans\ máxima} = A.\omega = (2{,}15)\,(80\pi)$

$\therefore$ $v_{trans\ máxima} = 541$ cm/s

Parte (d)

La ecuación de onda será: $y(x;\,t) = (2{,}15\text{ cm})\cos\left[\dfrac{8\pi}{3}x + 80\pi t - 0{,}379\right]$

30. Una onda senoidal de longitud de onda igual a 2,0 m y 0,10 m de amplitud viaja con una velocidad de 1,0 m/s por una cuerda. Al principio, el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen y la onda se mueve de izquierda a derecha. Calcule a) la frecuencia y la frecuencia angular, b) el número de onda angular, y c) la función de onda correspondiente a esta onda. Determine la ecuación de movimiento para d) el extremo izquierdo de la cuerda, y e) el punto sobre la cuerda en x = 1,5 m hacia la derecha del extremo izquierdo. f) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier punto sobre la cuerda?

Resolución:

Datos: $\lambda = 2{,}0$ m
$A = 0{,}10$ m $v_{onda} = 1{,}0$ m/s

Parte (a)

Sabemos que: $v = \lambda f \Rightarrow f = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ Hz

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \pi$ rad/s

Parte (b) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ rad/m

Parte (c) $y(x;\,t) = A\operatorname{sen}[kx + \omega t - \phi] \Rightarrow y(x;\,t) = (0{,}10\text{ m})\operatorname{sen}[\pi x + \pi t]$

Parte (d) $y(x;\,0) = (0{,}10)\operatorname{sen}[\pi x]$

Parte (e) Para $x = 1{,}5$ m

$\Rightarrow$ $y(x;\,0) = (0{,}10)\operatorname{sen}\left[\dfrac{3\pi}{2}\right] = -(0{,}10\text{ m})$

Parte (f) $v_{máxima} = A\omega = (0{,}1)(\pi) = 0{,}314$ m/s

31. Una onda se describe por medio de $y = (2{,}0\text{ cm})\operatorname{sen}(kx - \omega t)$, donde $k = 2{,}11$ rad/m, $\omega = 3{,}62$ rad/s, x está en metros y t en segundos. Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de la onda.

Resolución:

Datos: $k = 2{,}11$ rad/m ; $\omega = 3{,}62$ rad/s

$y(x;\,t) = (2{,}0\text{ cm})\operatorname{sen}[kx - \omega t]$

Amplitud = 2,0 cm ≡ 0,02 m

$2{,}11 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{2{,}11} = 2{,}98$ m

$\omega = 2\pi f \Rightarrow 3{,}62 = 2(3{,}1416)f$ $\therefore$ $f = 0{,}576$ Hz

$v_{onda} = \lambda f \Rightarrow v_{onda} = (2{,}98)(0{,}576) = 1{,}72$ m/s

32. Una onda senoidal en una cuerda se describe por medio de

$$y = (0{,}51\text{ cm})\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde $k = 3{,}1$ rad/cm y $\omega = 9{,}3$ rad/s. ¿Qué distancia se mueve la cresta en 10 s? ¿Se mueve en la dirección x positiva o negativa?

Resolución:

$y(x;\,t) = (0{,}51\text{ cm})\operatorname{sen}[kx - \omega t]$

$k = 3{,}1$ rad/cm $\omega = 9{,}3$ rad/s

Sabemos que: $9{,}3\ \dfrac{rad}{s} = 2\pi \times f \Rightarrow f = 1{,}00$ Hz

Por otro lado: $v_{onda} = \lambda f$

Además: $k = 3{,}1 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{3{,}1} = 2{,}03$ cm

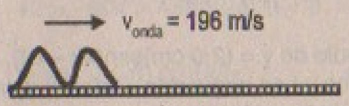
$\therefore$ $v_{onda} = (2{,}03)(1) = 2{,}03$ cm/s

Entonces: $x = n\lambda = v_{onda} \times t = (2{,}03)(10)$

$\therefore$ $x_{distancia} = 20{,}3$ cm (se mueve en la dirección «x» positiva)

33. Una onda transversal que viaja por un alambre tenso tiene una amplitud de 0,200 mm y una frecuencia de 500 Hz y viaja con una velocidad de 196 m/s. a) Escriba una ecuación en unidades del SI de la forma y = Asen(kx – ωt) para esta onda. b) La masa por unidad de longitud de este alambre es 410 g/m. Calcule la tensión en el alambre.

Resolución:



f = 500 Hz

Amplitud = (0,2 mm)

Parte (a)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad\omega = 2\pi f = (2)(3,1416)(500) = 1\ 000\ \pi$ rad/s

Además: 196 m/s $= \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,392$ m

En consecuencia: $k = \frac{2\pi}{0,392} = 16,03$ rad/m

Luego la ecuación de la función de onda será:

$$y(x;t) = (2\times10^{-3}\ \text{m})\text{sen}[16,03x - 1\ 000\pi t]$$

Parte (b)

$\mu = 4,10$ g/m $= 4,10\times10^{-3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

$\Rightarrow v_{onda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow (196)^2\times(4,10)\times10^{-3} = T \quad \therefore\ T = 157,5$ N

34. Una onda en una cuerda se describe mediante la función de onda y = (0,10 m) sen(0,50x – 20t). a) Muestre que una partícula en la cuerda en x = 2,0 m ejecuta un movimiento armónico. b) Determine la frecuencia de oscilación de este punto particular.

Resolución:

$$y(x;t) = (0,1\ \text{m})\text{sen}[0,5x - 20t]$$

Parte (a)

En x = 2,0 m $\quad y(2;t) = (0,1)\text{sen}[1-20t];\quad$ con $\omega = 20$ rad/s

Entonces: $\frac{\partial y}{\partial t} = -(0,1)(20)\cos[1-20t]$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(0,1)(20)^2\ \text{sen}[1-20t]$$

Por otro lado: sabemos que la ecuación diferencial de un M.A.S. es: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega^2 y = 0$

Entonces: $-(0,1)(20)^2\text{sen}[1-20t] + (0,1)\omega^2\ \text{sen}[1-20t] = 0$ cumple

En consecuencia una partícula en la cuerda en x = 20 m realiza un M.A.S.

Parte (b): $\quad\omega = 2\pi f \Rightarrow f = 20/2\pi = 3,2$ Hz

ENERGÍA TRANSMITIDA POR ONDAS SENOIDALES EN CUERDAS

35. Una cuerda tensada tiene una masa de 0,18 kg y una longitud de 3,6 m. ¿Qué potencia debe proporcionarse para generar ondas senoidales con una amplitud de 0,10 m y una longitud de onda de 0,50 m, y cuya velocidad sea de 30 m/s?

35A. Una cuerda tensada tiene una masa M y una longitud L. ¿Qué potencia debe proporcionarse para generar ondas senoidales con una amplitud A y una longitud de onda λ, y cuya velocidad sea v?

Resolución:

Datos: $M_{cuerda} = 0,18$ kg ; $\lambda = 0,5$ m

Longitud = 3,6 m ; $v_{onda} = 30$ m/s

Amplitud = (0,1 m)

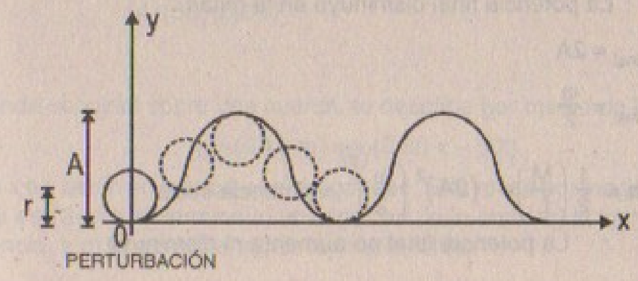
Sabemos que: $\left.\begin{array}{l}\omega = 2\pi\,.\,f\\ \text{y}\quad v_{onda} = \lambda\,.\,f\end{array}\right\} \div\ \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Luego: $\omega = \frac{v\times2\pi}{\lambda} = \frac{(30)(2)(3,1416)}{0,5} = 120\pi$ rad/s

Por lo tanto: $\text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_{cuerda}}{\text{Longitud}}\right)(30)(0,1)^2(120\pi)^2 = 1,07$ kW

36. Una onda bidimensional en el agua se distribuye en frentes de onda circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$ (Sugerencia: Considere la energía concentrada en el rizo que se mueve hacia afuera.)

Resolución:



Sabemos que: $y(x;t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$$v_{máx} = \frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = A.\omega\cos(\omega t + kx) = A.\omega$$

Entonces: Energía $= k.A^2.\omega^2$

Por otro lado:

En un mov. circular: $\dfrac{v^2}{r} = a_{cp}$ (en una onda)

Pero: $\dfrac{\partial^2 y(x;t)}{\partial t^2} = A.\omega^2 \Rightarrow v^2 = r.A.\omega^2$

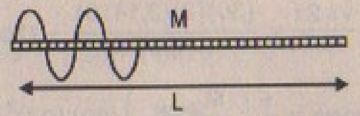
Luego: Energía (en una onda bidimensional) $= k =$ constante

En consecuencia: $k.A^2.\omega^2 = k(1/r)A.\omega^2 \quad \therefore \quad A = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ l.q.q.d.

37. Se generan ondas en una cuerda sometida a tensión constante. ¿En qué factor la potencia requerida aumenta o disminuye si: a) la longitud de la cuerda se duplica y la frecuencia angular permanece constante, b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, c) tanto la longitud de onda como la amplitud se duplican, y d) ambas variables se reducen a la mitad?

Resolución:

Sea:



$$\text{Potencial inicial} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v\omega^2A^2$$

Parte (a)

Si: $L_{final} = 2L$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v\omega^2A^2\right] = \frac{\text{Potencia Inicial}}{2}$$

$\therefore$ La potencia final disminuye en la mitad

Parte (b) $A_{final} = 2A$

$$\omega_{final} = \frac{\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\right)v\,.\,(2A)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \text{potencia inicial}$$

$\therefore$ La potencia final no aumenta ni disminuye

Parte (c)

$\lambda_{final} = 2\lambda \quad ; \quad A_{final} = 2A$

$\Rightarrow \quad v_{onda} = 2v$

Luego: $\text{Potencia} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{L}\right)(2v)(2A)^2(\omega)^2 = 8\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{L}\right)vA^2\omega^2\right]$

$\therefore$ La potencia aumenta en 8 veces la potencia inicial

Parte (d) $\lambda_{final} = \dfrac{\lambda}{2}$; amplitud final $= \dfrac{A}{2}$

$\Rightarrow \quad v_{onda\ final} = \dfrac{v}{2}$

Luego: $\text{Potencia} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{L}\right)\left(\dfrac{v}{2}\right)\left(\dfrac{A}{2}\right)^2(\omega)^2 = \dfrac{\text{Potencia inicial}}{8}$

$\therefore$ La potencia final es $\dfrac{1}{8}$ de la potencia inicial

38. Se desea transmitir ondas de 5,00 cm de amplitud a lo largo de una cuerda que tiene una densidad lineal de $4,00 \times 10^{-2}$ kg/m. Si la máxima potencia entregada por la fuente es de 300 W y la cuerda está sometida a una tensión de 100 N, ¿cuál es la frecuencia de vibración más alta a la cual puede operar la fuente?

Resolución:

Datos: $A = 0,05$ m ; $\mu = 4,00 \times 10^{-2}$ kg/m

Potencia = 300 W ; T = 100 N

$$v_{onda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{100}{4\times10^{-2}}} = 50 \text{ m/s}$$

Entonces: $300\text{ W} = \dfrac{1}{2}(4\times10^{-2})(50)(0,05)^2\omega^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{(300)(2)\times10^2}{(4)(50)(0,05)^2} = \omega^2 \quad \therefore \ \omega = 346,4 \text{ rad/s}$$

39. Una onda senoidal sobre una cuerda se describe por medio de la ecuación

$$y = (0,15\text{ m})\ \text{sen}(0,80\,x - 50t)$$

donde x e y están en metros y t en segundos. Si la masa por longitud unitaria de esta cuerda es 12 g/m, determine a) la velocidad de la onda, b) la longitud de onda, c) la frecuencia, y d) la potencia transmitida a la onda.

Resolución :

Datos: $\mu = 12 \times 10^{-3}\ \dfrac{kg}{m}$

$y(x;t) = (0{,}15)\text{sen}[0{,}80x - 50t]$

Parte (a)

Sabemos que: $\omega = 2\pi \times f = 50 \quad \therefore \quad f = 7{,}96$ Hz

Además: $0{,}80 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 7{,}854$ m

En consecuencia: $v_{onda} = \lambda f = (7{,}854)(7{,}96) = 62{,}52$ m/s

Parte (b)

La longitud de onda es: $\lambda = 7{,}854$ m

Parte (c)

$$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2 = \frac{1}{2}(12\times10^{-3})(62{,}52)(0{,}15)^2(50)^2$$

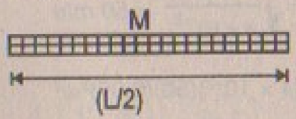
$\therefore$ Potencia = 21,10 W

40. Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima de P (sin romperse) si viaja por ella una onda con amplitud A y frecuencia angular ω. Con el fin de aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y utiliza esta «cuerda doble» como un transmisor. Determine la potencia máxima que puede transmitirse a lo largo de la «cuerda doble».

Resolución :

Inicialmente:

Finalmente:



Inicialmente: $\mu = M/L\ ;\quad v = \sqrt{\dfrac{TL}{M}}$

Finalmente: $\mu = \dfrac{2M}{L};\quad v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{TL}{M}}$

En consecuencia: Potencia máxima $= \dfrac{1}{2}(2)\left(\dfrac{M}{L}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)VA^2\omega^2$

$\therefore$ Potencia máxima $= \sqrt{2}\,P$

LA ECUACIÓN DE ONDA LINEAL

41. Demuestre que la función de onda $y = \ln[b(x - vt)]$ es una solución a la ecuación 16.26, donde b es una constante.

Resolución :

Por demostrar que: $y = \ln[b(x - vt)]$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando primero con respecto a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{bx - bvt} = \frac{1}{x - vt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-vt)^2}$$

Luego derivando con respecto a «t»:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{v}{b(x-vt)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{v^2}{b}\left(\frac{1}{x-vt}\right)^2$$

Reemplazando en (α): $-\dfrac{1}{(x-vt)^2} = -\dfrac{v^2}{b}\cdot\dfrac{1}{(x-vt)^2}$

En consecuencia: $y = \ln[b(x - vt)]$ es solución de (α) l.q.q.d.

42. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda (ecuación 16.26), donde b es una constante.

Resolución :

Por demostrar que: $y = e^{b(x-vt)}$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Derivando primeramente con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = be^{bx-bvt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2e^{b(x-vt)}$$

Luego derivando con respecto a t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -bve^{bx-bvt} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2v^2e^{b(x-vt)}$$

Reemplazando en (α):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{l.q.q.d.}$$

43. a) Demuestre que la función $y(x, t) = x^2 + v^2t^2$ es una solución a la ecuación de onda. b) Muestre que la función anterior puede escribirse como $f(x + vt) + g(x - vt)$ y determine las formas funcionales de f y g. c) Repita los incisos a) y b) para la función $y(x; t) = \text{sen}(x)\cos(vt)$.

Resolución :

Por demostrar que: $y(x; t) = x^2 + v^2t^2$ es solución de:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \dots (\alpha)$$

Derivando primero con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2$$

Luego derivando con respecto a t

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2v^2t \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2v^2$$

Reemplazando en (α): $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ l.q.q.d.

Parte (b)

Sabemos que: $y(x; t) = x^2 + v^2.t^2$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Pero:} & y(x; t) &= (x + vt)^2 - 2xvt \\ &\text{ó:} & y(x; t) &= (x - vt)^2 + 2xvt \end{aligned}\right\} \; (+)$$

$$y(x; t) + y(x; t) = (x + vt)^2 + (x - vt)^2 \quad \dots (\alpha)$$

Por hipótesis: $y(x; t) = f(x + vt) + g(x - vt)$

$\Rightarrow$ Por (α): $f(x + vt) = \dfrac{1}{2}(x + vt)^2 \;\wedge\; g(x - vt) = \dfrac{1}{2}(x - vt)^2$

En consecuencia: $y(x; t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ l.q.q.d.

PROBLEMAS ADICIONALES

44. Una onda viajera se propaga de acuerdo con la expresión $y = (4{,}0 \text{ cm})\text{sen}(2{,}0x - 3{,}0t)$, donde x se mide en centímetros y t en segundos. Determine: a) la amplitud, b) la longitud de onda, c) la frecuencia, d) el periodo, y e) la dirección de propagación de la onda.

Resolución :

$$y(x; t) = (4{,}0 \text{ cm})\text{sen}(2{,}0x - 3{,}0t)$$

Parte (a) Amplitud = 4,0 cm

Parte (b) $k = 2{,}0 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{2{,}0} = 3{,}1416 \text{ cm}$

Parte (c) $3{,}0 = 2\pi \times f \Rightarrow f = \dfrac{3{,}0}{2(3{,}1416)} = 0{,}48 \text{ Hz}$

Parte (d) $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{0{,}48} = 20{,}9 \text{ s}$

Parte (e) Como: $2{,}0x - 3{,}0t = \text{cte}$

$$\Rightarrow 2{,}0\frac{dx}{dt} = 3{,}0 \quad \therefore \quad v_{onda} = 1{,}5 \text{ cm/s (positiva)}$$

Luego: La dirección de propagación de la onda es en la dirección «x» positiva.

45. La función de onda para una onda polarizada lineal en una cuerda tensada es (en unidades del SI)

$$y(x; t) = (0{,}35 \text{ m})\text{sen}(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

a) ¿Cuáles son la velocidad y dirección de propagación de la onda? b) ¿Cuál es el desplazamiento vertical de la cuerda en t = 0, x = 0,10 m? c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la onda? d) ¿Cuál es la magnitud máxima de la velocidad transversal de la cuerda?

Resolución :

$$y(x; t) = (0{,}35 \text{ m})\ \text{sen}[10\pi t - 3\pi x + \pi/4]$$

Parte (a) $10\pi t - 3\pi x + \dfrac{\pi}{4} = \text{cte}$

$$\Rightarrow -3\pi dx + 10\pi dt = 0 \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

Como v_{onda} es positiva entonces la dirección de propagación de la onda es en la dirección «x» positiva.

Parte (b) $y(0{,}1 \text{ m}; 0) = (0{,}35)\text{sen}[-3\pi(0{,}1) + \dfrac{\pi}{4}]$

$$\therefore \quad y(0{,}1 \text{ m}; 0) = -0{,}055 \text{ m} \equiv -5{,}48 \text{ cm}$$

Parte (c) Como: $v_{onda} = \dfrac{10}{3} = \lambda f$

Además: $10\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$

Luego: $\dfrac{10}{3} = \lambda\,(5) \quad \therefore \quad \lambda = \dfrac{2}{3} \text{m}$

Parte (d) $v_{trans.máxima} = A\omega = (0{,}35)(10)(3{,}1416) = 11 \text{ m/s}$

46. Un bloque de masa M = 2,0 kg, soportado por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo de θ = 45° con la horizontal (Fig. P16.46). La longitud de la cuerda es L = 0,5 m y su masa es m = 2,0 g, por lo que ésta es mucho menor que M. Determine el tiempo que tarda una onda transversal en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

46A. Un bloque de masa M, soportado por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig. P16.46). La longitud de la cuerda es L y su masa es m << M. Determine el tiempo que tarda una onda transversal en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

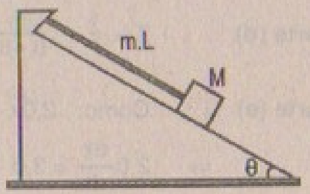
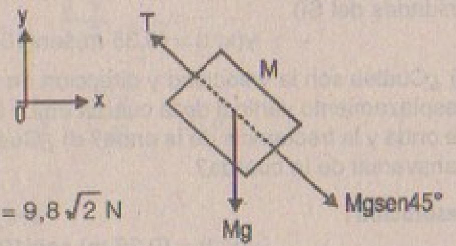


Figura P16.46

Resolución:

M = 2,0 kg
L = 0,5 m
θ = 45°
m = 2,0 g

D.C.L. (bloque)



$\Sigma F_x = 0$

$$\Rightarrow \; T = Mg\,sen45° = (2)(9,8)\frac{\sqrt{2}}{2} = 9,8\sqrt{2}\text{ N}$$

Entonces:

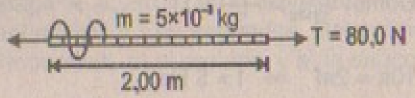
$$v_{onda}\text{ (en una cuerda)} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{(9,8)\sqrt{2}\times10^{3}}{(2)}\times(0,5)} = 58,86\text{ m/s}$$

En consecuencia: $V \times t = L$

$$\Rightarrow \quad (58,86)\times t_{total} = (0,5) \qquad \therefore \quad t_{total} = 8,5\text{ ms}$$

47. a) Determine la velocidad de las ondas transversales en una cuerda sometida a una tensión de 80,0 N si la cuerda tiene una longitud de 2,00 m y una masa de 5,00 g. b) Calcule la potencia requerida para generar estas ondas si tales tienen una longitud de onda de 16,0 cm y una amplitud de 4,00 cm.

Resolución:



Parte (a) $v_{\text{onda en una cuerda}} = \sqrt{\dfrac{T}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\dfrac{(80)(2)\times10^{3}}{5}} = 178,9\text{ m/s}$

Parte (b) $\lambda = 0,16$ m ; $A = 0,04$ m

Entonces: $178,9 = (0,16)f \quad \Rightarrow \quad f = 1\,118$ Hz

Luego: $\omega = 2\pi f = 2(3,1416)(1\,118) = 7\,025$ rad/s

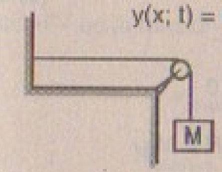
En consecuencia:

$$\text{Potencia} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\times10^{-3}}{2}\right)(178,9)(0,04)^2(7\,025)^2 = 17,7\text{ kW}$$

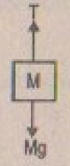
48. Una onda senoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda y = (0,20 m) sen[π(0,75x + 18t)], donde x e y están en metros y t en segundos. La cuerda tiene una densidad de masa lineal de 0,25 kg/m. Si la tensión en la cuerda la brinda un arreglo similar al que se ilustra en la figura 16.11, ¿cuál es el valor de la masa suspendida?

Resolución:

$$y(x;t) = (0,20\text{ m})sen\left[\frac{3\pi}{4}x + 18\pi t\right]$$



$$\mu_{cuerda} = 0,25\ \frac{kg}{m}$$



$\Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0$

$\therefore \quad T = Mg$

Por otro lado: $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad \therefore \quad \lambda = \dfrac{8}{3}$ m

Además: $18\pi = 2\pi \times f \qquad \therefore \quad f = 9$ Hz

Entonces: $v_{onda} = \lambda \cdot f = \left(\dfrac{8}{3}\right)(9) = 24$ m/s

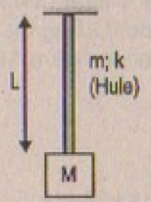
Luego: $v_{onda} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{Mg}{0,25}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(24)^2\times(0,25)}{9,8} = M \qquad \therefore \quad M = 14,7\text{ kg}$$

49. Un bloque de 2,0 kg cuelga de una cuerda de hule y se sostiene de modo que la cuerda no se estire. La longitud sin estirar de la cuerda es de 0,5 m y su masa es igual a 5,0 g. La «constante de cuerda» es de 100,0 N/m. El bloque se suelta y se detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición «alargada»? c) Encuentre la velocidad de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

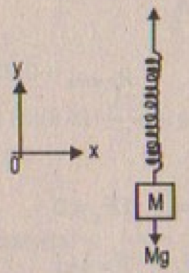
49A. Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de hule y se sostiene de modo que la cuerda se estire. La longitud sin estirar de la cuerda es L_0 y su masa es m. La «constante de cuerda» es de k. El bloque se suelta y se detiene en el punto más bajo. a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición «alargada»? c) Encuentre la velocidad de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

Resolución :



$m = 5 \times 10^{-3}$ kg
$M = 2{,}0$ kg
$L = 0{,}5$ m
$k = 100$ N/m

Parte (a)
D.C.L.

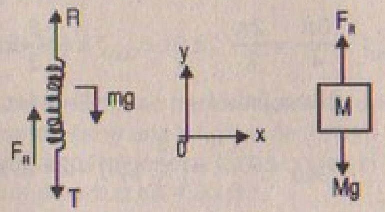


$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad R = Mg$

Por otro lado:

$\Sigma F_y = 0$



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow \quad T = F_R + R = Mg + Mg$

$\therefore \quad T = 2Mg = 2(2)(9{,}8) = 39{,}2$ N

Parte (b)

Sabemos que: $2F_R = k.\Delta L = 2Mg \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \dfrac{2Mg}{k}$

$$\therefore \; L_{final} = L + \frac{2Mg}{k} = 0{,}5 + \frac{2(2)(9{,}8)}{100} = 0{,}892 \text{ m}$$

Parte (c) $\quad v_{onda\ trans} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \left[\dfrac{2\ Mg}{m}(L + 2Mg/k)\right]^{1/2}$

Reemplazando: $v_{onda} = \left(\dfrac{2(2)(9{,}8)}{5 \times 10^{-3}}\left[0{,}5 + 2(2)(9{,}8)/100\right]\right)^{1/2} = 83{,}6$ m/s

50. Un alambre de densidad ρ se envuelve en una cinta de manera que su área de sección transversal varíe con x, de acuerdo con

$$A = (1{,}0 \times 10^{-3}x + 0{,}010)\text{cm}^2$$

a) Si el alambre se somete a una tensión F, obtenga una relación para la velocidad de onda como una función de la posición. b) Si el alambre es aluminio y se somete a una tensión de 24 N, determine la velocidad en el origen y en x = 10 m.

Resolución :
Alambre de densidad = ρ

$$A = (1{,}0 \times 10^{-3}x + 0{,}010)\ \text{cm}^2$$

Parte (a)
Como: «F» es la tensión a que se somete dicho alambre, entonces:

$$v_{\text{onda en una cuerda}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F\,.\,L}{M_{alambre}}}$$

Pero: $\quad M_{alambre} = \rho\text{Volumen} = \rho\ .\ \text{Área} \times L$

Entonces: $\quad v_{\text{onda en una cuerda (alambre)}} = \left[\dfrac{F}{\rho\,(0{,}001x + 0{,}010)}\right]^{1/2}$

Parte (b)
Si F = 24 N $\quad \rho_{aluminio} = 2{,}70 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 \quad$ y $\quad x = 10$ m

Entonces: $v_{\text{onda en el alambre de Al}} = \left[\dfrac{24 \times 10^4}{\left(2{,}70 \times 10^3\right)\left[10^{-3}(10) + 10^{-2}\right]}\right]$

$\therefore \quad v_{\text{onda en el alambre de Al}} = 66{,}7$ m/s

51. Determine la velocidad y dirección de propagación de cada una de las siguientes ondas senoidales, suponiendo que x se miden en metros y t en segundos.
a) $y = 0{,}60\cos(3{,}0x - 15t + 2)$ b) $y = 0{,}40\cos(3{,}0x + 15t - 2)$
c) $y = 1{,}2\text{sen}(15t + 2{,}0x)$ d) $y = 0{,}20\text{sen}(12t - x/2 + \pi)$

Resolución :

Parte (a)
Sea: $\quad y(x;\,t) = (0{,}60\ \text{m})\cos[3{,}0x - 15t + 2]$

$3{,}0x - 15t + 2 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad 3{,}0dx - 15dt = 0$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = 5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es positiva, entonces la dirección de la onda es en el eje «x» positiva

Parte (b)

Sea: $y(x;\, t) = (0{,}40)\cos[3{,}0x + 15t - 2]$

$3{,}0x + 15t - 2 = cte$

$$\Rightarrow \quad 3{,}0dx + 15dt = 0 \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = -5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces la dirección y propagación de la onda es en el eje «x» negativa.

Parte (c)

Sea: $y(x;\, t) = (1{,}2)\text{sen}[2{,}0x + 15t]$

$2{,}0x + 15t = cte \;\Rightarrow\; 2{,}0dx + 15dt = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = -7{,}5 \text{ m/s}$$

Como: v_{onda} es negativa, entonces la dirección y propagación de la onda es el eje «x» negativa.

Parte (d)

Sea: $$y(x;\, t) = (0{,}20)\text{sen}\left[12t - \frac{x}{2} + \pi\right]$$

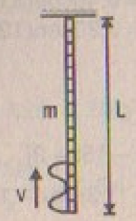
$$12t - \frac{1}{2}x + \pi = cte \quad \Rightarrow \quad 12dt - 0{,}5dx = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = v_{onda} = 24 \text{ m/s}$$

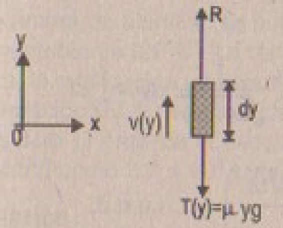
Como: v_{onda} es positiva, entonces la dirección y propagación de la onda es en el eje «x» positiva.

52. Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Demuestre que un pulso de onda transversal recorrerá la longitud de la cuerda en un tiempo $t = 2\sqrt{L/g}$. (Sugerencia: Encuentre primero una expresión para la velocidad de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior considerando la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de ese punto.)

Resolución:



Sea: μ: densidad lineal



$$\Rightarrow \quad v_{(y)} = \sqrt{\frac{\mu yg}{\mu}} = \sqrt{yg}$$

Sabemos que: $$\frac{dy}{dt} = \sqrt{yg} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^t dt$$

$$\therefore \quad t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

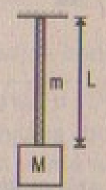
53. Si la masa M se suspende de la parte inferior de la cuerda del problema 52, a) Demuestre que el tiempo necesario para que la onda transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m} - \sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right)$$

b) Demuestre que esto se reduce al resultado del problema 52 cuando M = 0.

c) Demuestre que para m << M, la expresión en el inciso a) se reduce a $t = \sqrt{\dfrac{mL}{Mg}}$

Resolución:

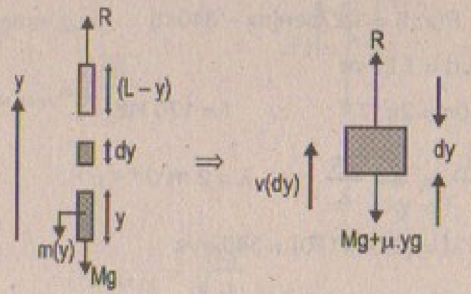


$$\mu = \frac{m}{L}$$

Parte (a)

Por demostrar que: $$t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m} - \sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right)$$

Sea:



Donde: $\mu = \dfrac{m}{L}$

Entonces: $dy = v(dy).dt$

$$\Rightarrow \quad dy = \sqrt{\frac{(M+\mu y)g}{\mu}}\,.\,dt \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{\mu}{g}}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{M+\mu y}}\,dy = \int_0^t dt$$

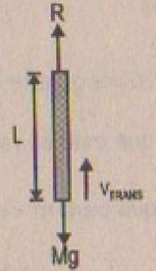
En consecuencia: $$t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\sqrt{M+m}-\sqrt{M}}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b) Si $M = 0 \;\Rightarrow\; t_{total} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$ l.q.q.d.

Parte (c)
Por demostrar que para: $m << M$

$$t_{total} = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

Como: $m << M$
Entonces:



Por cinemática:

$v_{onda\ trans} \cdot t_{total} = L$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{MgL}{m}} \times t_{total} = L \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{mL^2}{MgL}} = t_{total}$$

$$\therefore \quad t_{total} = \sqrt{\frac{mL}{Mg}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

54. Cuando una onda sonora viaja por el aire produce variaciones de presión (arriba y abajo de la presión atmosférica) dadas por $P = 1{,}27\text{sen}\,\pi(x - 340t)$ en unidades del SI. Calcule a) la amplitud de las variaciones de presión, b) la frecuencia, c) la longitud de onda en el aire, y d) la velocidad de la onda sonora.

Resolución:

$$P(x;t) = 1{,}27\text{sen}[\pi x - 340\pi t]$$

Parte (a) Amplitud = 1,27 m

Parte (b) $\omega = 340\pi = 2\pi f \quad \therefore \quad f = 170$ Hz

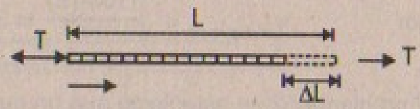
Parte (c) $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \lambda = 2$ m

Parte (d) $v_{onda} = \lambda f = (2{,}00)(170) = 340$ m/s

55. Un alambre de aluminio se sujeta en cada extremo bajo una tensión cero a temperatura ambiente (22°C). La tensión en el alambre se incrementa al reducir la temperatura, lo cual origina una disminución en la longitud de equilibrio del alambre. ¿Qué deformación ($\Delta L/L$) se produce en una velocidad de onda transversal de 100 m/s? Considere el área de la sección transversal del alambre igual a $5{,}0 \times 10^{-6}$ m², la densidad como $2{,}7 \times 10^3$ kg/m³ y el módulo Young de $7{,}0 \times 10^{10}$ N/m².

Resolución:

$v_{onda} = 100$ m/s
Área $= 5{,}0 \times 10^{-6}$ m²
$\rho_{Al} = 2{,}7 \times 10^3$ kg/m³
Young $= 7{,}0 \times 10^{10}$ N/m²



Sabemos que: $$v_{onda\ trans} = \sqrt{\frac{T \times L}{M_{Al}}}$$

Pero: $$M_{alum} = \rho\,.\,Vol = \rho AL$$

$$\Rightarrow \quad v_{onda\ trans} = \sqrt{\frac{TL}{\rho AL}} = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$$

$$\Rightarrow \quad (100)^2(2{,}7 \times 10^3)(5{,}0 \times 10^{-6}) = T \qquad \therefore \quad T = 135 \text{ N}$$

Luego: $$\frac{T}{A} = Y.\frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{(135)}{(5{,}0)(10^{-6})(7\times10^{10})} = 3{,}86 \times 10^{-4}$$

56. a) Demuestre que la velocidad de ondas longitudinales a lo largo de un resorte de constante de fuerza k es $v = \sqrt{kL/\mu}$, donde L es la longitud sin alargar del resorte y μ es la masa por longitud unitaria. b) Un resorte de 0,40 kg de masa tiene una longitud sin alargar de 2,0 m y una fuerza constante de 100 N/m. Utilizando los resultados del inciso a), determine la velocidad de ondas longitudinales a lo largo de este resorte.

Resolución:

Parte (a)
Por demostrar que:

$$v_{ondas\ trans} = \sqrt{\frac{kL}{\mu}}$$

$F_R = k(y) \qquad \Rightarrow \quad \Sigma F_y = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \quad ky = T$

Luego: $$v_{ondas\ (y)} = \sqrt{\frac{ky}{\mu}}$$

En particular $\quad y = L \Rightarrow \quad v_{\text{ondas trans}} = \sqrt{\dfrac{kL}{\mu}} \quad$ l.q.q.d.

Parte (b)

$\mu = \dfrac{0{,}4}{2{,}0} \quad \Rightarrow \quad \mu = 0{,}2 \qquad k = 100\ \text{N/m}$

Luego: $\quad v_{\text{ondas trans}} = \sqrt{\dfrac{(100)(2)}{0{,}2}} = 31{,}6\ \text{m/s}$

57. En el problema 52 se estableció que un pulso de onda viaja desde la parte inferior hasta la superior de una cuerda de longitud L en un tiempo $t = 2\sqrt{L/g}$. Use este resultado para responder las siguientes preguntas. (No es necesario efectuar ninguna nueva integración.) a) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso onda en recorrer la mitad de la cuerda? (Dé su respuesta como una fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$) b) Un pulso empieza a viajar por la cuerda. ¿Qué distancia ha recorrido después de un tiempo $\sqrt{L/g}$?

Resolución:
Parte (a)

Sabemos que: $t_{\text{total}} = 2\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ para una cuerda de longitud «L»

Si ahora la cuerda tiene una longitud de: "$\dfrac{L}{2}$" entonces:

$$t_{\text{total}} = 2\sqrt{\frac{L}{2g}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \left(\frac{2L}{g}\right)^{1/2}$$

Parte (b)

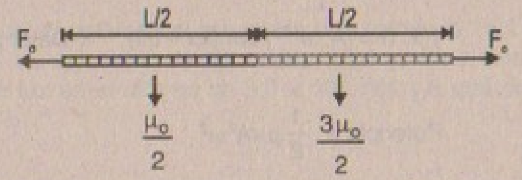
Si: $\dfrac{L}{2}$ lo recorre en un tiempo $\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$

«x» lo recorrerá en un tiempo $\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$\therefore \quad x = \frac{L}{4}$$

58. Una cuerda de longitud L consta de dos secciones. La mitad izquierda tiene una masa por longitud unitaria $\mu = \mu_o/2$, en tanto que la derecha tiene una masa por unidad de longitud $\mu' = 3\mu = 3\mu_o/2$. La tensión en la cuerda es F_0. Advierta, según los datos proporcionados que esta cuerda tiene la misma masa total que una cuerda uniforme de longitud L y masa por longitud unitaria μ_0. a) Encuentre las velocidades v y v' a la cual los pulsos de la onda transversal viajan en las dos secciones. Exprese las velocidades en términos de F_0 y μ_0, y también como múltiplos de la velocidad $v_0 = \sqrt{F_o/\mu_o}$. b) Encuentre el tiempo necesario para que un pulso viaje de un extremo al otro de la cuerda. Brinde su resultado como un múltiplo de $T_0 = L/v_0$.

Resolución :



Parte (a)

$$v_{\text{pulso en la cuerda (parte izquierda)}} = \sqrt{\frac{F_o}{\dfrac{\mu_o}{2}}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{F_o}{\mu_o}}$$

$$v_{\text{pulso en la cuerda (parte derecha)}} = \sqrt{\frac{F_o}{\dfrac{3\mu_o}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{\frac{F_o}{\mu_o}}$$

Parte (b)
Por cinemática:

$$t_{\text{total (parte izquierda)}} = \frac{\dfrac{L}{2}}{v_{\text{pulso}}} = \frac{\dfrac{L}{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{F_o}{\mu_o}}} = \frac{L\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{\mu_o}{F_o}}$$

$$t_{\text{total (parte derecha)}} = \frac{\dfrac{L}{2}}{v_{\text{pulso}}} = \frac{\dfrac{L}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{\dfrac{F_o}{\mu_o}}} = \frac{L\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_o}{F_o}}$$

En consecuencia:
El tiempo total necesario para que un pulso viaje de extremo a extremo será:

$$t_{\text{total (parte izquierda)}} + t_{\text{total (derecha)}} = t_{\text{total necesario}}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\text{total}} = \frac{L\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{\frac{\mu_o}{F_o}} + \frac{L\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_o}{F_o}} = \frac{L\sqrt{2}}{4}\left[1 + 2\sqrt{3}\right]v_o$$

59. Un pulso de onda que viaja a lo largo de una cuerda de densidad de masa lineal μ se describe por medio de la relación

$$y = [A_0 e^{-bx}]\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

donde se afirma que los factores entre corchetes antes del seno corresponden a la amplitud. a) ¿Cuál es la potencia P(x) que transporta esta onda en el punto x? b) ¿Cuál es la potencia que transporta esta onda en el origen? c) Calcule la razón P(x)/P(0).

Resolución:

Sea: $y(x;\, t) = [A_o . e^{-bx}]\ \text{sen}(kx - \omega t)$ Dato: μ: densidad lineal

Parte (a)

Sabemos que $\text{Potencia} = \dfrac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2$

$\Rightarrow$ $\text{Potencia}(x) = \dfrac{1}{2}\mu . (A_o . e^{-bx})^2 \omega^2 v$

Pero: $v = \dfrac{\omega}{k}$

$\therefore$ $\text{Potencia}\ (x) = \dfrac{1}{2}\mu . A_0^2\ \dfrac{\omega^3}{k}\ e^{-2bx}$

Parte (b) $P(0) = \left(\dfrac{1}{2k}\right)\mu\omega^3 A_0^2$

Parte (c) Nos piden: $\dfrac{P(x)}{P(0)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(x)}{P(0)} = \frac{\frac{1}{2}\mu A_0^2 \frac{\omega^3}{k} e^{-2bx}}{\frac{1}{2}\mu \frac{\omega^3}{k} A_0^2} \qquad \therefore \quad \frac{P(x)}{P(0)} = e^{-2bx}$$

Capítulo 17

ONDAS SONORAS

VELOCIDAD DE ONDAS SONORAS

1. Suponga que usted escucha el trueno de una tormenta 16,2 s después de ver el rayo asociado. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 343 m/s y la velocidad de la luz en el aire es de $3{,}0 \times 10^8$ m/s. ¿A qué distancia se encuentra usted del rayo?

Resolución:

Supongamos que en un tiempo «t», el rayo se encuentra con respecto del observador a una distancia «d».

Entonces en un tiempo «t + 16,2 s» las ondas de sonido han recorrido dicha distancia; luego:

Por cinemática: $v_{luz} \times t = d$ ... (1) Donde: $v_{luz} = 3 \times 10^8$ m/s

$v_{sonido} \times (t + 16{,}2) = d$ ... (2) Donde: $v_{sonido} = 343$ m/s

Igualando: $v_{luz} \times t = v_{sonido}\ (t + 16{,}2)$

$\Rightarrow$ $(3 \times 10^8 - 343)\ t = 343(16{,}2)$ $\therefore$ $t = \dfrac{343\ (16{,}2)}{\underbrace{3\times10^8 - 343}_{\approx 3\times10^8}}$

En consecuencia:

$d = \text{distancia del observador al rayo} = 3 \times 10^8 . \dfrac{(343)(16{,}2)}{3\times10^8} \approx 5{,}56$ km

2. Se deja caer una piedra en un profundo cañón y se escucha que golpea el fondo 10,2 s después. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 343 m/s. ¿Cuál es la profundidad del cañón? ¿Cuál sería el porcentaje de error en la profundidad si no se toma en cuenta el tiempo que tarda el sonido en llegar a la orilla del cañón?

2A. Se deja caer una piedra en un profundo cañón y se escucha que golpea el fondo t segundos después. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es v. ¿Cuál es la profundidad del cañón? ¿Cuál sería el porcentaje de error en la profundidad si no se toma en cuenta el tiempo que tarda el sonido en llegar a la orilla del cañón?

Resolución:

En un tiempo «t» la piedra recorrerá la profundidad «H» del cañón, entonces:
En un tiempo «t + 10,2» las ondas del sonido recorrerán dicha profundidad.
Luego:

Por caída libre: $H = \dfrac{1}{2}(g)t^2$ Donde: $g = 9{,}8\ m/s^2$

Por cinemática: $v_{sonido}(t + 10,2) = H$ donde $v_{sonido} = 343$ m/s

Entonces: $4,9\,t^2 - 343\,t - 3\,498,6 = 0$

Resolviendo la ecuación resulta que: $t = 79,03$ s

En consecuencia: $H = \frac{1}{2}(9,8)(79,03)^2 \quad \therefore \quad H = 30\,605,7$ m

3. Calcule la velocidad del sonido en el elemento mercurio, el cual tiene un módulo volumétrico de aproximadamene $2,8 \times 10^{10}$ N/m² y una densidad de 13 600 kg/m³.

Resolución:

Datos: $B_{Hg} = 2,8 \times 10^{10}$ N/m² ; $\rho_{Hg} = 18\,600$ kg/m³

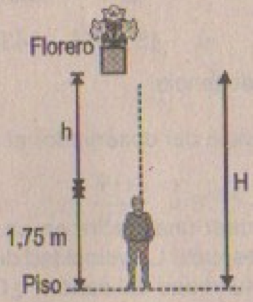
$v_{Hg} = ?$

Sabemos que: $v_{ondas\ sonoras} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad v_{ondas\ sonoras} = \sqrt{\frac{2,8 \times 10^{10}}{13\,600}}$

$\therefore \quad v_{ondas\ sonoras} = 1\,435$ m/s

4. Un florero cae por un balcón que está a 20,0 m de altura de la acera y se aproxima a la cabeza de un hombre de 1,75 m de altura que se encuentra parado abajo. ¿A qué altura sobre el suelo debe estar el florero después de la cual sería demasiado tarde para que el hombre escuche a tiempo un grito de aviso? Suponga que el hombre necesita 0,300 s para reaccionar al aviso.

Resolución:



Para que el hombre pueda reaccionar al aviso necesita como mínimo un tiempo de: 0,300 s, entonces:

Por caída libre:

$h = \frac{1}{2}(9,8)t^2 = \frac{1}{2}(9,8)(0,300)^2$

$\therefore \quad h = 0,44$ m

En consecuencia:

El florero debe estar a una altura $H = h + 1,75$ m

$\therefore \quad H = 1,75 + 0,44 = 2,19$ m

5. La velocidad del sonido en el aire es $v = \sqrt{\gamma P/\rho}$, donde γ es una constante igual a 7/5, P es la presión del aire y ρ es la densidad del aire. Calcule la velocidad del sonido para $P = 1$ atm $= 1,013 \times 10^5$ Pa y $\rho = 1,29$ kg/m³.

Resolución:

Por dato: $v_{sonido\ en\ el\ aire} = \sqrt{\frac{\gamma . P}{\rho}}$

$\gamma = \frac{7}{5}$, ρ = densidad del aire , P = presión del aire

Para: $P = 1$ atm $= 1,013 \times 10^5$ Pa $\quad \rho_{aire} = 1,29$ kg/m³

Entonces: $v_{sonido\ en\ el\ aire} = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{(1,013 \times 10^5)}{1,29}}$

$\therefore \quad v_{sonido\ en\ el\ aire} = 332$ m/s

ONDAS SONORAS PERIÓDICAS

Nota: En esta sección utilice los siguientes valores según sea necesario, a menos que se especifiquen de otra manera: la densidad de equilibrio del aire, $\rho = 1,29$ kg/m³; la velocidad del sonido en el aire, $v = 343$ m/s. Además, las variaciones de presión ΔP se miden en relación con la presión atmosférica.

6. La densidad del aluminio es $2,7 \times 10^3$ kg/m³. Utilice el valor para la velocidad del sonido en el aluminio dado en la tabla 17.1 para calcular el módulo de Young correspondiente a este material.

Resolución:

Datos: $\rho_{Al} = 2,7 \times 10^3$ kg/m³ ; $Y = ?$; $v_{Al} = 5\,100$ m/s (Tabla 17.1)

Sabemos que: $v_{Al} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

$\Rightarrow \quad v_{Al}^2 \times \rho = Y$

$\Rightarrow \quad (5\,100)^2 \times (2,7 \times 10^3) = Y \quad \therefore \quad Y = 7,02 \times 10^{10}$ N/m²

7. Mientras usted observa la construcción de un muelle en la orilla lejana de un estuario ocurre una explosión. Escucha el sonido en el agua 4,5 s antes de que llegue a usted por el aire. ¿Cuál es la anchura del estuario? (Sugerencia: Vea la tabla 17.1. Suponga que la temperatura del aire es de 20° C.)

Resolución:

Por dato: $v_{aire}(20°C) \times t$ = Long. del estuario

$v_{agua\ mar} \times (t - 4,5)$ = Long. del estuario

Donde: $v_{ondas\ (aire)} = 343$ m/s

$v_{ondas\ (agua\ de\ mar)} = 1\,533$ m/s

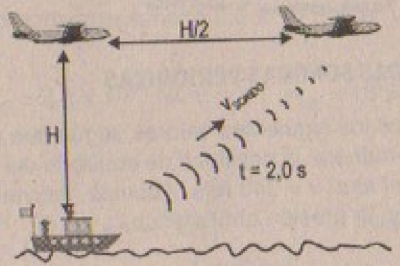
Entonces: (Igualando)

$343t = 1\,533\,(t - 45) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1\,533 \times 4,5}{1\,533 - 343} \quad \therefore \quad t = 5,797$ s

En consecuencia: Longitud del estuario $= (343)(5,797) = 1,988$ km

8. Un avión de rescate vuela horizontalmente a una velocidad constante durante la búsqueda de un bote a la deriva. Cuando el avión está exactamente sobre el bote, la tripulación de éste hace sonar una bocina. En el momento en que el detector de sonidos del avión percibe la señal de auxilio de la bocina, el avión ha recorrido una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si el sonido tarda 2,0 s en llegar al avión, determine a) la velocidad de éste, y b) su altura. Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

Resolución :



$v_{\text{sonido en el aire}} = 343$ m/s

Parte (a)

Sabemos que: $v_{\text{sonido}} \times t = \frac{H}{2}\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad (343)(2,0) = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{5}$

$\therefore \quad \frac{H}{2} = 306,8$ m

Por otro lado: $\frac{H}{2} = v_{\text{avión}} \times (2,0) \quad \Rightarrow \quad \frac{306,8}{2} = v_{\text{avión}}$

$\therefore \quad v_{\text{avión}} = 153,4$ m/s

Parte (b)

Como: $\frac{H}{2} = 306,8 \quad \Rightarrow \quad H = 613,6$ m

9. La velocidad del sonido (en m/s) depende de la temperatura de acuerdo con la expresión

$$v = 331,5 + 0,607T_C$$

donde T_C es la temperatura en grados Celsius. En aire seco la temperatura disminuye cerca de 1°C por cada 150 m de aumento en la altura. a) Suponiendo que este cambio es constante hasta una altitud de 9 000 m, ¿cuánto tardará el sonido desde un avión que vuela a 9 000 m en llegar al suelo en un día en el que la temperatura en la superficie es de 30°C? b) Compare este valor con el tiempo que sería necesario si el aire tuviera una temperatura constante de 30°C. ¿Qué tiempo será mayor?

Resolución :

Parte (a)

A 9 000 m y la velocidad del sonido será: $v = 331,5 + 0,607(-1)$, a 30°C

$\therefore \quad v = 330,893$ m/s

Entonces: $9\,000 = 330,893 \times t_{\text{total}}$

$\therefore \quad t_{\text{total}} = 27,2$ s

Parte (b)

Para T = 30°C

Entonces: $v_{\text{sonido}} = 331,5 + 0,607\,(30)$

$\therefore \quad v_{\text{sonido}} = 349,71$ m/s

Luego: $(349,71)t = 9\,000 \quad \therefore \quad t = 25,7$ s

En consecuencia: este tiempo es menor en 5,30%

10. Calcule la amplitud de presión de una onda sonora de 2,0 kHz en el aire si la amplitud de desplazamiento es igual a $2,0 \times 10^{-8}$ m.

Resolución :

Nos piden $\Delta P_{\text{máx}} = ?$

Entonces: $\Delta P_{\text{máx}} = \rho_{\text{aire}} \cdot v_{\text{sonido aire}} \cdot \omega \cdot s_{\text{máx}}$

Pero: $\rho_{\text{aire}} = 1,29$ kg/m³ ; $v_{\text{sonido}} = 3,43$ m/s ; $s_{\text{máx}} = 2,0 \times 10^{-8}$ m

$\omega = 2\pi f = 2(3,1416)(2,0 \text{ kHz})$

Entonces: $\Delta P_{\text{máx}} = (1,29)(343)(2,0 \times 10^{-8})(2)(3,1416)(2)(10^3)$

$\therefore \quad \Delta P_{\text{máx}} = 0,11 \frac{N}{m^2} = 1,11 \times 10^{-1}$ Pa

11. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión igual a $4,0 \times 10^{-3}$ Pa. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10,0 kHz.

Resolución :

Por dato: $\Delta P_{\text{máx}} = 4,0 \times 10^{-3}$ Pa $\quad f = 10,0$ kHz $\quad s_{\text{máx}} = ?$

Sabemos que: $\Delta P_{\text{máx}} = \rho_{\text{aire}} \cdot v_{\text{sonido}} \cdot \omega \cdot s_{\text{máx}}$

$\Rightarrow \quad 4,0 \times 10^{-3} = (1,29)(2\pi)(10,0 \text{ kHz})(343)\,.\,s_{\text{máx}}$

$\Rightarrow \quad 4,0 \times 10^{-3} = (1,29)(2)(3,1416)(10^4)(343)\,.\,s_{\text{máx}}$

$\therefore \quad s_{\text{máx}} = 1,55 \times 10^{-10}$ m

12. Una onda sonora en un cilindro se describe por medio de las ecuaciones 17.4 a 17.6. Demuestre que $\Delta P = \pm\rho v\omega\sqrt{s_{\text{máx}}^2 - s^2}$.

Resolución :

Por la ecuación (17.4) $\quad \Delta P_{\text{máx}} = \rho.v.\omega.\,s_{\text{máx}}$

Por la ecuación (17.6) $\quad \Delta P^2_{\text{máx}} = (\rho.v.\omega.s_{\text{máx}})^2$

Sabemos que: $P_{máx} = \rho.v.\omega.s_{máx}$

$\wedge \quad \Rightarrow \quad P = \rho v \omega s$ (presión mínima)

$\Rightarrow \quad P^2_{máx} = (\rho\, v\, \omega\, s_{máx})^2 \qquad (-)$

y $\quad P^2 = (\rho\, v\, \omega\, s)^2$

$P^2_{máx} - P^2 = (\rho v \omega .)^2\,(s^2_{máx} - s^2)$

$\Rightarrow \quad (P_{máx} - P)(P_{máx} + P) = (\rho v \omega)^2\;.\;(s^2_{máx} - s^2)$; sea: $P_{máx} - P = \Delta P$

$\Rightarrow \quad (\Delta P)\,(\Delta P + 2P) = (\rho.v.\omega)^2\,.\,(s^2_{máx} - s^2)$

$\therefore \quad \Delta P = \sqrt{(\rho v \omega)^2}\,.\sqrt{s^2_{máx} - s^2} = \pm \rho \omega v \sqrt{s^2_{máx} - s^2}$ l.q.q.d.

13. Un investigador desea generar en el aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento igual a $5{,}5 \times 10^{-6}$ m. La amplitud de presión estará limitada a $8{,}4 \times 10^{-1}$ Pa. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que la onda sonora puede tener?

Resolución:

Por dato: $\rho_{aire} = 1{,}29\ kg/m^3$; $\Delta P_{máx} = 8{,}4 \times 10^{-1}$ Pa

$s_{máx} = 5{,}5 \times 10^{-6}$ m $\quad \lambda_{mínima} = ?$

Como nos piden $\lambda_{mínima}$, entonces $v_{sonido\ de\ las\ ondas\ en\ el\ aire} = 331$ m/s (0°C)

Luego: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire}\, v.\omega.s_{máx}$

$\Rightarrow \quad 8{,}4 \times 10^{-1} = (1{,}29)(331)\,(5{,}5 \times 10^{-6})(2\pi \times f)$

$\therefore \quad f = 56{,}93$ Hz

Como: $\lambda_{min} \times f = v_{min} = v_{ondas\ en\ aire}\ (0°)$

$\Rightarrow \quad \lambda_{min} = \dfrac{v_{min}}{f} = \dfrac{331}{56{,}33} \qquad \therefore \quad \lambda_{mínimo} = 5{,}81$ m

14. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión de 4,0 Pa y una frecuencia de 5,0 kHz. $\Delta P = 0$ en el punto $x = 0$ cuando $t = 0$. a) ¿Cuál es el valor de ΔP en $x = 0$ cuando $t = 2{,}0 \times 10^{-4}$ s, y b) ¿cuál es el valor de ΔP en $x = 0{,}020$ m cuando $t = 0$?

Resolución:

Datos: $\Delta P_{máx} = 4{,}0$ Pa ; $f = 5{,}0$ kHz

$\Delta P = 0$; para $x = 0;\ t = 0$

Parte (a)

Como $\quad \Delta P = 0$ cuando $x = 0;\ t = 0$

Entonces: $\quad \Delta P(x;t) = \Delta P_{máx}\,.\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$

Para $\quad x = 0;\ t = 2{,}0 \times 10^{-4}$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0{,}2 \times 10^{-4}) = (4{,}0)\ \mathrm{sen}\,[-10\pi k\,(2{,}0 \times 10^{-4})]$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0{,}2 \times 10^{-4}) = -(4{,}0)\ \mathrm{sen}(6{,}2832\ rad)$

$\therefore \quad \Delta P\ (0,\ 2 \times 10^{-4}\ s) = -5{,}9 \times 10^{-5}$ Pa

Parte (b)

Para $\quad x = 0{,}020 \;$ y $\; t = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta P(0{,}020;\ 0) = (4{,}0)\ \mathrm{sen}(0{,}020k)$

Pero: $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad$ y $\quad v = \lambda f$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{2\pi . f}{v} = \dfrac{2\,(3{,}1416)\,(5{,}0 \times 10^3)}{343} = 91{,}6$ rad/m

Entonces: $\Delta P\ (0{,}020;\ 0) = (4{,}0)\mathrm{sen}[1{,}83\ rad]$

$\therefore \quad \Delta P\ (0{,}020;\ 0) = 3{,}86$ Pa

15. Una onda sonora senoidal se describe por el desplazamiento

$$s(x;\ t) = (2{,}00\ \mu m)\ \cos[(15{,}7\ m^{-1})x - (858\ s^{-1})t]$$

a) Encuentre la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de esta onda y determine a través de qué material está viajando. (Véase la tabla 17.1.) b) Determine el desplazamiento instantáneo de las moléculas en la posición $x = 0{,}0500$ m en $t = 3{,}00$ ms. c) Determine la velocidad máxima del movimiento oscilatorio de las moléculas.

Resolución:

$s(x;\ t) = (2{,}00\ \mu m)\cos\,[15{,}7x - 858t]$

Parte (a)

Amplitud $= 2{,}00\ \mu m = 2{,}00 \times 10^{-6}$ m

Por otro lado: $\quad k = 15{,}7 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{2(3{,}1416)}{15{,}7} = 0{,}4$ m

Además: $\quad \omega = 858 = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{858}{2(3{,}1416)} = 136{,}55$ Hz

Luego: $\quad v_{onda} = \lambda f = (136{,}55)(0{,}4) = 54{,}6$ m/s

Según la tabla (17.1) la onda está viajando por «hule vulcanizado».

Parte (b)

Para $\quad x = 0{,}05$ m $\;$ y $\; t = 3{,}00 \times 10^{-3}$ s

Entonces: $\quad s\ (0{,}05;\ 3 \times 10^{-3}) = (2{,}00\ \mu m)\cos[0{,}785 - 2{,}574]$

$\therefore \quad s\ (0{,}05;3 \times 10^{-3}) = (2{,}00\ \mu m)\cos(1{,}789\ rad) = -0{,}439\ \mu m$

Parte (c)

Sabemos que: $s(x;t) = (2{,}00\ \mu m)\cos[15{,}7x - 858t]$

Entonces: $\dfrac{\partial s(x;t)}{\partial t} = v(x;t) = (858)(2{,}00\ \mu m)\ \text{sen}[15{,}7x - 858t]$

$\Rightarrow\quad v_{máx}(x,t) = (858)(2{,}00\ \mu m)(1)$

$\therefore\quad v_{máx} = 1716\ \mu m/s = 1{,}72\ mm/s$

16. La tensión en una barra de cobre es 99,5% de su punto de fractura elástica de $13 \times 10^{10}\ N/m^2$. Si una onda sonora de 500 Hz se transmite por la barra, a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que la barra se rompa, y b) cuál es la velocidad máxima de las partículas en ese momento?

Resolución:

Sabemos que el esfuerzo del punto de fractura de la barra de cobre es:

$$13 \times 10^{10}\ N/m^2\ ;\quad \rho_{cobre} = 8{,}92 \times 10^3\ kg/m^3$$

Entonces: La tensión será: (en ese punto) $\dfrac{99{,}5}{100} \times 13 \times 10^{10} = 12{,}94 \times 10^{10}\ N/m^2$

Parte (a)

$f = 500\ Hz \quad\Rightarrow\quad \omega = 1000\pi\ rad/s$

Cuando la barra se rompa ΔP = máxima = $12{,}94 \times 10^{10}\ N/m^2$

Entonces: $\Delta P_{máx} = \rho_{cobre} \cdot v_{onda\ (cobre)}\ \omega\ s_{máx}$

Donde $v_{onda\ cobre} = 3\ 560\ m/s$

$\Rightarrow\quad s_{máx} = 12{,}94 \times 10^{10}/1000(3{,}1416)(3\ 560)(8{,}92 \times 10^3)$

$\therefore\quad s_{máx} = 1{,}297\ m$

Parte (b)

$v_{máx} = s.\omega = (1{,}297)(2)(3{,}1416)(500) = 4{,}07 \times 10^3\ m/s$

17. Anote una expresión que describa la variación de presión como una función de la posición y el tiempo para una onda sonora senoidal en el aire si $\lambda = 0{,}10\ m$ y $\Delta P_{máx} = 0{,}20\ Pa$.

Resolución:

Datos: $\lambda = 0{,}10\ m\ ;\ \Delta P_{máx} = 0{,}20\ Pa\ ;\ v_{ondas\ en\ el\ aire} = 343\ m/s$

Sabemos que: $\Delta P(x;t) = \Delta P_{máx} \cdot \text{sen}[kx - \omega t]$

Pero: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \dfrac{(2)(3{,}1416)}{0{,}1} = 62{,}8\ rad/m$

Además: $\omega = 2\pi.f$

y $v_{aire} = \lambda.f \quad\Rightarrow\quad f = \dfrac{343}{0{,}1} = 3{,}43 \times 10^3\ Hz$

Entonces: $\omega = (2)(3{,}1416)(3{,}43 \times 10^3) = 2{,}16 \times 10^4$

En consecuencia: $\Delta P(x;t) = (0{,}200\ Pa)\ \text{sen}[62{,}8x - 2{,}16 \times 10^4 t]$

18. Anote la función que describe la onda de desplazamiento correspondiente a la onda de presión en el problema 17.

Resolución:

Sabemos que: $\Delta P_{máx} = \rho_{aire}\ v\ \omega\ .\ s_{máx}$

$$\Rightarrow\quad s_{máx} = \frac{0{,}200}{(1{,}29)(343)(2{,}16\times10^4)} = 2{,}092 \times 10^{-8}\ m$$

Por lo tanto: $s(x;t) = (2{,}1 \times 10^{-8}\ m)\cos[62{,}8x - 2{,}16 \times 10^4 t]$

INTENSIDAD DE ONDAS SONORAS PERIÓDICAS

19. Calcule el nivel sonoro en dB de una onda sonora que tiene una intensidad de $4{,}0\ \mu W/m^2$.

Resolución:

Sabemos que la constante de intensidad de referencia es: $I_o = 1{,}00 \times 10^{-12}\ W/m^2$

Entonces: (por fórmula)

$$\beta = 10 \log\left[\frac{I}{I_o}\right]$$

Para $I = 4{,}0\ \mu.W/m^2$

$$\Rightarrow\quad \beta = 10 \log\left[\frac{4{,}0\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \beta = 10 \log[4 \times 10^6] = 10\log(4) + 10\log(10^6)$$

$$\therefore\quad \beta = 66{,}00\ dB$$

20. Una aspiradora tiene un nivel sonoro medido de 70 dB. ¿Cuál es la intensidad de este sonido en W/m^2?

Resolución:

Por dato: $I_{(aspiradora)} = 70\ dB$

Entonces: $70\ dB = 10\log\left[\dfrac{I}{I_o}\right] = 10\log\left[\dfrac{I}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$

$\Rightarrow\quad 7 = \log(I) - \log(10^{-12})$

$\therefore\quad \log(I) = -5 \quad\Rightarrow\quad I = 1{,}00 \times 10^{-5}\ W/m^2$

21. Demuestre que la diferencia en niveles de decibeles, β_1 y β_2, de una fuente sonora se relaciona con la razón entre sus distancias, r_1 y r_2, desde los receptores por medio de

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Resolución:

Sea: β_2 a una distancia «r_2» β_1 a una distancia «r_1»

Entonces: $I_2 = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi \times r_2^2}$ y $I_1 = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi \times r_1^2}$

Luego: $\beta_2 = 10 \log\left[\dfrac{\text{Potencia} \times 10^{12}}{4\pi \times r_2^2}\right]$

$\beta_1 = 10 \log\left[\dfrac{\text{Potencia} \times 10^{12}}{4\pi \times r_1^2}\right]$ (–)

Resulta que: $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log\left[\dfrac{\text{Potencia} \times 10^{12}}{4\pi \times r_2^2}\right] - 10 \log\left[\dfrac{\text{Potencia} \times 10^{12}}{4\pi \times r_1^2}\right]$

$\Rightarrow \quad \beta_2 - \beta_1 = 10 \log\left(\dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 20 \log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ (propiedad de logaritmo)

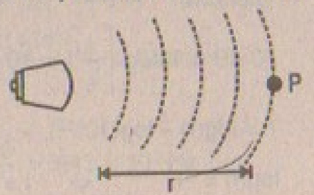
$\therefore \quad \beta_2 - \beta_1 = 20 \log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ l.q.q.d.

22. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de un altavoz que vibra a 1,00 kHz es 0,600 W/m². a) Determine la intensidad si la frecuencia aumenta a 2,50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0,500 kHz y la amplitud de desplazamiento se duplica.

22A. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de un altavoz que vibra a una frecuencia f es I. a) Determine la intensidad si la frecuencia aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante, b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a f/2 y la amplitud de desplazamiento se duplica.

Resolución:

Parte (a)



$I_f = ?$ cuando $f = 2{,}50$ kHz

$s_{máx} = \text{cte}$

Sabemos que:

$$I_i = \frac{1}{2}\rho_{aire}\, v\, A\, \omega^2\, s_{máx}^2 = 0{,}600 \text{ W/m}^2$$

Entonces: Si $f = 2{,}50$ kHz $\Rightarrow \omega_1 = 2\pi.(2{,}5) = 2{,}5\omega$ $\therefore \omega_1^2 = 6{,}25\,\omega^2$

y $s_{máx} = \text{cte}$

Por lo tanto: $I_f = 6{,}25\, I_i = 6{,}25\,(0{,}600) = 3{,}75$ W/m²

Parte (b)

$I_f = ?$, cuando: $f = 0{,}500$ kHz ; $s_{máx\ final} = 2\, s_{máx\ inicial}$

Entonces: $\omega_{final} = 0{,}5.\omega_{inicial} = 0{,}5\,(2\pi f) \Rightarrow \omega^2_{final} = 0{,}25\,\omega^2$

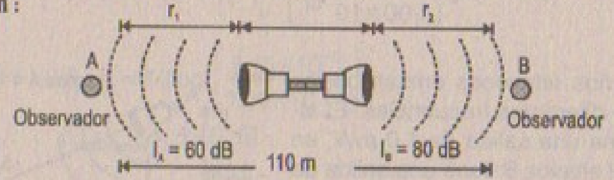
Además: $s_{máx\ final} = 2s_{máx\ inicial} \Rightarrow s_{máx\ final}{}^2 = 4\, s_{máx}^2$

En consecuencia: $I_{final} = (0{,}25)(4)\,.\,I_{inicial}$

$\therefore \quad I_{final} = 0{,}600$ W/m²

23. Un altavoz se coloca entre dos observadores separados por una distancia de 110 m, a lo largo de la línea que los une. Si un observador registra un nivel de intensidad de 60 dB y el otro registra un nivel de intensidad de 80 dB, ¿a qué distancia está el altavoz de cada observador?

Resolución:



Por dato: $r_1 + r_2 = 110$ m ... (α)

Además por demostración del problema n.° 21 se cumple que

$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) \Rightarrow I_B - I_A = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$

$\Rightarrow \quad 80 - 60 = 20\log\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) \Rightarrow 10r_2 = r_1$

Luego: De (α)

$10r_2 + r_2 = 110$ m $\therefore r_2 = 10$ m

$\Rightarrow r_1 = 100$ m

24. Se detona una carga explosiva a una altura de varios kilómetros en la atmósfera. A una distancia de 400 m de la explosión la presión acústica alcanza un máximo de 10 Pa. Si se supone que la atmósfera es homogénea sobre la distancia considerada, ¿cuál

será el nivel sonoro (en dB) a 4 km de la explosión? (Las ondas sonoras en el aire se absorben a una tasa de aproximadamente 7 dB/km.)

Resolución :

Datos: cuando $r = 400$ m ; $\Delta P_{máx} = 10$ Pa; $\rho_{aire} = 1{,}29$ kg/m^3

$$v_{sonido\ en\ aire} = 343 \text{ m/s}$$

$$\text{Tasa de las ondas sonoras} = \frac{7\text{ dB}}{\text{km}}$$

Sabemos que: $I = \dfrac{\Delta P^2_{máx}}{2\rho V} = \dfrac{(10)^2}{2\,(1{,}29)(343)}$ $\therefore$ $I = 1{,}13 \times 10^{-1}$ W/m^2

Entonces: $1{,}13 \times 10^{-1} = \dfrac{\text{Potencia prom.}}{4\pi\,(400)^2}$

$\therefore$ Potencia promedio = $2{,}27 \times 10^5$ W

Entonces el nivel de intensidad sonora a 4 km de la explosión en decibeles será:

$$I = \frac{2{,}27\times10^5}{4\pi\left(4\times10^3\right)^2} \Rightarrow I = 1{,}13 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{1{,}13\times10^{-3}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$ $\therefore$ $\beta = 90{,}5$ dB

25. Dos pequeños altavoces emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias. El altavoz A tiene una salida de 1,0 mW, en tanto que el altavoz B tiene una salida de 1,5 mW. Determine el nivel de intensidad sonora (en dB) en el punto C(Fig. P17.25) si a) sólo el altavoz A emite sonido, b) sólo el altavoz B emite sonido, y c) ambos altavoces emiten sonido.

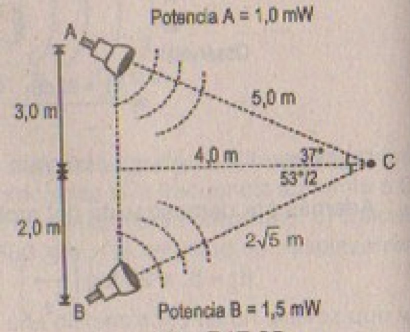


Fig. P17.25

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $I_A = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow \frac{1{,}0\times10^{-3}}{4(3{,}1416)(5)^2} = I_A \quad \therefore \quad I_A = 3{,}18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{3{,}18\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$ $\therefore$ $\beta = 65$ dB

Parte (b)

Sabemos que: $I_B = \dfrac{P_{prom}}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5\times10^{-3}}{4(3{,}1416)\left(2\sqrt{5}\right)^2} = I_B \quad \therefore \quad I_B = 5{,}97 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Luego: $\beta = 10\log\left[\dfrac{5{,}97\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$ $\therefore$ $\beta = 67{,}8$ dB

Parte (c)

Entonces: $I_{resultante} = I_A + I_B = 5{,}97 \times 10^{-6} + 3{,}18 \times 10^{-6}$

$\therefore$ $I_{resultante} = 9{,}15 \times 10^{-6}$ W/m^2

Luego:I resultante en decibeles será:

$\beta_{result.} = 10\log\left[\dfrac{I_{result}}{I_o}\right]$ Donde: $I_o = 1{,}00 \times 10^{-12}$ W/m^2

$$\Rightarrow \beta_{result.} = 10\log\left[\frac{9{,}15\times10^{-6}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$$

$\therefore$ $\beta_{resultante} = 69{,}6$ dB

26. Dos fuentes tienen niveles sonoros de 75 dB y 80 dB. Si suenan simultáneamente, a) ¿cuál es el nivel sonoro combinado? b) ¿Cuál es su intensidad combinada en W/m^2?

Resolución :

Sea: $I_A \equiv \beta_A = 75$ dB y $I_B \equiv \beta_B = 80$ dB

Entonces: $75\text{ dB} = 10\log\left(\dfrac{I_A}{I_o}\right) \Rightarrow I_A = 10^{7{,}5} \times I_o$

$$80\text{ dB} = 10\log\left(\frac{I_B}{I_o}\right) \Rightarrow I_B = 10^{8} \times I_o$$

Luego: $I_{result.} = I_A + I_B = 10^{15{,}5} \times I_o$

En consecuencia $I_{result.}$ en W/m^2 será:

$$I_{result} = 1{,}00 \times 10^{-12} \,.\, 10^{+15{,}5} \equiv 1 \times 10^{3{,}5} \equiv \sqrt{10} \times 10^3 = 3{,}16 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

ONDAS ESFÉRICAS Y PLANAS

27. Un experimento requiere una intensidad sonora de 1,2 W/m² a una distancia de 4 m del altavoz. ¿Qué salida de potencia se requiere?

Resolución :

Por dato: $I = 1{,}2\ W/m^2$; $r = 4\ m$

Entonces: Por fórmula: $I = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2} \Rightarrow 1{,}2 = \dfrac{P_{prom}}{4\,(3{,}1416)(4)^2}$

$\Rightarrow (1{,}2)(4)(3{,}1416)(4)^2 = P_{prom}$

$\therefore$ Potencia promedio = 241 watts

28. Una fuente de sonido (1 000 Hz) emite uniformemente en todas las direcciones. Un observador a 3,0 m de la fuente mide un nivel sonoro de 40 dB. Calcule la salida de potencia promedio de la fuente.

Resolución :

Por dato: $f = 1000\ Hz$; $r = 3\ m$ (de la fuente)

$I_1 = 40\ dB$; $P_{prom.} = ?$

Sabemos que: $I = \dfrac{P_{prom.}}{4\pi r^2} \Rightarrow I = \dfrac{P_{prom.}}{4\,(3{,}1416)(3)^2}$ ... (α)

Pero: $40\ dB = 10\log\left[\dfrac{I}{1{,}00\times10^{-12}}\right] \quad \therefore\ I = 1{,}00\times10^{-8}\ W/m^2$

En consecuencia en (α)

$1{,}00\times10^{-8} = \dfrac{P_{prom.}}{4\,(3{,}1416)(3)^2} \quad \therefore\ P_{prom.} = 1{,}13\times10^{-6}\ W$

29. El nivel sonoro a una distancia de 3,0 m de una fuente es de 120 dB. ¿A qué distancia el nivel sonoro será a) 100 dB, y b) 10 dB?

Resolución :

Por dato: $r = 3{,}0\ m$ (de la fuente)

$\beta = 120\ dB$

Parte (a)

$r_1 = ?$; $\beta_1 = 100\ dB$

Por demostración del problema n.° 21 sabemos que:

$$\beta - \beta_1 = 20\log\left(\frac{r_1}{r}\right) \Rightarrow 120 - 100 = 20\log\left(\frac{r_1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \log\left(\frac{r_1}{3}\right) \quad \therefore\ r_1 = 30\ m$$

Parte (b)

$r_2 = ?$ si $\beta_2 = 10\ dB$

Entonces: igual que la parte (a)

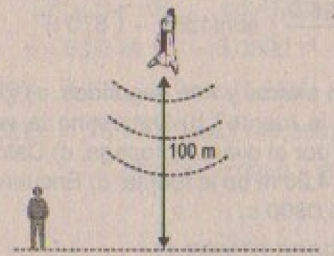
$$\beta - \beta_2 = 20\log\left(\frac{r_2}{3}\right) \Rightarrow 120 - 10 = 20\log(r_2/3)$$

$$\Rightarrow 5{,}5 = \log(r_2/3) \quad \therefore\ r_2 = 9{,}49\times10^5\ m$$

30. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador sobre el suelo directamente abajo de la explosión percibe una intensidad sonora promedio de $7{,}0\times10^{-2}\ W/m^2$ durante 0,20 s. a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? b) ¿Cuál es el nivel sonoro en decibeles que escucha el observador?

30A. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h sobre el suelo. Un observador sobre el suelo directamente abajo de la explosión percibe una intensidad sonora promedio I durante un tiempo t. a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? b) ¿Cuál es el nivel sonoro en decibeles que escucha el observador?

Resolución :



$I_{prom} = 7{,}0\times10^{-2}\ W/m^2$

$t = 0{,}20\ s$

N.R (suelo)

Parte (a)

Sabemos que: $I = \dfrac{P_{prom}}{4\pi(100)^2}$

$\Rightarrow 7{,}0\times10^{-2}\,(4)(3{,}1416)(10^4) = P_{prom} \quad \therefore\ P_{prom} = 8{,}8\times10^3\ W$

Por otro lado:

$$P_{prom} = \frac{E_{total}}{\Delta t} \Rightarrow (8{,}8\times10^3)(0{,}20) = E_{total}$$

$$\therefore\ E_{total} = 1{,}76\times10^3\ joules$$

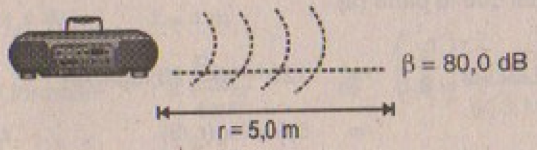
Parte (b)

Sabemos que: $\beta = 10.\log\left[\dfrac{I}{I_o}\right] \Rightarrow \beta = 10\log\left[\dfrac{7{,}0\times10^{-2}}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$

$\Rightarrow \beta = 10\log(7{,}0) + 10\log(10^{10}) \quad \therefore\ \beta = 108{,}45\ dB$

31. Un grupo de rock está tocando en un estudio. El sonido que sale por una puerta abierta se dispersa uniformemente en todas las direcciones. Si el nivel sonoro de la música es de 80,0 dB a una distancia de 5,0 m de la puerta, ¿a qué distancia la música es apenas audible para una persona con un umbral auditivo normal (0 dB)? Descarte la absorción.

Resolución :



Nos piden r_1 = ? cuando $\beta_1 = 0$ dB

Por demostración del problema n.° 21, se cumple que:

$$\beta - \beta_1 = 20\log\left(\frac{r_1}{r}\right) \Rightarrow 80 - 0 = 20\log\left(\frac{r_1}{5}\right)$$

$$\therefore\ r_1 = 5 \times 10^4 \text{ m} \equiv 50{,}0 \text{ km}$$

32. Una onda esférica es radiada desde una fuente puntual y se describe de la manera siguiente:

$$y(r;\,t) = \left(\frac{25{,}0}{r}\right)\operatorname{sen}(1{,}25r - 1\,870\,t)$$

donde y está en pascales, r en metros y t en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de presión máxima a 4,00 m de la fuente? b) Determine la velocidad de la onda y consecuentemente el material por el cual se propaga. c) Calcule la intensidad de la onda en dB a una distancia de 4,00 m de la fuente. d) Encuentre la presión instantánea a 5,00 m de la fuente en 0,0800 s.

Resolución :

$$y(r;\,t) = \left(\frac{25}{r}\right)\operatorname{sen}(1{,}25r - 1870t)$$

Parte (a)

$\Delta P_{máx}$ = ? cuando r = 4,00 m

Sabemos que: $\Delta P_{máx} = \rho.v.\omega.s_{máx}$

Pero: $1{,}25 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1{,}6\pi$ m y $s_{máx} = \dfrac{25}{4} = y_{(r=4)}$

Además: $1\,870 = 2\pi f \Rightarrow f = \dfrac{935}{\pi}$ Hz

Luego: $v = \lambda f = (1{,}6\,\pi)\left(\dfrac{935}{\pi}\right) = 1\,496$ m/s

Pero: 1 496 m/s pertenece a la velocidad de la onda en el agua.

En consecuencia:

$$\Delta P_{máx} = \rho_{agua} \cdot v_{onda} \cdot \omega \cdot s_{máx}$$

$$\therefore\ \Delta P_{máx} = (10^3)(1{,}496 \times 10^3)(1{,}87 \times 10^3)(25/4) = 1{,}75 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Parte (b)

De lo hallado en (a) tenemos que $v_{onda} = 1{,}496 \times 10^3$ m/s y la onda se propaga en «agua»

Parte (c)

Sabemos que: $I = \dfrac{\Delta P_{máx}^2}{2.\rho.v} \Rightarrow I = \dfrac{(1{,}75\times10^7)^2}{2\times10^3\times1{,}496\times10^3}$

$$\therefore\ I = 1{,}02 \times 10^8 \text{ W/m}^2$$

Entonces en decibeles será:

$$\beta = 10\log\left[\frac{1{,}02\times10^8}{1{,}00\times10^{-12}}\right] \Rightarrow \beta = 10\log(1{,}02) + 10\log(10^{20})$$

$$\therefore\ \beta = 200 \text{ dB}$$

Parte (d)

Sabemos que: $\Delta P(x;\,t) = \Delta P_{máx} \cdot \cos(1{,}25x - 1\,870\,t)$

Entonces para x = 5,00 m y t = 0,0800 s

$$\Delta P(5;\,0{,}08) = (1{,}75 \times 10^7)\cos[1{,}25(5) - 1\,870(0{,}0800)]$$

$$\Rightarrow\ \Delta P(5;\,0{,}08) = (1{,}75 \times 10^7)\cos[143{,}35 \text{ rad}]$$

$$\therefore\ \Delta P(5 \text{ m};\,0{,}08 \text{ s}) = 6{,}94 \times 10^6 \text{ Pa}$$

EL EFECTO DOPPLER

33. Una bala disparada por un rifle se desplaza a 1,38 Mach (es decir, $v_s/v = 1{,}38$). ¿Qué ángulo forma el frente de la onda de choque con la trayectoria de la bala?

Resolución :

Por dato: $\dfrac{v_s}{v} = 1{,}38$

Pero $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_s} \Rightarrow \dfrac{1}{1{,}38} = \dfrac{v}{v_s} = \operatorname{sen}\theta$

$\therefore\ \theta = \text{arc sen}(0{,}7246) \qquad \therefore\ \theta = 46{,}4°$

34. Un bloque con un altavoz atornillado a él se conecta a un resorte que tiene una constante k = 20,0 N/m como muestra la figura P17.34. La masa total del bloque y el altavoz es de 5,00 kg y la amplitud del movimiento de este conjunto es 0,500 m.

a) Si el altavoz emite ondas sonoras de 440 Hz de frecuencia, determine el intervalo de frecuencias que escucha una persona a la derecha del altavoz. b) Si el nivel de intensidad máximo escuchado por la persona es de 60 dB cuando está lo más cerca del altavoz, 1,00 m de distancia, ¿cuál es la intensidad mínima escuchada por el observador? Suponga que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

34 A. Un bloque con un altavoz atornillado a él se conecta a un resorte que tiene una constante k, como muestra la figura P17.34. La masa total del bloque y el altavoz es m y la amplitud del movimiento de este conjunto es A. a) Si el altavoz emite ondas sonoras de frecuencia f, determine el intervalo de frecuencias que escucha una persona a la derecha del altavoz. b) Si el nivel de intensidad máximo escuchado por la persona es β cuando está lo más cerca del altavoz, una distancia d, ¿cuál es la intensidad mínima escuchada por el observador?

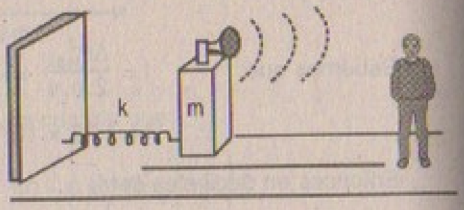


Figura P17.34

Resolución :

Amplitud = 0,500 m ; k = 20 N/m

$M_{total} = m = 5,00$ kg ; $v = v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

$$f = 440 \text{ Hz} ; \quad f_{obs} = ?$$

Por movimiento armónico simple:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{M}}\cdot A \quad \therefore \quad v_f = +1 \text{ m/s}$$

Cuando la fuente se acerca se cumple que

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{v_f}{v}}\right) = 440\left(\frac{1}{1-\frac{1}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad f_{obs} = 441,3 \text{ Hz}$$

Cuando la fuente se aleja se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{v_f}{v}}\right) = 440\left(\frac{1}{1+\frac{1}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad f_{obs} = 438,7 \text{ Hz}$$

En consecuencia:

El intervalo de frecuencias que escucha una persona será: $438,7 \leq f_{obs} \leq 441,3$ Hz

Parte (b)

Por dato $\quad I_{máx} = \beta_{máx} = 60$ dB $\quad r_{máx} = 1,00$ m

Entonces sin elongarse el resorte el observador se encuentra a 1,50 m del altavoz, luego $d_{mínima} = d_{de\ alejamiento} = 2,00$ m (cuando el altavoz esté lo más lejos del observador)

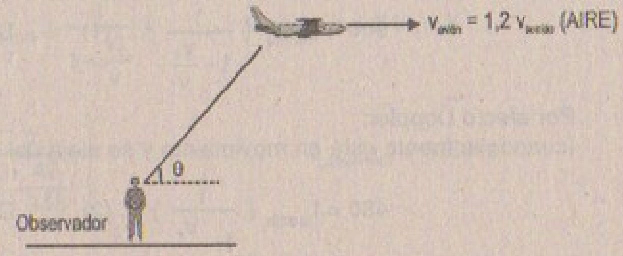
Por lo tanto: por demostración del problema n.° 21

$$\beta_{máx} - \beta_{mín} = 20 \log\left(\frac{2,00}{1,00}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 60 - \beta_{min} = 20 \log(2) \quad \therefore \quad \beta_{mínimo} = 53,9 \text{ dB} = 54 \text{ dB}$$

35. Un avión a reacción de combate viaja horizontalmente a 1,2 Match (es decir, 1,2 veces la velocidad del sonido en el aire). En el instante en el que una observadora sobre el suelo escucha la onda de choque, ¿cuál es el ángulo que su línea de visión forma con la horizontal cuando ella mira al avión?

Resolución :



Sabemos que:

$$\text{sen}\theta = \frac{v_{ondas}}{v_f}$$

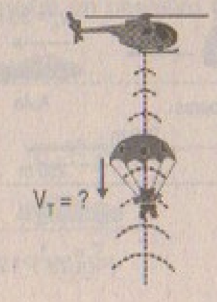
Donde: v = velocidad del sonido

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \frac{v_{ondas}\ (\text{Aire})}{1,2\, v_{ondas}\ (\text{Aire})} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\theta = 0,8333$$

En consecuencia: $\quad \theta = \text{sen}^{-1}(0,83333) \approx 56,4°$

36. Desde un helicóptero se lanza un soldado paracaidista que porta un transmisor de radio el cual emite una señal de 500 Hz. El radar en el avión rastrea la señal del transmisor conforme cae el paracaidista. Si la frecuencia percibida se vuelve constante a 450 Hz, ¿cual es la velocidad terminal del paracaidista? Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 343 m/s y suponga que el paracaidista siempre permanece debajo del helicóptero.

Resolución :



f_{radar} (avión) = 450 Hz

$v_{sonido} = 343$ m/s

$f_{fuente\ (radio)} = 500$ Hz

Por efecto Doppler: cuando la fuente (radio del obs.) están en movimiento y el obs. en este caso el helicóptero está en reposo, se cumple que:

$$f_{obs(helicop.)} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{V_T}{V}}\right) \quad \Rightarrow \quad 450 = 500\left(\frac{1}{1+\frac{V_T}{343}}\right)$$

$$\therefore \quad V_{terminal} = 38{,}1 \text{ m/s}$$

37. Al estar parado en el cruce de una calle usted escucha una frecuencia de 560 Hz proveniente de la sirena de un carro de policía que se acerca. Después de que este vehículo pasa, la frecuencia observada de la sirena es 480 Hz. Determine la velocidad del carro de acuerdo con estas observaciones.

Resolución :

Por efecto Doppler: cuando la fuente está en movimiento y se acerca al observador se cumple que:

$$560 = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{V_f}{V}}\right) \ldots (1) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

Por efecto Doppler:
(cuando la fuente está en movimiento y se aleja del observador se cumple que):

$$480 = f_{fuente}\left(\frac{1}{1+\frac{V_f}{V}}\right) \ldots (2) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$(1) \div (2): \qquad \frac{560}{480} = \frac{V+V_f}{V-V_f}$$

$$\Rightarrow \quad 1\,040 v_f = 80 v \qquad \therefore \quad v_f = 26{,}4 \text{ m/s}$$

38. Un carro de bomberos que se mueve hacia la derecha a 40 m/s suena su bocina (frecuencia de 500 Hz) a los dos vehículos que se muestran en la figura P17.38. El auto se mueve hacia la derecha a 30 m/s, en tanto que la camioneta está detenida. a) ¿Qué frecuencia perciben los pasajeros en el auto? b) ¿Cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en la camioneta? c) Cuando el carro de bomberos está a 200 m del automóvil y a 250 m de la camioneta, los pasajeros en el carro perciben un nivel de intensidad sonora de 90 dB. En ese momento, ¿cuál es el nivel de intensidad que perciben los pasajeros en la camioneta?

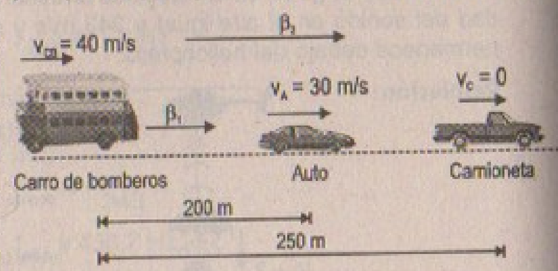


Figura P17.38

Resolución :

Parte (a)

Por efecto Doppler: cuando el observador y la fuente están en movimiento, entonces se cumple:

$$f_{obs} = f_{auto} = f_f\left(\frac{V-V_o}{V-V_f}\right) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = (500)\left[\frac{343-30}{343-40}\right]$$

$$\therefore \quad f_{auto} = 516{,}50 \text{ Hz}$$

Parte (b)

Por efecto Doppler: cuando el observador (camioneta) está en reposo y la fuente (carro de bomberos) está en movimiento, se cumple:

$$f_{obs} = f_{camioneta} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{V_f}{V}}\right) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{camioneta} = 500\left[\frac{1}{1-\frac{40}{343}}\right] \qquad \therefore \quad f_{camioneta} = 566 \text{ Hz}$$

Parte (c)

Por demostración del problema n.° 21 se cumple que:

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log\left[\frac{r_1}{r_2}\right] \Rightarrow \beta_2 - 90 = 20\log\left[\frac{200}{250}\right]$$

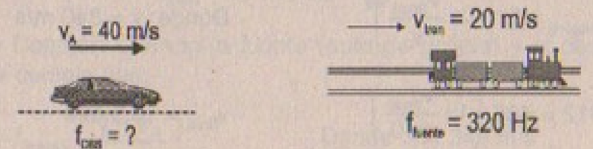
$$\therefore \quad \beta_2 = 88 \text{ dB}$$

(lo que perciben los pasajeros en la camioneta)

39. Un tren se mueve a 20 m/s paralelo a una autopista. Un auto viaja en la misma dirección que la del tren a 40 m/s. La bocina del auto suena a 510 Hz, y el silbato del tren, a 320 Hz. a) Cuando el carro está detrás del tren, ¿qué frecuencia del silbato del tren percibe un ocupante del auto? b) Cuando el carro está frente al tren, ¿qué frecuencia percibe un pasajero en el tren del claxon del carro cuando acaba de pasarlo?

Resolución :

Parte (a)

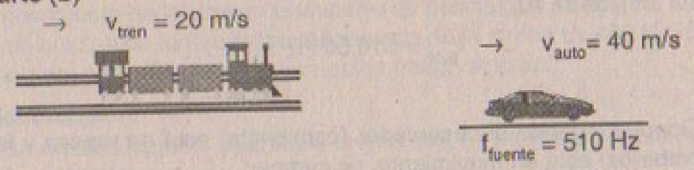


Por efecto Doppler: cuando la fuente (silbato del tren) y el observador (pasajero dentro del auto) están en movimiento, se cumple que:

$$f_{obs} = f_f\left[\frac{v + v_o}{v + v_f}\right] \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{obs} = 320\left[\frac{343+40}{343+20}\right] \qquad \therefore \quad f_{obs(\text{dentro del auto})} = 338 \text{ Hz}$$

Parte (b)



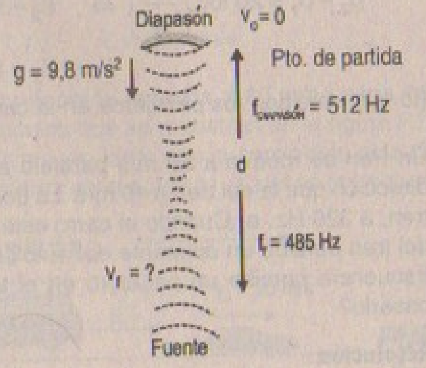
Por efecto Doppler: cuando la fuente (bocina del auto) y el observador (pasajero dentro del tren) están en movimiento, se cumple que:

$$f_{obs} = f_f\left[\frac{v + v_o}{v + v_f}\right] \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{obs} = 510\left[\frac{343+20}{343+40}\right] \qquad \therefore \quad \underset{(\text{dentro del tren})}{f_{obs}} = 483 \text{ Hz}$$

40. Un diapasón que vibra a 512 Hz cae desde el reposo y se acelera a 9,80 m/s^2. ¿A qué distancia abajo del punto donde se suelta el diapasón llegan ondas de 485 Hz de frecuencia al punto de partida? Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s.

Resolución :



Por efecto Doppler: cuando el observador (diapasón) se aproxima a la fuente (abajo del punto de equilibrio) abajo del punto de partida; entonces se cumple:

$$f_{obs\,(\text{diapasón})} = f_f\left(1 + \frac{v_{final}}{v}\right) \qquad \text{Donde: } v = 340 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad 512 = 485\left(1 + \frac{v_{final}}{340}\right) \qquad \therefore \quad v_{final} = 18{,}9 \text{ m/s}$$

Entonces: por cinemática

$$d = \frac{v_f^2 - v_o^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{(18{,}9)^2 - 0^2}{2(9{,}80)}$$

$$\therefore \quad d = 18{,}27 \text{ m}$$

41. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una velocidad mayor que la de la luz en ese medio se produce una onda de choque, u onda de arco, de luz. Este fenómeno se conoce como *efecto Cerenkov* y puede observarse en la vecindad del núcleo de la alberca de un reactor nuclear debido a que los electrones de alta velocidad se mueven por el agua. En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un ángulo del ápice de 53°. Calcule la velocidad de los electrones en el agua. (La velocidad de la luz en el agua es 2,25 × 10^8 m/s.)

Resolución :

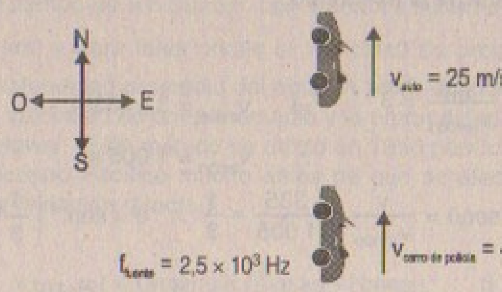
Sabemos que: $\quad \text{sen}53° = \dfrac{v_{ondas}}{v_{fuente}}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}7986 = \frac{v_{ondas}}{v_{fuente}} = \frac{2{,}25\times10^8}{v_{fuente}}$$

$$\therefore \quad v_{fuente} = 2{,}82 \times 10^8 \text{ m/s}$$

42. Un conductor que viaja rumbo al norte en una autopista conduce a una velocidad de 25 m/s. Un carro de policía que viaja en dirección sur a una velocidad de 40 m/s se aproxima sonando su sirena a una frecuencia base de 2 500 Hz. a) ¿Qué frecuencia percibe el automovilista conforme se acerca el carro de policía? b) ¿Qué frecuencia es detectada por el conductor del automóvil después de que el carro de policía lo pasa? c) Repita los juicios a) y b) para el caso en que el carro de policía está viajando rumbo al norte.

Resolución :



Parte (a)

Por efecto Doppler: Cuando la fuente (auto de policía) y el observador (auto) se mueven se cumple que:

$$f_{auto} = f_{fuente}\left(\frac{v - v_A}{v - v_f}\right) \qquad \text{Donde } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = 2\,500\left[\frac{343-25}{343-40}\right] \quad \therefore \quad f_{auto} = 2\,624 \text{ Hz}$$

Parte (b)

Por efecto Doppler: cuando la fuente (auto de policía) es perseguido por el observador (auto), se cumple que:

$$f_{auto} = f_{fuente}\left(\frac{v + v_A}{v + v_f}\right) \qquad \text{Donde: } v = 343 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad f_{auto} = 2\,500\left(\frac{343+25}{343+40}\right) \quad \therefore \quad f_{auto} = 2\,403 \text{ Hz}$$

43. Un avión supersónico que viaja a 3 Mach a una altura de 20 000 m está directamente por encima de la cabeza de un observador en el tiempo t = 0, como en la figura P17.43. a) ¿Qué distancia recorrerá antes de que uno se encuentre con la onda de choque? b) ¿Dónde estará el avión cuando dicha onda finalmente se escuche? (Suponga que la velocidad del sonido en el aire se mantiene uniforme en 335 m/s.)

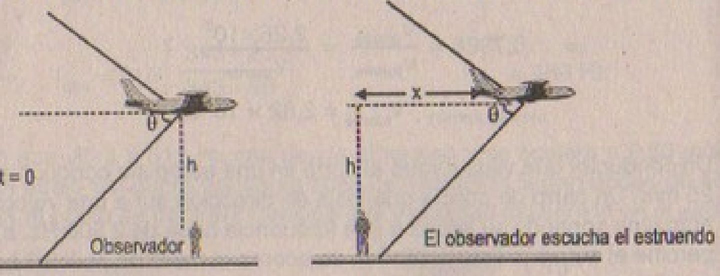


Figura P17.43

Resolución:

El observador escucha el estruendo:

Parte (a)

Sabemos que: $\frac{v_{avión}}{v_{sonido}} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_{avión} = 3 \times (335)$

$\therefore \quad v_{avión} = 1\,005$ s

Además: $\quad \text{sen}\theta = \frac{v}{v_{avión}} = \frac{335}{1\,005} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19{,}47°$

Por otro lado: $\quad \frac{h}{x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{2\times10^4}{\tan(19{,}47°)}$

$\therefore \quad x = 56\,568{,}556$ m

Luego: $\quad v_{avión} \times t = 56\,568{,}556 \quad \therefore \quad t = 56{,}3$ s

Parte (b)

En consecuencia el avión estará a:

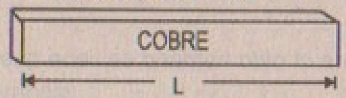
$$\vec{r}_{avión} = 56{,}6 \text{ km}\,\hat{i} + 20{,}0 \text{ km}\,\hat{j} \qquad \text{desde el observador}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

44. A una barra de cobre se le da un severo golpe de compresión en un extremo. El sonido del golpe, viajando por el aire a 0°C, llega al extremo opuesto de la barra 6,4 ms después de que el sonido se transmite a lo largo de la misma. ¿Cuál es la longitud de la barra? (Véase la tabla 17.1.)

Resolución:

$\longrightarrow v_{sonido}$ (0°C) = 381 m/s $\qquad t_{total \times aire} = t + 6{,}4 \times 10^{-3}$ s



$\vec{v}_{ondas}$ (COBRE) = 3 560 m/s $\qquad t_{total \times cobre} = t$

Por los datos sabemos que:

$$L = v_{sonido \text{ en aire } (0°C)} \times (t + 6{,}4 \times 10^{-3}) \qquad \ldots (1)$$

$$L = v_{sonido \text{ en cobre}} \times t \qquad \ldots (2)$$

Entonces: (1) = (2): $\quad 3\,560 \times t = 331 \times (t + 6{,}4 \times 10^{-3})$

$\therefore \quad t = 6{,}6 \times 10^{-4}$ s

Luego: longitud de la barra del cobre será = 2,35 m

45. Un terremoto en el lecho del océano del Golfo de Alaska produce un *tsunami* (denominado algunas veces una «marejada») que llega a Hilo, Hawai, a 4 450 km de distancia, en un tiempo de 9 h 30 min. Los *tsunamis* tienen enormes longitudes de onda (100-200 km) y para tales ondas la velocidad de propagación es $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad promedio del agua. A partir de la información proporcionada, calcule la velocidad de onda promedio y la profundidad del océano promedio entre Alaska y Hawai. (Este método se utilizó en 1856 para calcular la profundidad promedio del Océano Pacífico mucho antes de que se efectuaran sondeos para brindar una determinación directa.)

Resolución:

Sabemos que: $\quad v_{ondas} \times t$ = Distancia (Alaska - Hawai)

$$\Rightarrow \quad v_{ondas} = \frac{4\,450}{9{,}5} \quad \therefore \quad v_{ondas} = 130 \text{ m/s}$$

Por otro lado:

La velocidad de propagación de las ondas = $\sqrt{g\,d}$ (por dato)

Entonces: $(130)^2 = (9{,}80)\,.\,\bar{d}$

$\therefore\quad \bar{d} = 1{,}73$ km (profundidad promedio del océano Pacífico)

46. La salida de potencia de cierto altavoz estereofónico es 6,0 W. a) ¿A qué distancia del altavoz el sonido sería doloroso para el oído? b) ¿A qué distancia del altavoz el sonido apenas sería audible?

Resolución:

Datos: Potencia = 6,0 W $\qquad I_o = 1{,}00 \times 10^{-12}$ W/m²

Parte (a)

Sabemos que: $I = \dfrac{6{,}0}{4\pi r^2}$

Entonces:

Para que el sonido sea doloroso para el oído humano se tiene que cumplir que:

$$\beta = 120\ \text{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

$$\Rightarrow\quad 120 = 10\log\left[\frac{6\times10^{12}}{4(3{,}1416)r^2}\right] \quad\Rightarrow\quad 10^{12}\times(4)(3{,}1416)r^2 = 10^{12}\times 6$$

$$\Rightarrow\quad r^2 = \frac{6}{4(3{,}1416)} \qquad \therefore\quad r = 1{,}77\ \text{m}$$

En consecuencia:

A esta distancia dicho sonido sería doloroso para nuestro oído.

Parte (b)

Sería audible, cuando «β» sea mínimo, es decir:

$$0\ \text{dB} = 10\log\left[\frac{6\times10^{12}}{4(3{,}1416)r^2}\right]$$

$$\Rightarrow\quad 1\times(4)(3{,}1416)\times r^2 = 6\times10^{12} \quad\Rightarrow\quad r^2 = \frac{6\times10^{12}}{4(3{,}1416)}$$

$$\therefore\quad r = 4{,}77\times10^{11}\ \text{m}$$

En consecuencia:

A esta distancia el sonido apenas sería audible.

47. Un avión jet viaja hacia la altura a una velocidad constante de 196,3 m/s en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig. P17.47). Un observador en el suelo escucha el avión por primera vez cuando éste está directamente encima de él. Determine el valor de θ si la velocidad del sonido en el aire es de 340,0 m/s. (Sugerencia: Muestre primero que el primer sonido escuchado por el observador proviene del avión cuando la línea que lo conecta con este último es perpendicular a la trayectoria del jet.)

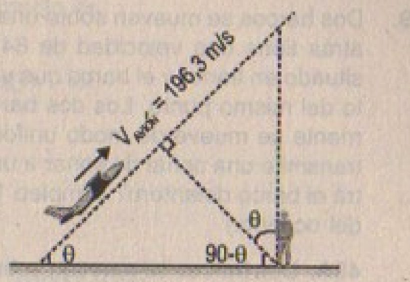
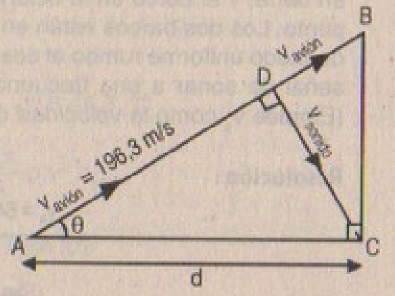


Figura P17.47

Resolución:

$v_{sonido} = 340{,}0$ m/s



Por sugerencia:

$$DC = d\,\text{sen}\theta$$

$$AD = d\cos\theta = v_{avión}\times t_{AD} \quad \ldots (1)$$

Además: $v_{sonido}\times t_{AD} = \lambda_{onda} = \overline{DC}$

$$\Rightarrow\quad d\,\text{sen}\theta = v_{sonido}\cdot t_{AD} \quad \ldots (2)$$

Dividiendo (2) por (1) resulta que:

$$\frac{d\,\text{sen}\theta}{d\cos\theta} = \frac{v_{sonido}\cdot t_{AD}}{v_{avión}\cdot t_{AD}}$$

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{v_{sonido}}{v_{avión}}$$

Luego: $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{sonido}}{v_{avión}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{340}{196{,}3}\right) = 60^\circ$$

48. Un horno de microondas genera un nivel sonoro de 40,0 dB cuando consume 1,00 kW de potencia. Estime la fracción de esta potencia que se convierte en la energía de las ondas sonoras.

Resolución:

Por dato: $\beta = 40$ dB $\quad$; $\quad$ Potencia = $1{,}00\times10^3$ W

Sabemos que: $40 = 10\log\left(\dfrac{I}{I_o}\right)$ $\qquad$ Donde: $I_o = 1{,}00\times10^{-12}$ W/m²

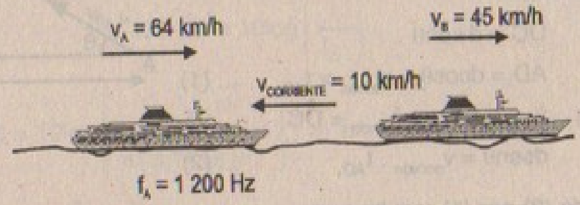
$$\Rightarrow\quad 4 = \log\left(\frac{I}{1{,}00\times10^{-12}}\right) \quad\Rightarrow\quad 10^4 = 10^{12}\times I$$

$$\therefore\quad I = 1{,}00\times10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

49. Dos barcos se mueven sobre una línea en dirección este. La embarcación que viaja atrás tiene una velocidad de 64 km/h, en relación con un punto de observación situado en tierra, y el barco que va adelante tiene una velocidad de 45 km/h respecto del mismo punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve de modo uniforme rumbo al oeste a 10 km/h. El barco de atrás transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200 Hz. ¿Qué frecuencia registra el barco delantero? (Emplee 1 520 m/s como la velocidad del sonido en el agua del océano.)

49A. Dos barcos se mueven sobre una línea en dirección este. La embarcación que va atrás tiene una velocidad de v_1 en relación con un punto de observación situado en tierra, y el barco en la delantera tiene una velocidad $v_2 < v_1$ respecto del mismo punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve de modo uniforme rumbo al oeste a una velocidad v. El barco de atrás transmite una señal de sonar a una frecuencia f. ¿Qué frecuencia registra el barco delantero? (Emplee v_s como la velocidad del sonido en el agua del océano.)

Resolución :



Datos: $v_{\text{sonido en el agua}} = 1\,520$ m/s

Por velocidad relativa: $v_{C/o} + v_{A/c} = v_{A/o}$

$\Rightarrow \quad v_{A/c} = v_{A/o} - v_{c/o} = 64 - 10 = 54$ km/h

Además: $v_{c/o} + v_{B/c} = v_{B/o}$

$\Rightarrow \quad v_{B/c} = v_{B/o} - v_{c/o} = 45 - 10 = 35$ km/h

Luego:

Por efecto Doppler: cuando la fuente (barco A) persigue al observador u oyente (barco B) y están en movimiento, se cumple que:

$$f_B = f_A\left[\frac{v - v_B}{v - v_A}\right] \qquad \text{Donde: } v_{\text{sonido en agua}} = 1\,520 \text{ m/s}$$

$$\text{Entonces} \quad f_B = 1\,200\left[\frac{1500-35}{1520-54}\right] \qquad \therefore \quad f_B = 1\,204 \text{ Hz}$$

50. Considere una onda longitudinal (compresional) de longitud de onda λ viajando con velocidad v a lo largo de la dirección x por un medio de densidad ρ. El desplazamiento de las moléculas del medio a partir de su posición de equilibrio es

$$s = s_{\text{máx}}\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Demuestre que la variación de presión en el medio es

$$P = \left(\frac{2\pi\rho v^2}{\lambda}\, s_{\text{máx}}\right)\cos(kx - \omega t)$$

Resolución :

Datos: λ, v, ρ

$s(x; t) = s_{\text{máx}}\,.\,\text{sen}(kx - \omega t)$

Por demostrar que: $P(x; t) = \left(\dfrac{2\pi\rho v^2}{\lambda}\, s_{\text{máx}}\right)\cos(kx - \omega t)$

Sabemos que $\Delta P_{\text{máx}} = \rho\omega v\, s_{\text{máx}}$

Pero: $\omega = 2\pi f$

Además $\lambda\,.\,f = v \;\Rightarrow\; f = \dfrac{v}{\lambda} \qquad \therefore\; \omega = 2\pi \times \dfrac{v}{\lambda}$

Por lo tanto: $\Delta P_{\text{máx}} = \rho\left(2\pi \times \dfrac{v}{\lambda}\right) v\, s_{\text{máx}} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\rho\, v^2\, s_{\text{máx}}$

Por otro lado: Como P(x; t) y s(x; t) están en fase π/2

Entonces: $P(x; t) = \Delta P_{\text{máx}}\,.\,\text{sen}(kx - \omega t + \pi/2)$

$\Rightarrow \quad P(x; t) = \Delta P_{\text{máx}}\,.\,\cos(kx - \omega t)$

$\therefore \quad P(x; t) = \left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\rho\, v^2 s_{\text{máx}}\right)\cos[kx - \omega t]$ l.q.q.d.

51. Un meteorito del tamaño de un camión entra a la atmósfera de la Tierra a una velocidad de 20 km/s y no disminuye mucho su velocidad antes de entrar al océano. a) ¿Cuál es el ángulo de Mach de la onda de choque desde el meteorito en la atmósfera? (Utilice 331 m/s como la velocidad del sonido.) b) Suponiendo que el meteorito supera el impacto con la superficie del océano, ¿cuál es el ángulo de Mach (inicial) de la onda de choque que el meteorito produce en el agua? (Emplee la velocidad de onda para el agua de mar dada en la tabla 17.1.)

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\text{sen}\theta = \dfrac{v}{v_M}$ Donde v = Veloc. sonido = 331 m/s

v_M = Veloc.meteorito

$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta = \dfrac{331}{2\times10^4} = 0{,}01655 \;\Rightarrow\; \theta = \text{sen}^{-1}(0{,}01655) = 0{,}948^\circ$

Parte (b)

En el agua $v_{\text{sonido}} = 1\,533$ m/s

Entonces: $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{v_s}{v_M} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1\,533}{2\times10^4} = 0{,}07665$

$\therefore \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}07665) = 4{,}40°$

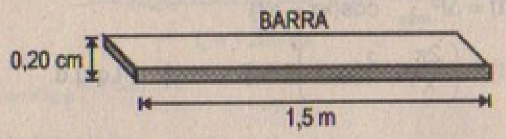
52. En la tarde el nivel sonoro de una vía de alta velocidad con tráfico es de 80 dB con 100 autos que pasan por un punto determinado cada minuto. Más tarde, en la noche, el flujo del tráfico sólo es de cinco autos por minuto. ¿Cuál es el nivel sonoro en la noche?

Resolución :

Si en una vía en la tarde pasan 100 autos por minuto produciendo un nivel sonoro de 80 dB; entonces en la noche en la misma vía, cuando pasen solamente 5 autos x minuto producirán un nivel sonoro de 4 dB.

53. Si se excita apropiadamente es posible producir ondas longitudinales así como transversales en una larga barra metálica. Una barra de cierto metal tiene 150 cm de largo, 0,20 cm de radio y masa igual a 50,9 g. El módulo de Young para el material es de 6,8 × 10^10 N/m². ¿Cuál debe ser la tensión (o comprensión) en la barra si la proporción entre la velocidad de las ondas longitudinales y la de las transversales es 8?

Resolución :



Masa = 50,9 g

$Y = 6{,}8 \times 10^{10}$ N/m²

Además: $\quad \dfrac{v_{\text{long (ondas)}}}{v_{\text{trans (ondas)}}} = 8$

Sabemos que $\quad v_{\text{ondas long.(en una barra)}} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

$$\Rightarrow \quad v_{\text{ondas long}} = \sqrt{\dfrac{6{,}8\times10^{10}}{\dfrac{50{,}9\times10^{-3}}{\pi\left(0{,}2\times10^{-2}\right)^2 \cdot (1{,}5)}}} = \sqrt{\dfrac{\left(6{,}8\times10^{10}\right)(\pi)\left(2\times10^{-3}\right)^2(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}}}$$

$\therefore \quad v_{\text{ondas long.}} = 5{,}02 \times 10^3$ m/s

Por otro lado: $\quad v_{\text{ondas trans.}} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{T\times1{,}5}{50{,}9\times10^{-3}}}$

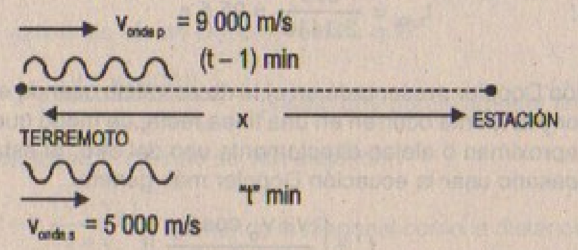
Como: $\quad \dfrac{v_{\text{ondas long.}}}{v_{\text{ondas trans}}} = 8$

$$\dfrac{\left(6{,}8\times10^{10}\right)(3{,}1416)(4)\left(10^{-6}\right)(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}} = \dfrac{64\times T\times(1{,}5)}{50{,}9\times10^{-3}}$$

$\therefore \quad T = 1{,}34 \times 10^4$ N

54. Un terremoto emite tanto ondas P como S que viajan a diferentes velocidades a través de la Tierra. Una onda P viaja a una velocidad de 9 000 m/s y una onda S lo hace a 5 000 m/s. Si las ondas P se reciben en una estación sísmica un minuto después de que llega una onda S, ¿a qué distancia está el epicentro del terremoto?

Resolución :



Por cinemática: $\quad v_p \times (t - 1) = x$

$v_s \times t = x \quad \Rightarrow \quad v_p \times t + v_p = v_s \times t$

$\Rightarrow \quad (9\,000)(10t) - 9\,000\,(60) = 5\,000t$

$4\,000t = 9\,000 \times 60$

$\therefore \quad t = 135$ s

Luego $\quad x = v_p \times (t - 60) = 9\,000\,(75) = 675$ km

En consecuencia: El epicentro estará a 675 km del terremoto.

55. Una sirena crea un nivel sonoro de 60,00 dB a 500,0 m de la bocina. La sirena se alimenta con una batería que entrega una energía total de 1,00 kJ. Suponiendo que la eficiencia de la sirena es 30% (esto es, 30% de la energía suministrada se transforma en energía sonora), determine el tiempo total que la sirena puede sonar.

55 A. Una sirena crea un nivel sonoro β a una distancia d de la bocina. La sirena se alimenta con una batería que entrega una energía total E. Suponiendo que la eficiencia de la sirena es 30% (esto es, 30% de la energía suministrada se transforma en energía sonora), determine el tiempo total que la sirena puede sonar.

Resolución :

Sabemos que: $60 = 10\log\left[\dfrac{I}{1{,}00\times10^{-12}}\right]$

$\Rightarrow \quad 10^6 = I \times 10^{12} \quad \therefore \quad I = 1{,}00 \times 10^{-6}\ W/m^2$

Luego: $1{,}00 \times 10^{-6} = \dfrac{\text{Potencia}}{4\pi(r^2)} = \dfrac{\text{Potencia}}{4(3{,}1416)(500)^2}$

$\therefore$ Potencia = 3,1416 Watts

Como: $3{,}1416\ W = \dfrac{30}{100} \cdot \dfrac{\text{Energía total}}{t}$

Energía total = 1×10^3 J

Entonces: $t_{total} = \dfrac{300}{3{,}1416} = 95{,}5$ s

56. La ecuación Doppler presentada en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente ocurren en una línea recta, de modo que la fuente y el observador se aproximan o alejan directamente uno del otro. Si esta restricción se elimina, es necesario usar la ecuación Doppler más general.

$$f' = \left(\frac{v + v_0\cos\theta_0}{v - v_s\cos\theta_s}\right) f$$

donde θ_0 y θ_s se definen en la figura P17.56a. a) Si tanto el observador como la fuente se alejan una del otro, demuestre que la ecuación anterior se reduce a la ecuación 17.17 con los signos inferiores. b) Emplee la ecuación anterior para resolver el siguiente problema. Un tren se mueve a una velocidad constante de 25,0 m/s hacia el cruce mostrado en la figura P17.56b. Un carro está detenido cerca del cruce, a 30,0 m de los rieles. Si la bocina del tren emite una frecuencia de 500 Hz, ¿cuál es la frecuencia escuchada por los pasajeros en el auto cuando el tren está a 40,0 m del cruce? Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

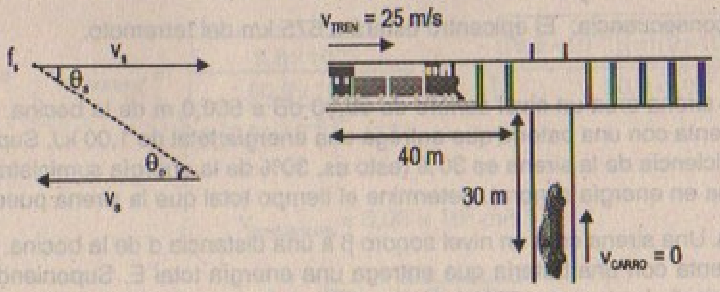


Figura P17.56

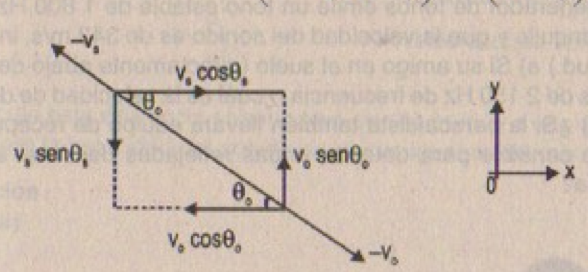
Resolución :

Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

Por demostrar que: $f' = f\left(\dfrac{v + v_o\cos\theta_o}{v - v_s\cos\theta_s}\right) = f\left(\dfrac{v - v_o}{v + v_s}\right)$

Sea:



En el eje «x» aplicando efecto Doppler resulta que:

$f' = f\dfrac{(v + v_o\cos\theta_o)}{v - v_s\cos\theta_s}$ puesto que paralelamente se van acercando

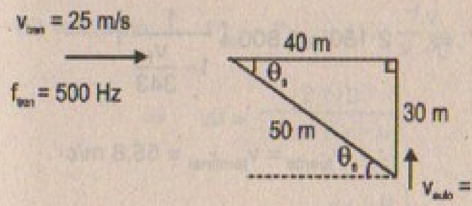
Pero como nos piden f ' cuando se van alejando

$\Rightarrow \quad f' = f\dfrac{(v - v_o)}{v + v_s}$ (tomando la diagonal como la distancia de alejamiento)

En consecuencia:

$f' = f\left(\dfrac{v - v_o}{v + v_s}\right)$ cuando se alejan l.q.q.d.

Parte (b)



Considerar: v = 343 m/s

Entonces: Por fórmula: $f' = f_{pasajeros(auto)} = f_{tren}\left(\dfrac{v + v_o\cos\theta_o}{v - v_s\cos\theta_s}\right)$

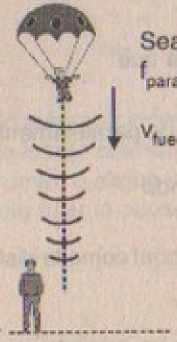
$$\Rightarrow \quad f' = 500\left[\frac{343 + 0}{343 - 25\left(\frac{40}{50}\right)}\right]$$

$\therefore$ $f' =$ frecuencia escuchada por los pasajeros en el auto = 531 Hz

57. Con el propósito de poder determinar su velocidad, una paracaidista lleva un generador de tonos. Un amigo en el suelo en el sitio de aterrizaje cuenta con equipo para recibir y analizar ondas sonoras. Mientras la paracaidista está cayendo a la velocidad terminal, su generador de tonos emite un tono estable de 1 800 Hz. (Suponga que el aire está tranquilo y que la velocidad del sonido es de 343 m/s, independientemente de la altitud.) a) Si su amigo en el suelo (directamente abajo de la paracaidista) recibe ondas de 2 150 Hz de frecuencia, ¿cuál es la velocidad de descenso de la paracaidista? b) ¿Si la paracaidista también llevara equipo de recepción sonora lo suficientemente sensible para detectar ondas reflejadas desde el suelo, ¿qué frecuencia recibiría?

Resolución :

Parte (a)



Sea:

$f_{paracaidista} = f_{fuente} = 1\,800$ Hz

$v_{fuente} = v_{terminal} = ?$

Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

$f_{obs} = 2\,150$ Hz

Por efecto Doppler: Cuando el paracaidista (fuente) está en movimiento y observador en reposo se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{1}{1-\frac{v_f}{v}}\right) \;\Rightarrow\; 2\,150 = 1\,800\left[\frac{1}{1-\frac{v_f}{343}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1\,800}{2\,150} = 1 - v_f/343 \qquad \therefore\; v_{fuente} = v_{terminal} = 55{,}8 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Cuando la fuente está en reposo y observador en movimiento (paracaídas) se cumple que:

$$f_{obs} = f_{fuente}\left(1+\frac{v_f}{v}\right) \;\Rightarrow\; f_{obs} = 2\,150\left(1+\frac{55{,}8}{343}\right)$$

$$\therefore\; f_{observador} = 2\,500 \text{ Hz}$$

58. El silbato de un tren (f = 400 Hz) suena más alto o más bajo de tono dependiendo de si se aproxima o se aleja. a) Demuestre que la diferencia de frecuencia entre el silbato del tren conforme se acerca y se aleja es

$$\Delta f = \frac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}} \qquad \begin{array}{l} u = \text{velocidad del tren} \\ v = \text{velocidad del sonido} \end{array}$$

b) Calcule esta diferencia para un tren que se mueve a una velocidad de 130 km/h. Considere la velocidad del sonido en el aire igual a 340 m/s.

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\Delta f = \dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}}$ Donde: u = velocidad del tren, v = velocidad del sonido

Hallando la f'_{obs} cuando el silbato de un tren se acerca

Entonces: $f'_{obs} = f\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{v}}\right)$ ... (1)

Hallando la f''_{obs} cuando el silbato de un tren se aleja

Entonces: $f''_{obs} = f\left(\dfrac{1}{1+\frac{u}{v}}\right)$ ... (2)

(1) – (2) restando: $f'_{obs} - f''_{obs} = \Delta f = \dfrac{f\,v}{v-u} - \dfrac{f\,v}{v+u}$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{2\,fvu}{(v-u)(v+u)}$$

Resulta que: $\Delta f = 2\dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{\left(1-\frac{u}{v}\right)\left(1+\frac{u}{v}\right)} = \dfrac{2f\left(\frac{u}{v}\right)}{1-\frac{u^2}{v^2}}$ l.q.q.d.

Parte (b)

Cuando $v_{tren} = u = 180$ km/h $\equiv 36{,}1$ m/s

$v = 340$ m/s ; $f = 400$ Hz

$$\text{Entonces:} \qquad \Delta f = \frac{2(400)\left[\frac{36,1}{340}\right]}{1-\left(\frac{36,1}{340}\right)^2} \qquad \therefore \quad \Delta f = 85,9 \text{ Hz}$$

59. Tres barras metálicas se localizan una respecto de las otras como se indica en la figura P17.59, donde $L_1 + L_2 = L_3$. Los valores de la densidad y del módulo de Young para los tres materiales son $\rho_1 = 2,7 \times 10^3$ kg/m³, $Y_1 = 7,0 \times 10^{10}$ N/m²; $\rho_2 = 11,3 \times 10^3$ kg/m³, $Y_2 = 1,6 \times 10^{10}$ N/m²; y $\rho_3 = 8,8 \times 10^3$ kg/m³, $Y_3 = 11 \times 10^{10}$ N/m². a) Si $L_3 = 1,5$ m, ¿cuál debe ser la proporción L_1/L_2 si una onda sonora recorrerá la longitud de las barras 1 y 2 en el mismo tiempo en que la onda recorre la longitud de la barra 3? b) Si la frecuencia de la fuente es 4,00 kHz, determine la diferencia de fase entre la onda que viaja a lo largo de las barras 1 y 2 y de la que lo hace a lo largo de la barra 3.

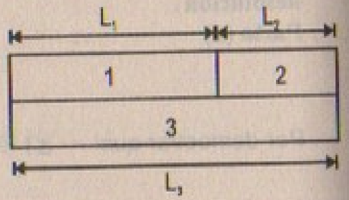


Figura P17.59

Resolución:

Datos: $\rho_1 = 2,7 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_1 = 7,0 \times 10^{10}$ N/m²

$\rho_2 = 11,3 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_2 = 1,6 \times 10^{10}$ N/m²

$\rho_3 = 8,8 \times 10^3$ kg/m³ ; $y_3 = 11 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a)

Si: $L_3 = 1,5$ m $\qquad L_1/L_2 = ?\qquad$ en un tiempo igual a 3

$$v_3 = \sqrt{\frac{Y_3}{\rho_3}} = \sqrt{\frac{11\times10^{10}}{8,8\times10^3}} \qquad \therefore \quad v_3 = 3,536 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Entonces: $1,5 = 3,536 \times 10^3 \cdot t_{total} \qquad \therefore \quad t_{total} = 0,424 \times 10^{-3}$ s

Por otro lado: $v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 = 1,5$

Además: $t_1 + t_2 = t_{total} = 0,424 \times 10^{-3}$ s

Luego: $\sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}} \times t_1 + \sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}} \times t_2 = 1,5$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{7,0\times10^{10}}{2,7\times10^3}} \times t_1 + \sqrt{\frac{1,6\times10^{10}}{11,3\times10^3}} \times t_2 = 1,5$$

$$\Rightarrow \quad 5,092 \times 10^3 \times t_1 + 1,189 \times 10^3\, t_2 = 1,5 \quad ...(\alpha)$$

Pero: $\quad t_1 + t_2 = 0,424 \times 10^{-3} \quad ...(\beta)$

Entonces: desarrollando α y β resulta que:

$t_1 = 0,256 \times 10^{-3}$ s $\quad \Rightarrow \quad (5,092 \times 10^3)(0,256 \times 10^{-3}) = L_1$

$t_2 = 0,1678 \times 10^{-3}$ s $\quad \Rightarrow \quad (1,189 \times 10^3)(0,1678 \times 10^{-3}) = L_2$

En consecuencia: $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1,303}{0,199} = 6,45$

Parte (b)

Como la onda que viaja a lo largo de las barras 1 y 2 emplea el mismo tiempo, que la onda que viaja por la barra 3,entonces: La llegada de un pulso de onda que vaya por la barra 1 y 2 va a coincidir con la llegada de un pulso de onda que viaje por la barra 3 y en consecuencia la diferencia de fases de dichas ondas será 0°.

60. Un murciélago, que se mueve a 5,00 m/s, está cazando un insecto volador. Si el murciélago emite un chirrido de 40,0 kHz y recibe de regreso un eco a 40,4 kHz, ¿a qué velocidad se acerca o se aleja el insecto del murciélago? (Tome la velocidad del sonido en el aire igual a v = 340 m/s.)

Resolución:

Datos: $v_{murciélago} = 5,00$ m/s ; $\quad v_{insecto} = ?$

$f_{murciélago} = 40,0 \times 10^3$ Hz ; $\quad f_{obs.} = 40,4 \times 10^3$ Hz

Por efecto Doppler: cuando la fuente (murciélago) persigue al observador (insecto), ambos en movimiento; entonces se cumple:

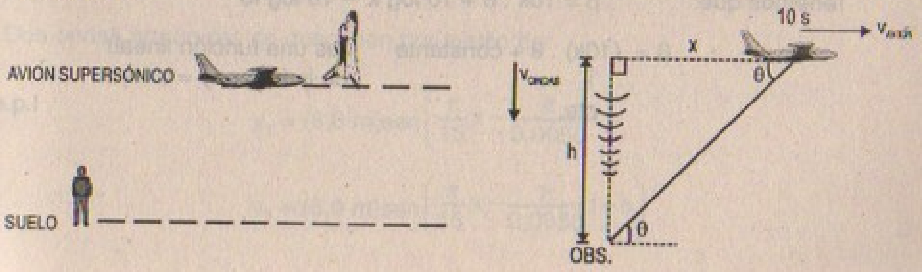
$$f_{obs} = f_{fuente}\left(\frac{v + v_I}{v - v_f}\right) \qquad \text{donde: } v = 340 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad 40,4 \times 10^3 = 40 \times 10^3 \left(\frac{340 + v_I}{340 - 5}\right) \qquad \therefore \quad v_{insecto} = -1,65 \text{ m/s}$$

Esto quiere decir que el insecto se acerca a 1,65 m/s.

61. Un avión supersónico vuela paralelo al suelo. Cuando el avión está directamente arriba, un observador ve que se lanza un cohete desde la aeronave. Diez segundos después el observador escucha la explosión sónica, seguida 2,8 s después por el sonido del motor del cohete. ¿Cuál es el número de Mach del avión?

Resolución:



Del gráfico: $\tan\theta = \dfrac{h}{x} = \dfrac{v_{\text{sonido explosión}}\times(10) + v_{\text{sonido motor}}\times(2,8)}{v_{\text{avión}}\times(10)}$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v_{\text{sonido}}(12,8)}{v_{\text{avión}}(10)}$$

Como: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_{\text{avión}}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{12,8}{10}\right) \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{10}{12,8} \quad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{12,8}\right) = 38,6°$$

En consecuencia:

El n.° de Match del avión será $= \dfrac{v_{\text{avión}}}{v} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{0,6242} = 1,60$

62. El botón del volumen de un radio tiene lo que se conoce como una «graduación logarítmica». El dispositivo eléctrico conectado al botón (llamado potenciómetro) tiene una resistencia R cuyo logaritmo es proporcional a la posición angular del botón: esto es, $\log R \propto \theta$. Si la intensidad del sonido I (en W/m²) producida por el altavoz es proporcional a la resistencia R, demuestre que el nivel de sonido β (en dB) es una función lineal de θ.

Resolución:

Sabemos que: (por dato) $\log(R) = k.\theta$

Además: $I = R.k'$

Entonces: $\log I = \log R + \log k'$

$\Rightarrow \quad 10 \log I = 10k\theta + 10.\log k' \quad \ldots (1)$

Pero: $\beta = 10.\log\left(\dfrac{I}{I_o}\right)$

$\Rightarrow \quad \beta = 10 \log I - \underbrace{10 \log I_o}_{\text{constante}} \quad \ldots (2)$

Entonces (1) en (2)

Tenemos que: $\beta = 10k \,.\, \theta + 10 \log k' - 10 \log Io$

$\therefore \quad \beta = \underset{\text{cte.}}{\underset{\uparrow}{(10k)}} \,.\, \theta + \text{constante}$ (es una función lineal) de la forma: $y = ax + b$

l.q.q.d.

Capítulo 18

SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS

SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIA DE ONDAS SENOIDALES

1. Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$y_1 = (5,0 \text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t)]$$
$$y_2 = (5,0 \text{ m})\operatorname{sen}[\pi(4,0x - 1\,200t - 0,25)]$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y *t* en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante? b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

Resolución:

$$y_1(x;\,t) = (5,0 \text{ m})\operatorname{sen}[\pi\,(4,0x - 1\,200t)]$$
$$y_2(x;\,t) = (5,0 \text{ m})\operatorname{sen}[\pi\,(4,0x - 1\,200t - 0,25)]$$

Parte (a)

$y_{\text{resultante}} = y_1 + y_2$

Entonces: recordando: $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\dfrac{(\alpha+\beta)}{2}.\cos\dfrac{(\alpha-\beta)}{2}$

Entonces: $y_1 + y_2 = (5,0 \text{ m})\left[2\cos\left[\dfrac{0,25\pi}{2}\right].\operatorname{sen}\left[\pi(4,0x - 1\,200t) - \dfrac{\pi}{2}(0,25)\right]\right]$

En consecuencia: $y_{\text{resultante}} = (10,00 \text{ m})\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right).\operatorname{sen}\left(4,0\pi x - 1\,200\pi t - \dfrac{\pi}{8}\right)$

Donde: Amplitud $= (10,00 \text{ m})\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = (10,00)(0,924) = 9,24$ m

Parte (b)

Sabemos que: $\omega = 1\,200\,\pi = 2\pi f$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1\,200\pi}{2\pi} = 600 \text{ Hz}$$

2. Dos ondas armónicas se describen por medio de:

$$y_1 = (6,0 \text{ m})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0,0050}t\right)$$

$$y_2 = (6,0 \text{ m})\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0,0050}t - \phi\right)$$

donde x, y_1 y y_2 están en metros y *t* en segundos. a) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante cuando $\phi = (\pi/6)$ rad? b) ¿Para qué valores de ϕ la amplitud de la onda resultante tendrá su valor máximo?

Resolución:

$$y_1\,(x;\,t) = (6{,}0\text{ m})\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t\right)$$

$$y_2\,(x;\,t) = (6{,}0\text{ m})\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t - \phi\right)$$

Parte (a) $\quad y_{resultante} = y_1 + y_2$

Entonces: $y_1 + y_2 = (6{,}0\text{ m})\left[2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{15}x - \frac{\pi}{0{,}0050}t - \frac{\phi}{2}\right)$

Donde: $\quad \text{Amplitud} = (12{,}0\text{ m})\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$

Entonces: $\quad$ Para: $\phi = \pi/6$

$$\text{Amplitud} = (12{,}0\text{ m})\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 11{,}6\text{ m}$$

Parte (b)

Si la amplitud es máxima,entonces:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \quad \therefore \quad \frac{\theta}{2} = k\pi\,; \quad k = 0;1;2;...$$

3. Dos ondas armónicas idénticas con longitudes de onda de 3,0 m viajan en la misma dirección a una velocidad de 2,0 m/s. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primera, pero a un tiempo posterior. Determine el mínimo intervalo de tiempo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de las dos ondas iniciales.

3A. Dos ondas armónicas idénticas con longitudes de onda λ viajan en la misma dirección a una velocidad *v*. La segunda onda se origina desde el mismo punto que la primera, pero a un tiempo posterior. Determine el mínimo intervalo de tiempo posible entre los momentos de inicio de las dos ondas si la amplitud de la onda resultante es la misma que la de las dos ondas iniciales.

Resolución:

Por dato: $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3{,}0\text{ m}$

$v_1 = v_2 = 2{,}0\text{ m}$

$A_1 = A_2 = A_{result.} = A$

Entonces: $\quad 2{,}0 = 3f \Rightarrow \frac{2}{3} = f \quad \therefore \quad \omega = \frac{4\pi}{3}\text{ rad/s}$

Luego: $\quad y_1(x;\,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$

$y_2(x;\,t) = A.\text{sen}(kx - \omega t - \phi)$

Pero $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{3}$

Luego: $\quad y_1\,(x;\,t) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t\right)$

$y_2\,(x;\,t) = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t - \phi\right)$

Entonces: $\quad y_{result} = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{2\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}t - \frac{\phi}{2}\right]$

Pero por dato: $\quad 2A\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = A \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0{,}5 \quad \therefore \quad \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{3}\text{rad}$

Luego: $\quad \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}t \quad \therefore \quad t_{mínimo} = 0{,}59$

4. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Están localizados sobre un poste vertical a una distancia de 4,00 m uno del otro. Un hombre camina hacia uno de los altavoces en una dirección perpendicular al poste como se indica en la figura P18.4. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad sonora, y b) a qué distancia se encuentra él de la pared en estos momentos? Considere la velocidad del sonido igual a 330 m/s e ignore toda reflexión de sonido proveniente del piso.

4A. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador de frecuencia *f*. Están localizados sobre un poste vertical a una distancia *d* uno del otro. Un hombre camina hacia uno de los altavoces en una dirección perpendicular al poste como se indica en la figura P18.4. a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad sonora, y b) a qué distancia se encuentra él de la pared en estos momentos? Considere la velocidad del sonido igual a *v* e ignore toda reflexión de sonido proveniente del piso.

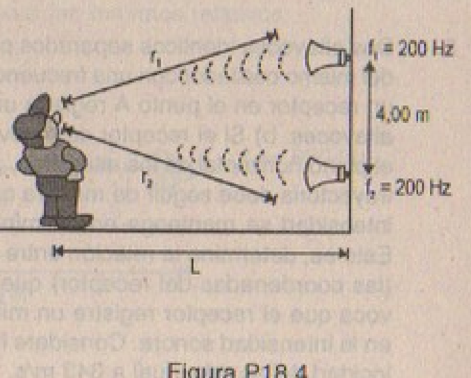


Figura P18.4

Resolución:

Considera: $\quad v_{sonido} = 330\text{ m/s}$

Parte (a)

El primer mínimo de intensidad sonora ocurrirá cuando las ondas que llegan al observador estén 180° fuera de base, esto quiere decir que se tiene que cumplir:

$$|r_1 - r_2| = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 1;\ 3;\ 5\ ...$$

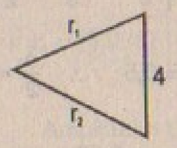
En consecuencia se escucharán: $\frac{n}{2}\left[\frac{330}{200}\right]$ veces en la intensidad sonora.

Parte (b)

Como el primer mínimo lo escucha cuando:

$$|r_1 - r_2| = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{330}{200}\right) = 0{,}825 \text{ m}$$

Entonces por teorema: (desigualdad triangular)

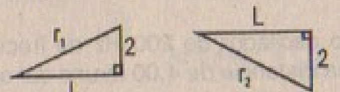


$$|r_1 - r_2| < 4 < |r_1 + r_2|$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}825 < 4 < r_1 + r_2$$

$$\therefore \quad r_1 + r_2 \text{ mínimo} = 4{,}1 \text{ m}$$

Luego:



como $\quad r_1 + r_2 = 4{,}1$

$\wedge \quad r_1 - r_2 = 0{,}825$

$\therefore \quad r_1 = 1{,}69 \text{ m} \wedge r_2 = 2{,}41 \text{ m}$

En consecuencia:

Por Pitágoras: $\quad L^2 = 4 - r_1^2$

$\Rightarrow \quad L^2 = 4 - (1{,}69)^2 \qquad \therefore \quad L_{máximo}$ (se acerca) $= 1{,}07$ m

5. Dos altavoces idénticos separados por una distancia de 10,0 m se excitan por medio del mismo oscilador con una frecuencia de $f = 21{,}5$ Hz (fig. P18.5). a) Explique por qué un receptor en el punto A registra un mínimo en la intensidad sonora de estos dos altavoces. b) Si el receptor se mueve en el plano horizontal de los altavoces, ¿qué trayectoria debe seguir de manera que la intensidad se mantenga en un mínimo? Esto es, determine la relación entre x y y (las coordenadas del receptor) que provoca que el receptor registre un mínimo en la intensidad sonora. Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

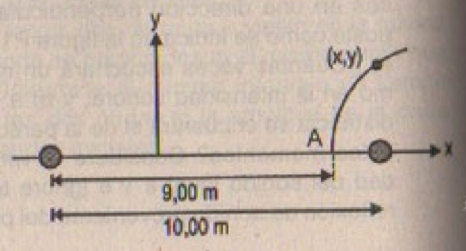
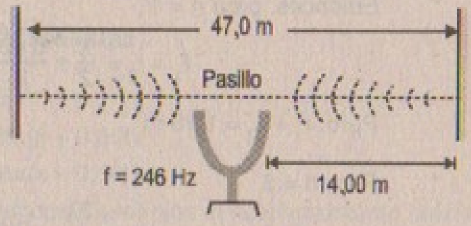


Figura P18.5

Datos incorrectos.

6. Un diapasón genera ondas sonoras con una frecuencia de 246 Hz. Las ondas viajan en direcciones opuestas a lo largo de un pasillo, se reflejan en las paredes y regresan. ¿Cuál es la diferencia de fase entre las ondas reflejadas cuando se encuentran? El corredor mide 47 m de largo y el diapasón se localiza a 14 m de un extremo. La velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

Resolución:



Considerar:

$v_{sonido} = 343$ m/s

Sabemos que: $\quad \Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$

Sea: $\quad r_1 = 14{,}00 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 33 \text{ m}$

Luego: $\quad \Delta r = |r_2 - r_1| = \frac{\lambda}{2\pi}\phi \quad \Rightarrow \quad 33 - 14 = \frac{\lambda}{2\pi}\phi \quad ...\ (1)$

Por otro lado:

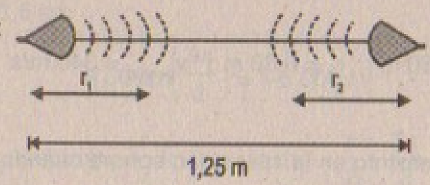
Sabemos que: $\quad v_{sonido} = f\lambda \Rightarrow \quad 343 = 246\,\lambda \qquad \therefore \quad \lambda = 1{,}39$ m

En consecuencia de (1): $\quad 19 = \frac{1{,}39}{2(3{,}1416)}\phi \qquad \therefore \quad \phi = 85{,}8$ rad

7. Dos altavoces se excitan por medio de un oscilador común a 800 Hz y se ponen uno en frente al otro a una distancia de 1,25 m. Localice los puntos a lo lago de una línea que una los dos altavoces donde se esperarían mínimos relativos. (Considere $v = 343$ m/s).

Resolución:

$f_A = 800$ Hz



$f_B = 800$ Hz

Considerar: $\quad v_{sonido} = 343$ m/s

Sabemos que: $\quad v_{sonido} = f\,\lambda$

$\Rightarrow \quad 343 = 800\,\lambda \qquad \therefore \quad \lambda = 0{,}43$ m

Por otro lado:
Se esperarían mínimos de intensidad sonora cuando se cumpla que

$$|r_1 - r_2| = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{para } n = 1;\ 3;\ 5\ ...$$

- Entonces: para n = 1

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}43}{2} = 0{,}215\ \text{m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1{,}25$ m $\qquad \therefore \qquad r_1 = 0{,}7325$ m

- Para n = 3

$$r_1 - r_2 = \frac{3\lambda}{2} = 3(0{,}215) = 0{,}645\ \text{m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1{,}25$ m $\qquad \therefore \qquad r_1 = 0{,}9475$ m

- Para n = 5

$$r_1 - r_2 = \frac{5\lambda}{2} = 5(0{,}215) = 1{,}075\ \text{m}$$

Pero: $r_1 + r_2 = 1{,}25$ m $\qquad \therefore \qquad r_1 = 1{,}1625$ m

En consecuencia los puntos serán:

0,7325 m; 0,9475 m; 1,1625 m

8. Para el arreglo que se muestra en la figura 18.2, haga la longitud de la trayectoria $r_1 = 1{,}20$ m y la longitud de la trayectoria $r_2 = 0{,}80$ m. a) Calcule las tres frecuencias más bajas del altavoz que darían como resultado una intensidad máxima en el receptor. b) ¿Cuál es la frecuencia más alta dentro del intervalo audible (20-20 000 Hz) que produciría un mínimo en el receptor? (Considere $v = 340$ m/s).

Resolución:

Datos: $r_1 = 1{,}20$ m ; $r_2 = 0{,}80$ m ; $v_{sonido} = 340$ m/s

Parte (a)

Se esperaría un máximo en la intensidad sonora cuando se cumpla que:

$$|r_1 - r_2| = n\lambda \qquad \text{para } n = 0;\ 1;\ 2;\ ...$$

Entonces: para n = 1 $\qquad \lambda = 0{,}4$ m $\qquad \therefore \qquad f_1 = \dfrac{340}{0{,}4} = 850$ Hz

Para: n = 2 $\qquad \lambda = 0{,}8$ m entonces: $\qquad f_2 = 340/0{,}8 = 425$ Hz

Para: n = 3 $\qquad \lambda = 1{,}2$ m entonces: $\qquad f_3 = 340/1{,}2 = 283{,}3$ Hz

Parte (b)

Nos piden $\qquad 20\ \text{Hz} < f < 20\,000\ \text{Hz} \qquad$ para n = 1; 3; 5...

Entonces: $\qquad 20 < 2\ v_{sonido}/0{,}4n < 20\,000 \Rightarrow 0{,}0425 \times 2 < n < 42{,}5 \times 2$

Por lo tanto: $\qquad f(1) = 340/0{,}4(1) \qquad \Rightarrow \qquad f(1) = 1\,700$ Hz

ONDAS ESTACIONARIAS

9. Dos ondas armónicas se describen por:

$$y_1 = (3{,}0\ \text{cm})\text{sen}\pi(x + 0{,}60t)$$
$$y_2 = (3{,}0\ \text{cm})\text{sen}\pi(x - 0{,}60t)$$

donde *x* está en centímetros y *t* en segundos. Determine el desplazamiento *máximo* del movimiento en a) x = 0,25 cm, b) x = 0,50 cm, y c) x = 1,5 cm. d) Encuentre los tres valores más pequeños de x correspondientes a los antinodos.

Resolución:

Parte (a)

$$y_1 + y_2 = (3{,}0\ \text{cm})[\text{sen}(\pi x)\cos(\pi(0{,}6)t) + \cos(\pi x)\text{sen}(\pi(0{,}6)t) + \text{sen}(\pi x)\cos(\pi(0{,}6)t) - \text{sen}(\pi(0{,}6)t)\cos(\pi x)]$$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = [(2)(3{,}0\ \text{cm})\text{sen}(\pi x)]\cos\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$$

Donde: $\qquad 6{,}00\text{sen}(\pi x) = $ Amplitud máxima

Entonces el desplazamiento máximo para x = 0,25 cm será:

$$(6{,}00\ \text{cm})\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4{,}24\ \text{cm}$$

Parte (b) Para x = 0,50 cm

Entonces: $$6{,}00\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6{,}00\ \text{cm}$$

Parte (c) Para x = 1,5 cm

Entonces: $$6{,}00\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = |-6{,}00\ \text{cm}|$$

Parte (d) $$\text{sen}(\pi x) = \frac{\pi}{2}k \quad \Rightarrow \quad \pi(x) = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}$$

$$\therefore \quad x = 0{,}5\ \text{cm}\ ;\quad x = 1{,}50\ \text{cm}\ ;\quad x = 2{,}25\ \text{cm}$$

10. Utilice la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \cos b \pm \cos a\ \text{sen}\,b$$

para demostrar que la resultante de dos funciones de onda cada una de amplitud A_0, frecuencia angular ω y número de propagación *k* y que viajan en direcciones opuestas puede expresarse como:

$$y = (2A_0 senkx)cos\omega t$$

Resolución :

Datos: A_0, ω, k

Por demostrar que: $y = 2A_0 sen(kx)cos\ \omega t$

Sea: $y_1 = A_0\ sen(kx - \omega t) \ \rightarrow$

$y_2 = A_0\ sen(kx + \omega t) \ \leftarrow$

Entonces: aplicando la sugerencia

$$y = y_1 + y_2 = A_0\ [sen(kx)cos(\omega t) - sen(\omega t)cos(kx) + sen(kx)cos(\omega t) + sen(\omega t)\ cos(kx)]$$

$$\therefore \quad y = 2A_0 sen(kx)cos(\omega t) \qquad l.q.q.d.$$

11. La función de onda para una onda estacionaria en una cuerda es

$$y = (0{,}30\ m)sen(0{,}25\ x)cos(120\ \pi t)$$

donde x está en metros y *t* en segundos. Determine la longitud de onda y la frecuencia de las ondas viajeras que interfieren.

Resolución :

$$y = (0{,}30\ m)sen(0{,}25x)[cos(120\pi t)]$$

Sabemos que: $0{,}25 = \dfrac{2\pi}{\lambda} \ \Rightarrow \ \lambda = \dfrac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi = 25{,}1\ m$

Por otro lado: $120\pi = 2\pi f \ \Rightarrow \ f = 60\ Hz$

12. Dos ondas armónicas que se propagan en direcciones opuestas interfieren para producir una onda estacionaria descrita por

$$y = (1{,}50\ m)sen(0{,}400\ x)cos(200t)$$

donde x está en metros y *t* en segundos. Determine la longitud, frecuencia y velocidad de las ondas que interfieren.

Resolución :

$$y = (1{,}50\ m)sen(0{,}400x)cos(200t)$$

$$0{,}400 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5\pi = 15{,}7\ m$$

$$200 = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{100}{\pi} \quad \therefore \quad f = 31{,}8\ Hz$$

En consecuencia: $v_{ondas} = \lambda f = (15{,}7)(31{,}8) \quad \therefore \quad v_{ondas} = 499{,}26\ m/s$

13. Una onda estacionaria se forma por medio de la interferencia de dos ondas viajeras, cada una de las cuales tiene una amplitud $A = \pi$ cm, número de onda angular $k = (\pi/2)\ cm^{-1}$ y frecuencia angular $\omega = 10\pi$ rad/s. a) Calcule la distancia entre los dos primeros antinodos. b) ¿Cuál es la amplitud de la onda estacionaria en x = 0,25 cm?

Resolución :

Datos: $A = \pi\ cm$; $k = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{cm}$; $\omega = 10\pi$ rad/s

Parte (a)

Sabemos que: Amplitud máxima = 2Asen(kx)

Entonces: $sen(kx) = 1 \quad \Rightarrow \quad kx = \dfrac{\pi}{2}k \quad (k = 1; 3; 5...)$

Para el primer antinodo k = 1

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad x = 1{,}0\ cm$$

Para el segundo antinodo k = 3

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad x = 3{,}0\ cm$$

Parte (b)

Sabemos que: Amplitud = 2Asen(kx)

Entonces para x = 0,25 cm

$$\text{Amplitud} = 2(\pi)sen\left(\frac{\pi}{2}(0{,}25)\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Amplitud} = 2(3{,}1416)sen\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Amplitud} = 2{,}4\ cm$$

14. Verifique por sustitución directa que la función de onda de una onda estacionaria dada en la ecuación 18.3,

$$y = 2A_0\ sen\ kx\ cos\omega t$$

es una solución de la ecuación de onda general, ecuación 16.26:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Resolución :

Por demostrar que: $y = 2A_0\ sen(kx).cos(\omega t)$

Es solución de: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ... (1)

Por sustitución directa: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = (2A_0 k)\ cos(\omega t)cos(kx)$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -2\ A_0 k^2 cos(\omega t)\ [sen(kx)] \quad ...\ (2)$$

Por otro lado: $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -2\ A_0\ (\omega)sen(kx)\ sen(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\,A_o\,\omega^2\,\mathrm{sen}(kx)\cos(wt) \quad \dots (3)$$

Entonces reemplazando (2) y (3) en (1):

$$-2\,A_0 k^2 \cos(\omega t)(\mathrm{sen}(kx)) = -2\,A_0\omega^2\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = (2\pi f)^2 \quad \therefore \quad 4\pi^2 = 4\pi^2 v^2$$

En consecuencia: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ l.q.q.d.

15. Dos ondas dadas por $y_1(x, t) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t)$ y $y_2(x, t) = A\mathrm{sen}(2kx + \omega t)$ interfieren. a) Determine todos los valores x donde haya nodos estacionarios. b) Determine todos los valores x donde haya nodos que dependan del tiempo *t*.

Resolución:

Datos: $y_1(x; t) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t)$

$y_2(x; t) = A\mathrm{sen}(2kx + \omega t)$

Parte (a)

Sumando: $y_1 + y_2 = y$

$$\Rightarrow \quad y = A[\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) - \mathrm{sen}(\omega t)\cos(kx) + \mathrm{sen}(2kx)\cos(\omega t) + \cos(2kx)\,\mathrm{sen}(\omega t)]$$

Pero además: recordando $\mathrm{sen}(a) + \mathrm{sen}(b) = 2\,\mathrm{sen}\dfrac{(a+b)}{2}\cos\dfrac{(a-b)}{2}$

Entonces: $y = 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{3kx}{2}\right)\cos\left(\dfrac{kx}{2} + \omega t\right)$

Luego: $\text{Amplitud} = 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{3kx}{2}\right)$

Para que existan nodos se tiene que cumplir que:

$$2\mathrm{sen}\left(\frac{3kx}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3kx}{2} = +\pi;\ 2\pi \quad \therefore \quad x = \pm\frac{2\pi}{3k}\ ;\ \pm\frac{4\pi}{3k}$$

Parte (b)

Para que existan nodos que dependan del tiempo se tiene que cumplir que:

$$2\cos\left(\frac{kx}{2} + \omega t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kx}{2} + \omega t = \pm\frac{\pi}{2}\ ;\ \pm\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{\pi - 2\omega t}{k} \quad \text{o} \quad x = \pm\frac{3\pi - 2\omega t}{k}$$

16. Dos ondas en una larga cuerda están dadas por

$$y_1 = (0{,}015\ \mathrm{m})\cos\left(\frac{x}{2} - 40\,t\right) \qquad y_2 = (0{,}015\ \mathrm{m})\cos\left(\frac{x}{2} + 40\,t\right)$$

donde las *x* e *y* están en metros y t en segundos. a) Determine la posición de los nodos de la onda estacionaria resultante. b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo en la posición x = 0,40 m?

Resolución:

Parte (a)

$$y_1 + y_2 = y_{result} = (0{,}015)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(40t) + \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sen}(40t) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(40t) - \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sen}(40t)\right]$$

$$\therefore \quad y_{result} = (0{,}03\ \mathrm{m})\cos\frac{x}{2}\cos(40t)$$

Entonces la posición de los nodos se encontrarán cuando:

$$(0{,}03\ \mathrm{m})\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2}\ ;\ \pm\frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad x = \pm\pi \quad \text{o} \quad x = \pm 3\pi$$

Parte (b)

Sabemos: $\text{Amplitud} = (0{,}03)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Entonces para x = 0,40 m

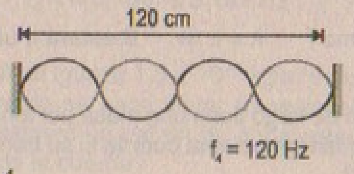
Amplitud máxima = (0,03)cos[0,2 rad]

$\therefore$ Amplitud máxima = $y_{máx}$ = 0,029 m

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

17. Una onda estacionaria se establece en una cuerda fija de 120 cm de largo en ambos extremos. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se excita a 120 Hz. a) Determine la longitud de onda. b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

Resolución:



n.° de antinodos = 4

Parte (a)

Sabemos que distancia de nodo a nodo = $\dfrac{\lambda}{2}$

Entonces: $4\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = 120$ cm $\quad \therefore \quad \lambda = 60{,}00$ cm

Parte (b)

Por dato: $f(4) = 120$ Hz

$\Rightarrow \quad f(4) = 4f_1 \quad \Rightarrow \quad 120 = 4f_1 \quad \therefore \quad f_1 = 30$ Hz

18. Una cuerda alargada tiene 160 cm de largo y una densidad lineal de 0,015 g/cm. ¿Qué tensión en la cuerda producirá un segundo armónico de 460 Hz?

Resolución:

Datos: $L_{cuerda} = 160$ cm $\qquad m = 0{,}015$ g/cm

$f_2 = 460$ Hz $\qquad T = ?$

Sabemos que: $f_2 = \dfrac{2}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$\Rightarrow \quad (460)^2\,(1{,}6)^2\,(0{,}015)10^3 \times 10^2 = T$

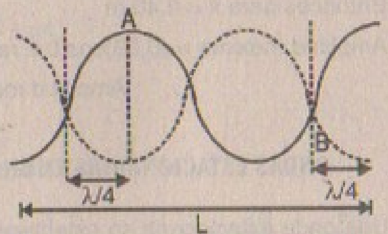
$\therefore \quad T = 812{,}5$ N

19. Considere la cuerda de longitud *L* de una guitarra afinada. ¿En qué punto a lo largo de la cuerda (fracción de la longitud desde un extremo) debe pulsarse y en qué punto debe mantenerse el dedo ligeramente contra la cuerda de manera que el segundo armónico sea el modo de vibración más prominente?

Resolución:

A: Es el punto donde debe pulsarse la cuerda.

B: Es el punto donde debe mantenerse el dedo, para que solamente el segundo armónico sea el nodo de vibración más prominente.



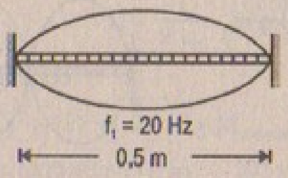
Entonces: Como: $\lambda = L \Rightarrow$ A estará a una distancia $\dfrac{L}{4}$

Como: $\lambda = L \Rightarrow$ B estará a una distancia $\dfrac{2\lambda}{4} \equiv \dfrac{L}{2}$

20. Una cuerda de 50 cm de largo tiene una masa por longitud unitaria de 20×10^{-5} kg/m. ¿A qué tensión debe alargarse esta cuerda si su frecuencia fundamental va a ser a) 20 Hz y b) 4 500 Hz?

Resolución:

Parte (a)



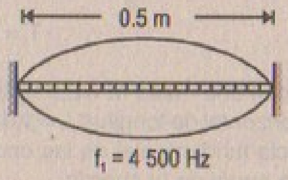
$\mu = 20 \times 10^{-5}$ kg/m

Entonces: $20 = \dfrac{1}{2(0{,}5)} \times \sqrt{\dfrac{T}{2\times10^{-4}}}$

$\Rightarrow \quad (20)^2 \times (2 \times 10^{-4}) = T \quad \therefore \quad T = 0{,}08$ N

Parte (b)

Entonces:



$4\,500 = \dfrac{1}{2(0{,}5)} \times \sqrt{\dfrac{T}{2\times10^{-4}}}$

$\Rightarrow \quad (4\,500)^2 \times 2 \times 10^{-4} = T$

$\therefore \quad T = 4\,050$ N

21. Encuentre la frecuencia fundamental y las siguientes tres frecuencias que podrían ocasionar un patrón de ondas estacionarias en una cuerda de 30 m de largo, con una masa por unidad de longitud de $9{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m y alargada hasta una tensión de 20 N.

Resolución:

Datos: long. cuerda = 30 m ; $T = 20$ N

$\mu = 9{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m ; $f_1 = ?\,;\, f_2 = ?\,;\, f_3 = ?\,;\, f_4 = ?$

$f_1 = \dfrac{1}{2L}\times\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \dfrac{1}{2(30)}\times\sqrt{\dfrac{20}{9{,}0\times10^{-3}}} \quad \therefore \quad f_1 = 0{,}786$ Hz

Luego: $f_2 = 2 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_2 = 2(0{,}786) = 1{,}57$ Hz

$f_3 = 3 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_3 = 3(0{,}786) = 2{,}357$ Hz

$f_4 = 4 \times f_1 \quad \Rightarrow \quad f_4 = 4(0{,}786) = 3{,}143$ Hz

22. Una cuerda de densidad lineal igual a $1{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m y de 3,0 m de largo se estira entre dos puntos. Un extremo se hace vibrar transversalmente a 200 Hz. ¿Qué tensión en la cuerda establecerá un patrón de onda estacionaria con tres medias ondas en toda la longitud de la cuerda?

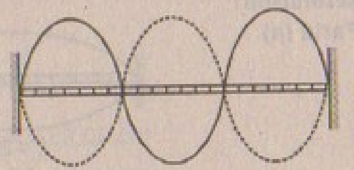
Resolución :

Datos: $\mu_{(cuerda)} = 1,0 \times 10^{-3}$ kg/m

$L_{cuerda} = 3,0$ m

$f = 200$ Hz

$T = ?$



$$f_3 = 3f_1 = 3(200) \;\therefore\; f_3 = 600 \text{ Hz}$$

Luego: $$f_3 = 600 = \frac{3}{2(3,0)} \times \sqrt{\frac{T}{1,0\times10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{(600)^2\times(2)^2\times(3,0)^2}{9} \times 1,0 \times 10^{-3} = T$$

$$\therefore \quad T = 1\,440 \text{ N}$$

23. Una esfera con una masa $M = 2,0$ kg está sostenida por una cuerda que pasa sobre una barra horizontal de longitud $L = 1,0$ m (Fig. P18.23). Dado que el ángulo es $\theta = 35°$ y la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la cuerda es $f = 50,0$ Hz, determine la masa de la cuerda.

23A. Una esfera con una masa M está sostenida por una cuerda que pasa sobre una barra horizontal de longitud L. (Fig. P18.23). Dado que el ángulo es θ y la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias en la cuerda es f, determine la masa de la cuerda.

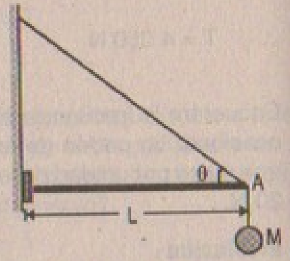
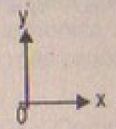


Figura P18.23

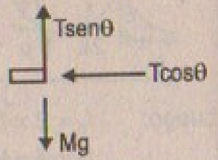
Resolución :

$f_1 = 50,0$ Hz ; $M = 2,00$ kg

$L = 1,0$ m ; $\theta = 35°$



D.C.L. en «A» de la barra



$$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T\text{sen}\theta = Mg \quad \therefore \quad T = \frac{Mg}{\text{sen}\,\theta} \quad \ldots (1)$$

Por otro lado:

Cuando la onda estacionaria se transmite a través de la cuerda (esto quiere decir que se propaga tanto en el eje x como en el eje y); luego por la frecuencia fundamental:

En el eje «x» $$f_1 = \frac{1}{2L_c}\sqrt{\frac{T\cos\theta \times L_{cuerda}}{M_{cuerda}}}$$

Entonces: reemplazando:

$$(50)^2 \times (2)^2\,(1,0 \text{ m})^2 \times M_{cuerda} = T\cos\theta \times (1,0)$$

$$\Rightarrow \quad 10^4 \times M_{cuerda} = Mg\cot\theta \times (1) \quad \Rightarrow \quad 10^4 \times M_{cuerda} = (9,8)(2)\cot(35°)$$

$$\Rightarrow \quad 10^4 \times M_{cuerda} = (2)(9,8)\,\frac{1}{\tan 35°} \qquad \therefore \quad M_{cuerda} = 2,8 \text{ g}$$

24. Un alambre de 2,0 m de largo y una masa de 0,10 kg está fijo en ambos extremos. La tensión en el alambre se mantiene en 20 N. Se observa un nodo en un punto a 0,40 m de un extremo. ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros tres modos de vibración permitidos?

Resolución :

Datos: long. alambre = 2,0 m

Masa de un alambre = 0,10 kg

T = 20,0 N

$$f_1 = \frac{1}{2(2)} \times \sqrt{\frac{(20)(2)}{0,10}} \qquad \therefore \quad f_1 = 5,00 \text{ Hz}$$

Luego: $f_2 = 2 \times f_1 \;\Rightarrow\; f_2 = 2(5,00) \quad \therefore \quad f_2 = 10,00$ Hz

$f_3 = 3 \times f_1 \;\Rightarrow\; f_3 = 3(5,00) \quad \therefore \quad f_3 = 15,00$ Hz

25. La cuerda La de un chelo vibra en su modo fundamental con una frecuencia de 220 vibraciones/s. El segmento en vibración es de 70 cm de largo y tiene una masa de 1,2 g. a) Encuentre la tensión en la cuerda. b) Determine la frecuencia del armónico que hace que la cuerda vibre en tres segmentos.

Resolución :

Datos: $f_1 = 220$ Hz ; $L = 0,7$ m

Masa $= 1,2 \times 10^{-3}$ kg

Parte (a)

Sabemos que: $$f_1 = \frac{1}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(220)^2\times(4)(0,7)^2\times1,2\times10^{-3}}{(0,7)} = T$$

$$\therefore \quad T_{cuerda} = 163 \text{ N}$$

Parte (b)

Nos piden f_3 $$\Rightarrow \quad f_3 = \frac{3}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f_3 = \frac{3}{2(0,7)} \times \sqrt{\frac{(163)(0,7)}{1,2\times10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad f_3 = 660 \text{ Hz}$$

26. En el arreglo mostrado en la figura P18.26 puede colgarse una masa de una cuerda (con una densidad de masa lineal $\mu = 0{,}0020$ kg/m) alrededor de una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante, f), y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2{,}0$ m. Cuando la masa m es de 16 kg o de 25 kg, se observan ondas estacionarias, pero no se observan ese tipo de ondas para cualesquiera otras masas entre estos valores. a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? (*Sugerencia*: A mayor tensión en la cuerda, menor número de nodos en la onda estacionaria). b) ¿Cuál es la masa más grande para la cual podrían observarse ondas estacionarias?

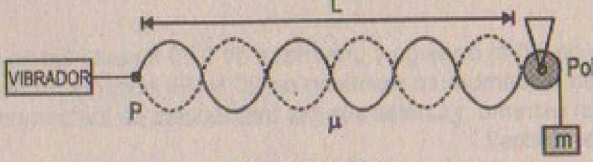


Figura P18.26

Resolución:

Datos: $\mu = 0{,}0020$ kg/m
$L = 2{,}0$ m

Parte (a)

Si: $m = 16$ kg entonces el n.° de antinodos es máximo e igual a 1.

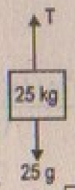
Luego:

$\therefore \quad T = (16)(9{,}8) = 156{,}8$ N

Luego: $f_1 = \dfrac{1}{2(2)} \times \sqrt{\dfrac{156{,}8}{0{,}0020}} \qquad \therefore \quad f_1 = 70$ Hz

Si: $m = 25$ kg entonces el # de antinodos es mínimo e igual a 1.

Luego:



$\therefore \quad T = (25)(9{,}8) = 245$ N

Entonces: $f_1 = \dfrac{1}{2(2)} \times \sqrt{\dfrac{245}{0{,}0020}} \qquad \therefore \quad f_1 = 87{,}5$ Hz

27. Una cuerda de guitarra de 60 cm bajo una tensión de 50 N tiene una masa por unidad de longitud de 0,10 g/cm. ¿Cuál es la frecuencia resonante más alta que puede escuchar una persona capaz de oír frecuencias hasta de 20 000 Hz?

Resolución:

Datos: $f_{\text{más alta}} \le 2 \times 10^4$ Hz ; $T_{\text{cuerda}} = 50$ N
$L_{\text{cuerda}} = 0{,}6$ m ; $\mu = 0{,}01$ kg/m

$$f_1 = \frac{1}{2(0{,}6)} \times \sqrt{\frac{50}{(0{,}01)}} \qquad \therefore \quad f_1 = 58{,}9 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{2}{2(0{,}6)} \times \sqrt{\frac{50}{(0{,}01)}} \qquad \therefore \quad f_2 = 117{,}3 \text{ Hz}$$

Entonces: $f_{339} = 339 \times f_1 = 339 \times (58{,}9) = 19\,967{,}1$ Hz

$\therefore$ La frecuencia resonante más alta será: $f(339) = 19{,}97$ kHz

28. Un alambre estirado vibra en su modo fundamental a una frecuencia de 400 vibraciones/s. ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si el alambre tuviera la mitad de largo, con el doble de diámetro y con una tensión cuatro veces superior?

Resolución:

Datos: sea: $f_1 = 400$ Hz
Longitud del alambre = L
Tensión en el alambre = T

Sabemos que: $4 \times 10^2 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ ... (1)

Entonces: si: $L_{\text{final}} = \dfrac{L}{2} \qquad T_{\text{final}} = 4T$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2\left(\frac{L}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{4T}{M} \times \left(\frac{L}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{2}{2L} \times \sqrt{2 \times \frac{T}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = 2\sqrt{2} \times 400 \qquad \therefore \quad f_1 = 1\,131{,}4 \text{ Hz}$$

29. Un Do menor ($f = 65$ Hz) se toca en un piano. Si la longitud de la cuerda del piano es de 2,0 m y su densidad de masa lineal es igual a 5,0 g/m, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

Resolución:

Datos: Do menor: ($f_1 = 65$ Hz)
Longitud de la cuerda = 2,0 m

Densidad lineal = $5\times10^{-3}\,\dfrac{g}{m}$

T = ?

Por dato: $f_1 = 65\text{ Hz} = \dfrac{1}{2(2)}\times\sqrt{\dfrac{T}{5\times10^{-3}}}$

$\Rightarrow\quad (65)^2(4)^2\times5\times10^{-3} = T \qquad \therefore\quad T_{cuerda} = 338\text{ N}$

30. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0,35 m y se afina para un concierto en Sol, $f_{Sol} = 392$ Hz. ¿Dónde debe poner el dedo la violinista para tocar un concierto en La, $f_{La} = 440$ Hz? Si esta posición va a permanecer correcta hasta un ancho de medio dedo (es decir, dentro de 0,60 cm), ¿en qué fracción es posible dejar que la tensión de la cuerda disminuya?

Resolución:

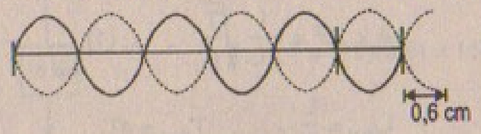
Datos: $L_{cuerda} = 0{,}35$ m ; $f_{sol} = 392$ Hz

Sabemos que: $f_{(5)} = f_{sol} = 5\times f_1 = 392$

Además: $f_{La} = f_{(6)} = 6\,f_1 = 440$ Hz

Entonces: 6 = n.° de antinodos

$\Rightarrow\quad 7\,\dfrac{\lambda}{2} = 0{,}35 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 0{,}1\text{ m} = 10\text{ cm}$



$\Rightarrow\quad 6\,\dfrac{\lambda}{2} = 34{,}4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{68{,}8}{6} = \lambda \qquad \therefore\quad \lambda = 11{,}46\text{ cm}$

En consecuencia:

El violinista debe de colocar el dedo a 34,4 cm.

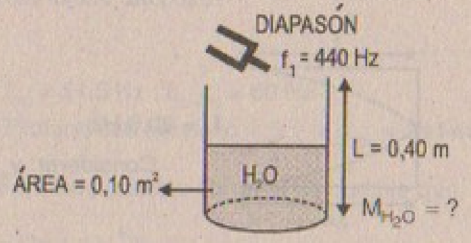
ONDAS ESTACIONARIAS EN COLUMNAS DE AIRE

(En esta sección, a menos que se indique de otro modo, suponemos que la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.)

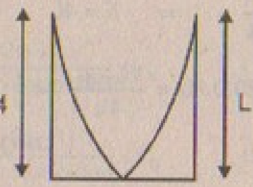
31. Un tubo abierto de 0,40 m de largo se coloca verticalmente en una cubeta cilíndrica que tiene un área en el fondo de 0,10 m². Se vierte agua dentro de la cubeta hasta que un diapasón vibrando de 440 Hz de frecuencia, situado sobre el tubo, produce resonancia. Encuentre la masa del agua en la cubeta en este momento.

31A. Un tubo abierto de longitud *L* se coloca verticalmente en una cubeta cilíndrica que tiene un área A en el fondo. Se vierte agua dentro de la cubeta hasta que un diapasón vibrando de frecuencia *f*, situado sobre el tubo, produce resonancia. Encuentre la masa del agua en la cubeta en este momento.

Resolución:



Estamos en el caso de un tubo(abierto-cerrado)



Como está en resonancia, entonces:

$f_1 = 440\text{ Hz} = \dfrac{1.\,v_{sonido}}{4L'}$

$\Rightarrow\quad 440 = \dfrac{1}{4L'}(34{,}4) \qquad \therefore\quad L' = 0{,}195\text{ m}$

Luego: sabemos que:

$A\times\text{longitud} = \text{Volumen} = \dfrac{M_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}$

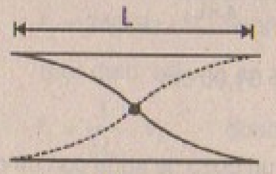
$\Rightarrow\quad (0{,}10)(0{,}4-0{,}195) = \dfrac{M_{H_2O}}{10^3\text{ kg/m}^3}$

$\therefore\quad M_{H_2O} = 20{,}45\text{ kg}$

32. Si un tubo de órgano resuena a 20,0 Hz, ¿cuál es la longitud requerida si está a) abierto en ambos extremos, y b) cerrado en un extremo?

Resolución:

Parte (a)



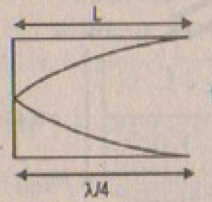
$f_1 = 20{,}0$ Hz

Considerar: $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow\quad \dfrac{2\lambda}{4} = L \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2L$

Luego: $f_1 = \frac{v_s}{2L} \Rightarrow 20 = \frac{344}{2L} \quad \therefore \quad L_{tubo} = 8{,}6 \text{ m}$

Parte (b)



$f_1 = 20{,}0$ Hz

Considerar: $v_{sonido} = 344$ m/s

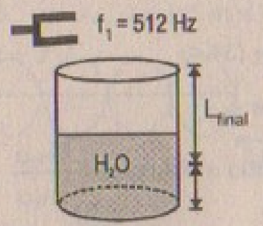
Entonces: $L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L$

Luego: $f_1 = 20{,}0 \text{ Hz} = \frac{v_{sonido}}{4L} \Rightarrow 20(4)L = 344$

$\therefore$ Long. tubo = 4,3 m

33. Un diapasón de 512 Hz de frecuencia se coloca cerca de la parte superior del tubo mostrado en la figura 18.13a. El nivel del agua se reduce de modo que la longitud *L* aumenta lentamente desde un valor inicial de 20,0 cm. Determine los dos siguientes valores de *L* que corresponden a modos resonantes.

Resolución:



Para un tubo (abierto-cerrado se cumple que)

$f_{n+1} = \frac{2n+1}{4L} \times v_s$ Donde: $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow f_{(3)} = 512 = \frac{2(2)+1}{4\,L_3}\,.\,(344) \quad \therefore \quad L_3 = 84{,}0 \text{ cm}$

Para $f_2 = 512 \Rightarrow 512 = \frac{3\,.\,V_s}{4 \times L_2}$

$\Rightarrow L_2 = \frac{3\,(344)}{4\,(512)} \quad \therefore \quad L_2 = 54{,}00 \text{ cm}$

34. Un estudiante mide la profundidad de un pozo de agua con un oscilador de audio de frecuencia ajustable. Se oyen dos frecuencias resonantes sucesivas a 51,5 Hz y 60,0 Hz. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

34A. Un estudiante mide la profundidad de un pozo de agua con un oscilador de audio de frecuencia ajustable. Se oyen dos frecuencias resonantes sucesivas a f_1 y f_2. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

Resolución:

Por dato: $f_{(n)} = 51{,}5 \text{ Hz}\ ;\ f_{(n+1)} = 60 \text{ Hz}$

Profundidad del pozo = ? ; $v_{sonido} = 344$ m/s

Como se trata de un tubo (abierto-cerrado) se cumple que:

$$f_{(n+1)} = (2n+1)\,\frac{V_s}{4L}$$

$$\Rightarrow f_{(n+1)} = 60 \text{ Hz} = \frac{2n+1}{4 \text{ Profundidad}} \times v_s \quad \dots (1)$$

$$f_{(n)} = 51{,}5 \text{ Hz} = \frac{(2n-1)}{4 \text{ Profundidad}} \times v_s \quad \dots (2)$$

(1) – (2) :

$$60 - 51{,}5 = \frac{v_s}{4 \text{ profundidad}}\left[(2n+1)-(2n-1)\right] \Rightarrow 8{,}5 = \frac{v_s}{4 \text{ profundidad}} \ (2)$$

Reemplazando: $8{,}5 = \frac{1}{2} \times \frac{344}{\text{profundidad}} \Rightarrow \text{Profundidad} = \frac{344}{2(8{,}5)}$

$\therefore$ Profundidad del pozo = 20,2 m

35. Calcule la longitud de una tubería que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz si está a) cerrada en un extremo, y b) abierta en ambos extremos.

Resolución:

Parte (a) $f_1 = 240$ Hz ; Profundidad = P = ?

(por dato: cerrada en un extremo)

Entonces se cumple que: $f_1 = \frac{1}{4P} \times v_s$ donde $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow 240 = \frac{1}{4P} \times (344) \quad \therefore$ Profundidad de la tubería = 0,358 m <> 35,8 cm

Parte (b) $f_1 = 240$ Hz Profundidad: P = ?

(por dato: abierta en ambos extremos)

Entonces: $f_1 = \frac{1}{2L}\,.\,v_s$ donde $v_s = 344$ m/s

$\Rightarrow 240 = \frac{344}{2P} \quad \therefore$ Profundidad de la tubería = 0,72 m <> 72 cm

36. Un túnel debajo de un río mide aproximadamente 2,0 km de largo. ¿A qué frecuencias puede resonar este túnel?

Resolución :

Dato: profundidad túnel = 2×10^3 m

$f_1 = ?$; $v_s = 344$ m/s

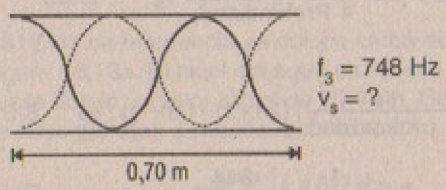
Como se trata de un túnel abierto en ambos extremos se cumple que:

$$f_1 = \frac{1}{2\ \text{long}} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{(2\times10^3)\times 2}\times(344)$$

$$\therefore \quad f_1 = 0{,}086 \text{ Hz}$$

37. Un tubo de órgano abierto en ambos extremos está vibrando en su tercer armónico con una frecuencia de 748 Hz. La longitud de la tubería es de 0,70 m. Determine la velocidad del sonido en el aire dentro del tubo.

Resolución :



Sabemos que: $f_3 = 3f_1 = 3 \times \frac{v_{sonido}}{2L} \quad \Rightarrow \quad 748 = \frac{3 \times v_{sonido}}{2\ (0{,}7)}$

$$\therefore \quad v_{sonido} = 349 \text{ m/s}$$

38. En general, el tubo más largo en un órgano que tiene registro de pedal mide 4,88 m. ¿Cuál es la frecuencia fundamental (a 0,0° C) si el extremo que no se acciona del tubo está a) cerrado y b) abierto? c) ¿Cuáles serán las frecuencias a 20,0°C?

Resolución :

Parte (a) Long. tubo = 4,88 m ; $f_1 = ?$ (a 0°C)
(tubo abierto - cerrado)

Entonces v_s (0°C) = 331 m/s

Luego: $f_1 = \frac{1}{4L} \times v_s \qquad f_1 = \frac{1}{4(4{,}88)} \times 331 \qquad \therefore \quad f_1 = 16{,}96$ Hz

Parte (b)
(tubo abierto en ambos extremos)
Entonces: v_s (0°C) = 331 m/s

Luego: $f_1 = \frac{1}{2L} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2(4{,}88)} \times 331$

$$\therefore \quad f_1 = 34 \text{ Hz}$$

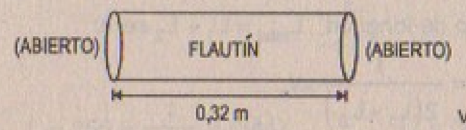
Parte (c)
A: 20°C la velocidad del sonido será = 343 m/s

Entonces: $f_1 = \frac{343}{4(4{,}88)} = 17{,}6$ Hz (tubo: abierto - cerrado)

$f_1 = \frac{343}{2(4{,}88)} = 35{,}1$ Hz (tubo: abierto en ambos extremos)

39. La longitud total de un flautín es 32 cm. La columna de aire resonante vibra como un tubo abierto en ambos extremos. a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que se puede tocar en un flautín, suponiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. b) Los agujeros abiertos laterales acortan de manera efectiva la longitud de la columna resonante. Si la nota más alta que puede tocarse en un flautín es de 4 000 Hz, encuentre la distancia entre nodos adyacentes para este modo de vibración.

Resolución :



$v_s = 340$ m/s

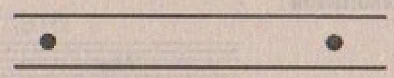
Parte (a)
Nos piden la frecuencia en la nota Do es decir f_1.

Entonces: $f_1 = \frac{1}{2L} \times v_s$

$f_1 = \frac{1}{2(0{,}32)} \times 340 \qquad \therefore \quad f_1 = 531{,}25$ Hz

Parte (b)

Por dato: $f_n = 4\,000$ Hz



Entonces: $f_n = \frac{n}{2L} \times v_s \qquad$ Donde $v_s = 340$ m/s

$\Rightarrow \quad 4\,000 = \frac{n}{2(0{,}32)} \times 340 \qquad \therefore \quad n = 8$ nodos

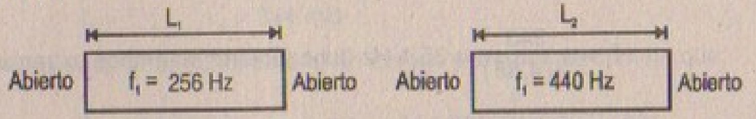
Luego: $7\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 32$ cm $\qquad \Rightarrow \quad \lambda = 8{,}51$ cm

En consecuencia: Distancia (nodo-nodo) = $\frac{\lambda}{2} = 4{,}25$ cm

40. Un pedazo de tubo de metal tiene exactamente la longitud adecuada para que cuando se corte en dos pedazos (desiguales), una pieza resuene a 256 Hz y la otra a 440 Hz.

a) ¿Qué frecuencia resonante habría sido producida por la longitud original del tubo, y b) qué longitud tenía el pedazo original?

Resolución :
Parte (a)



Considerar: $v_s = 344$ m/s

Sabemos que: $f_1 = 256 = \dfrac{1}{2L_1} \times v_s \quad \therefore \quad L_1 = 0{,}672$ m

$f_1 = 440 = \dfrac{1}{2L_2} \times v_s \quad \therefore \quad L_2 = 0{,}390$ m

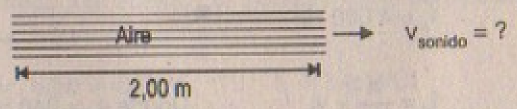
Luego: para un tubo de longitud $L_{total} = L_1 + L_2$ será:

$$f_1 = \frac{1}{2(L_1 + L_2)} \times v_s$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{344}{2(0{,}390 + 0{,}672)} \quad \therefore \quad f_1 = 162 \text{ Hz}$$

41. Una columna de aire de 2,00 m de largo está abierta en ambos extremos. La frecuencia de cierto armónico es de 410 Hz, en tanto que la del siguiente armónico más alto corresponde a 492 Hz. Determine la velocidad del sonido en la columna de aire.

Resolución :



Por dato: $f_n = 410$
$f_{(n+1)} = 492$

Por condición de tubos abiertos en ambos extremos:

$$\left.\begin{aligned} & f_{(n)} = 410 = \frac{n}{2L} \times v_s \\ y \quad & f_{(n+1)} = 492 = \frac{n+1}{2L} \times v_s \end{aligned}\right\} \div$$

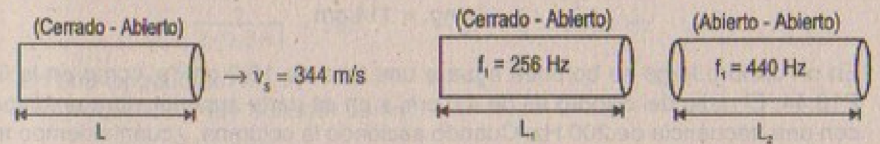
$$\frac{492}{410} = \frac{n+1}{n} \qquad \therefore \quad n = 5 \quad \text{n.° de nodos}$$

Luego: $\quad 410 = \dfrac{5}{2(2{,}00 \text{ m})} \times v_s \qquad \therefore \quad v_{\text{sonido en el aire}} = 328$ m/s

42. Un pedazo de tubo de cartón grueso, cerrado en un extremo, tiene exactamente la longitud adecuada para que cuando se corte en dos pedazos (desiguales), el pedazo con el extremo cerrado resuene a 256 Hz y el pedazo con ambos extremos abiertos resuene a 440 Hz. a) ¿Qué frecuencia resonante habría sido producida por el tubo de cartón original, y b) ¿qué longitud tenía el pedazo original?

Resolución :

Inicialmente: Finalmente:



Parte (a)

Sabemos que: $f_1 = 256 = \dfrac{1}{4L_1} \times (344) \quad \therefore \quad L_1 = 33{,}6$ cm

Además: $f_1 = 440 = \dfrac{1}{2L_2} \times (344) \quad \therefore \quad L_2 = 39{,}1$ cm

En consecuencia: $L = L_1 + L_2 = 39{,}1 + 33{,}6 = 72{,}7 <> 0{,}73$ m (parte b)

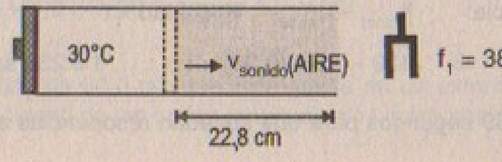
Por lo tanto: $f_{1(\text{tubo original})} = \dfrac{1}{4(0{,}73)} \times (344)$

$\therefore \quad f_{1(\text{tubo original})} = 117{,}8$ Hz

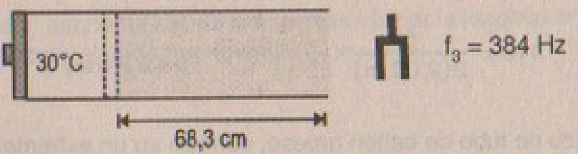
43. Un tubo de vidrio está abierto en un extremo y cerrado en el otro (mediante un émbolo móvil). El tubo se llena con aire a 30,0°C, y un diapasón de 384 Hz se sostiene en el extremo abierto. Se escucha la resonancia cuando el émbolo está a 22,8 cm del extremo abierto y cuando se encuentra a 68,3 cm de dicho extremo. a) Por estos datos ¿qué velocidad del sonido está implicada? b) ¿Dónde estaría el émbolo en la siguiente resonancia?

Resolución :
Parte (a)

Émbolo móvil
(a)



Émbolo móvil
(b)



De (a) $f_1 = \dfrac{1}{4(L)} \times v_s \Rightarrow 384 = \dfrac{1}{4(0{,}228)} \times v_s$

$\therefore\ v_{\text{sonido en el aire}}\ (30°C) = 350{,}00\ m/s$

Parte (b) $f_3 = \dfrac{5}{4\ \text{long.}} v_s \Rightarrow f_3 = 384 = \dfrac{5(350)}{4 \times \text{long.}}$

$\therefore$ Long. = 114 cm

44. En un cilindro largo se bombea agua a una tasa de 18,0 cm³/s, como en la figura P18.44. El radio del cilindro es de 4,0 cm, y en su parte superior vibra un diapasón con una frecuencia de 200 Hz. Cuando asciende la columna, ¿cuánto tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

44A. En un cilindro largo se bombea agua a una tasa R (cm³/s), como en la figura P18.44. El radio del cilindro es r (cm), y en su parte superior vibra un diapasón con una frecuencia f. Cuando asciende la columna, ¿cuánto tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

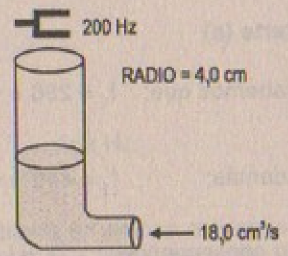


Figura P18.44

Resolución:
Radio = 4,0 cm
Considerar: v_s = 344 m/s

Sabemos que: $f_1 = 200 = \dfrac{1}{4L_{\text{inicial}}} \times v_s \quad \therefore \quad L_{\text{inicial}} = 0{,}43\ m$

Además: $f_2 = 200 = \dfrac{3}{4L_{\text{final}}} \times v_s \quad \therefore \quad L_{\text{final}} = 1{,}29\ m$

Luego:

Por continuidad: $A.v = \dfrac{Vol}{t}$

$\Rightarrow \pi(0{,}04)^2 \times v = 18 \quad \therefore \quad$ Velocidad = 0,36 cm/s

En consecuencia: $|L_{\text{final}} - L_{\text{inicial}}|$ = velocidad × t

$\Rightarrow 129 - 43 = (0{,}36) \times t \quad \therefore \quad t = 239$ segundos < > 4,00 min

Por lo tanto:
Transcurrirá 239 segundos para que sucedan resonancias sucesivas.

45. Un cuarto de baño mide 86 cm × 86 cm × 210 cm. Cuando usted canta en la regadera, ¿qué frecuencias sonarán con más riqueza (resonarán), suponiendo que la regadera actúa como un tubo cerrado en ambos extremos (nodos en ambos lados)? Suponga también que la voz humana varía entre 130 Hz y 2 000 Hz (no necesariamente la voz de una persona). Considere que la velocidad del sonido en la regadera caliente es de 355 m/s.

Resolución:
Datos: 130 Hz < f voz humana < 2 000 Hz ; v_{sonido} = 355 m/s
Volumen (cuarto de baño) = 86 cm × 86 cm × 210 cm

En una longitud de: 0,86 m
Las frecuencias que sonarán serán:

$f_n = \dfrac{n}{2(0{,}86)} \times 355 \quad \therefore \quad f_n = 206n\ Hz\ ;\ \forall\, n = 1; 2; 3...$

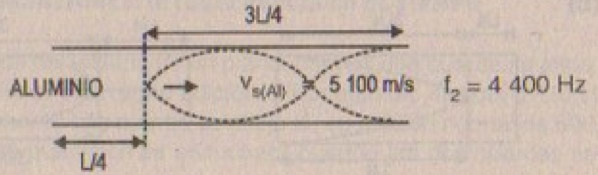
En una longitud de: 2,1 m
Las frecuencias que sonarán serán:

$f_n = \dfrac{n \times 355}{2(2{,}1)} \quad \therefore \quad f_n = n(84{,}5)\ Hz\ ;\ \forall\, n = 1; 2; 3...$

ONDAS ESTACIONARIAS EN BARRAS Y PLACAS

46. Una barra de aluminio se sujeta en un punto ubicado a un cuarto de su distancia desde un extremo y se establece una vibración longitudinal mediante una fuerza de excitación de frecuencia variable. La frecuencia más baja que produce resonancia es de 4 400 Hz. La velocidad del sonido en el aluminio es de 5 100 m/s. Determine la longitud de la barra.

Resolución:



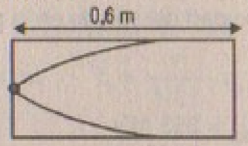
Sabemos que: $\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{3L}{4} \quad \therefore \quad \lambda = L$

$\Rightarrow f_2 = 4\,400 = \dfrac{v_s}{L}$

$\therefore$ Long (barra) $= \dfrac{4\,500}{4\,400} = 1{,}02\ m$

47. Una barra metálica de 60,0 cm que está sujeta en un extremo se golpea con un martillo. Si la velocidad de las ondas longitudinales (compresionales) en la barra es de 4 500 m/s, ¿cuál es la frecuencia más baja con la cual resonará la barra golpeada?

Resolución :



$\longrightarrow$ $v_s = 4\,500$ m/s

Sabemos que: $\dfrac{\lambda}{4} = 0{,}6 \Rightarrow \lambda = 2{,}4$ m

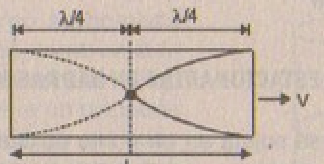
Luego: $f_1 = \dfrac{v_{sonido}}{\lambda} \Rightarrow f_1 = \dfrac{4\,500}{2{,}4}$

$\therefore \quad f_1 = 1{,}8$ kHz

48. Se mueven ondas longitudinales con una velocidad v en una barra de longitud L. Escriba una expresión para las frecuencias de las vibraciones longitudinales de una barra metálica que está a) sujeta en su centro, como se muestra en la figura 18.14a, y b) sujeta a un cuarto de la longitud de la barra a partir de un extremo, como se muestra en la figura 18.14b.

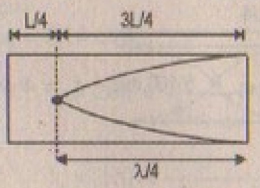
Resolución :

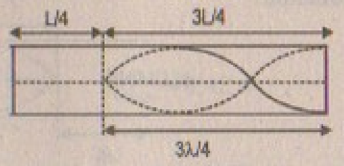
Parte (a)



Luego: $f_1 = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{2L} \Rightarrow f_2 = \dfrac{3}{2L} \cdot v \quad \therefore \; f_{n+1} = \dfrac{(2n+1)v}{2L}$ (caso general.)

Parte (b)





Entonces: $f_1 = \dfrac{v}{3L}$ $\qquad f_2 = \dfrac{v}{L} = \dfrac{3v}{3L}$

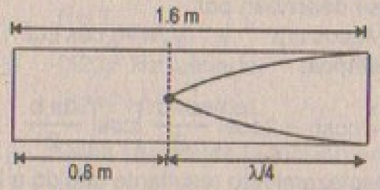
$\Rightarrow \quad f_3 = \dfrac{5v}{3L}$ $\qquad \therefore \quad f_{(n+1)} = (2n+1)\,\dfrac{v}{3L}$ (caso general)

49. Una barra de aluminio de 1,6 m de largo se sostiene en su centro. Se golpea con un paño cubierto de resina para generar vibraciones longitudinales en el modo fundamental. a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas establecidas en la barra? b) ¿Qué armónicos se generan en la barra sostenida de este modo? c) ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si la barra fuera de cobre?

Resolución :

Parte (a)

Barra de aluminio



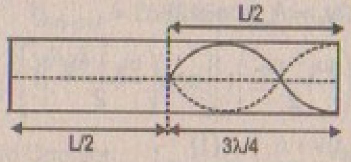
Considerar:

$\rightarrow \quad v_{sonido\,(Al)} = 5\,100$ m/s

Entonces: $\quad 0{,}8 = \dfrac{\lambda}{4} \quad \therefore \quad \lambda = 3{,}2$ m

Luego: $\quad f_1 = \dfrac{v_{s\,(Al)}}{\lambda} = \dfrac{5\,100}{3{,}2} \quad \therefore \quad f_1 = 1\,594$ Hz

Parte (b)



$\Rightarrow \quad f_2 = \dfrac{3}{2L} \cdot v_s$

$\therefore \quad f_{(n+1)} = (2n+1)\,\dfrac{v_s}{2L}$

En consecuencia

Se generan armónicos impares

Parte (c) $\quad f_1 = \dfrac{v_{sonido\,(cobre)}}{2\,\text{long.}_{(Barra)}} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \dfrac{3\,560}{2(1{,}6)} \quad \therefore \quad f_1 = 1{,}11$ kHz

PULSACIONES: INTERFERENCIA EN EL TIEMPO

50. En ciertos intervalos del teclado de un piano, más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar intensidad adicional. Por ejemplo, la nota a 110 Hz tiene dos cuerdas en este tono. Si una cuerda se afloja de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de pulsación se escuchará cuando las dos cuerdas se toquen simultáneamente?

Resolución :

Por dato: $\quad f_{(afinamiento)} = 110$ Hz

Como: $\quad f^2 \propto T_{cuerda}$

Entonces: cuando: $\quad T_{cuerda} = 600 \text{ N} \;\text{——}\; f^2_{inicial} = (110)^2$

$\Rightarrow \quad T_{cuerda} = 540 \text{ N} \;\text{——}\; f^2_{final} = x$

Aplicando una regla de tres simple:

Resulta que: $\quad f_{final} = 104{,}4$ Hz

Luego: $\quad f_{pulsación} = |f_{final} - f_{inicial}| = |110 - 104{,}4| = 5{,}6$ Hz

51. Dos ondas con igual amplitud pero con frecuencias ligeramente diferentes viajan en la misma dirección a través de un medio. En un punto determinado los desplazamientos independientes se describen por

$$y_1 = A_0\cos \omega_1 t \quad y \quad y_2 = A_0 \cos \omega_2 t$$

Use la identidad trigonométrica:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

para demostrar que el desplazamiento resultante debido a las dos ondas está dado por:

$$y = 2A_0\left[\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$$

Resolución:

Datos: $y_1 = A_0\cos(\omega_1 t)$ y $y_2 = A_0\cos(\omega_2 t)$

Por demostrar que: $y = 2A_0\left[\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$

Sabemos que: $y_1 = A_0\cos(\omega_1 t)$ ... (1)

$y_2 = A_0\cos(\omega_2 t)$ ... (2)

Entonces: sumando (1) y (2)

$$y_1 + y_2 = y = A_0[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

Recordando: $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Entonces: $y = A_0\left[2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$

Por lo tanto: $y_1 + y_2 = y = \left[2A_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$ l.q.q.d.

52. Mientras intenta afinar una nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha tres pulsaciones por segundo entre el oscilador y la cuerda. a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? b) ¿En qué porcentaje debe cambiarse la tensión en la cuerda para afinarla?

Resolución:

Por dato: $f_{(afinador)} = 523$ Hz

Además: $|f_{osc.} - f_{cuerda}| = 3$ Hz

Parte (a)

Según dato: $f_{afin} - f_{cuerda} = 3$ Hz ó $f_{cuerda} - f_{afin} = 3$ Hz

En consecuencia: $f_{cuerda} = 3 + 523$ ó $f_{cuerda} = 520$ Hz

Parte (b)

Sabemos que: $f^2 \alpha\, T_{cuerda}$

Entonces: $(523)^2$ Hz (afinada) ---- 100%

$(526)^2$ Hz (cuerda) ---- x $\therefore$ x = 101,15%

En consecuencia: Debe cambiarse la tensión en un 1,15%

53. Un estudiante sostiene un diapasón que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared a una velocidad constante de 1,33 m/s. a) ¿Qué frecuencia de pulsación observa entre el diapasón y su eco? b) ¿A qué velocidad debe alejarse de la pared caminando para observar una frecuencia de pulsación de 5 Hz?

Resolución:

Datos: $f_{diapasón} = 256$ Hz ; $v_{obs.} = 1,33$ m/s

$f_{puls.} = ?$

Parte (a)

Por efecto Doppler: $f_{obs} = f_{diap.}\left(\frac{c + v_{obs.}}{c - v_{diap.}}\right)$, donde: c = 344 m/s

$$\Rightarrow f_{obs} = 256\left[\frac{344+1,33}{344-1,33}\right] \quad \therefore \quad f_{obs.} = 257,98 \text{ Hz}$$

En consecuencia:

\# de pulsaciones entre el diapasón y su eco es: |257,98 − 256| = 1,99 Hz

Parte (b) $f_{diapasón} = 256$ Hz

Además: $|f_{obs.} - f_{diap}| = 5 \Rightarrow f_{obs.} = 261$ Hz ó $f_{obs.} = 251$ Hz

Como:

La frecuencia del eco del observador se aleja de la fuente (diapasón).

Entonces: (por efecto Doppler)

$$f_{obs.} = 251 = 256\left[\frac{c - V_{obs}}{c + V_{obs}}\right] \quad \text{donde } c = 344 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow 251c + 251\, v_{obs.} = 256c - 256\, v_{obs.}$$

$$\Rightarrow 507\, v_{obs.} = 5c = 5 \times 344$$

$$\therefore \quad v_{obs.} = 3,38 \text{ m/s}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

54. a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de una cuerda de piano de acero de $5,00 \times 10^{-3}$ kg y de 1,00 m de largo, bajo una tensión de 1 350 N? b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 1,00 m de largo, cerrado en el fondo y abierto en la parte superior?

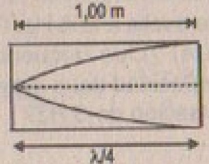
Resolución :

Parte (a) $M_{acero} = 5{,}00 \times 10^{-3}$ kg ; $T = 1\ 350$ N

$L_{acero} = 1{,}00$ m $f_1 = ?$

Entonces: $f_1 = \dfrac{1}{2\ (1{,}00)} \times \sqrt{\dfrac{1\ 350}{5{,}00 \times 10^{-3}} \times 1{,}00}$ $\therefore$ $f_1 = 260$ Hz

Parte (b)



Donde: $v_s = 344$ m/s

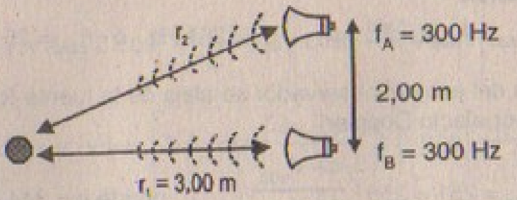
$\Rightarrow \dfrac{\lambda}{4} = 1{,}00 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4{,}00$ m

$\therefore \quad f_1 = \dfrac{v_s}{4\ (1{,}00)} = \dfrac{344}{4\ (1{,}00)} \qquad \therefore \quad f_1 = 86$ Hz

55. Dos altavoces se colocan sobre una pared a 2,00 m de distancia. Un escucha está parado enfrente de uno de los altavoces, a 3,00 m de la pared. Los altavoces se excitan por medio de un solo oscilador a una frecuencia de 300 Hz. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? b) ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador puede ajustarse de manera que el observador escuche el mínimo sonido?

Resolución :

Sea:



Considerar: $v_{sonido} = 343$ m/s

Parte (a)

Sabemos que por Pitágoras: $r_2 = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ m

Además: $|r_2 - r_1| = \Delta r = \dfrac{\lambda}{2\pi} . \phi$

Entonces: como $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{343}{300}$ $\therefore$ $\lambda = 1{,}143$ m

Por lo tanto: $|3{,}6 - 3{,}0| = \dfrac{1{,}143}{2(3{,}1416)} . \phi$ $\therefore$ $\phi = 3{,}330$ rad

Parte (b)

Nos dicen que: $|r_2 - r_1| = n\ \dfrac{\lambda}{2}$ para n = 1; 3; 5 ...

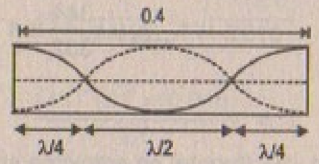
Entonces: $f(3) = \dfrac{2v_s}{3\lambda} = \dfrac{2(343)}{3\ (1{,}143)}$

$\therefore \quad f_3 = 200$ Hz (cercana a 300 Hz)

56. En una marimba, la barra de madera que reproduce un tono cuando se golpea vibra como una onda estacionaria transversal con tres antinodos y dos nodos. La nota de frecuencia más baja es de 87 Hz, producida por una barra de 40 cm de largo. a) Encuentre la velocidad de ondas transversales en la barra. b) La intensidad y duración del sonido emitido se incrementan por medio de un tubo resonante suspendido verticalmente debajo del centro de la barra. Si el tubo está abierto en el extremo superior únicamente y la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿qué longitud del tubo se requiere para resonar con la barra en el inciso a)?

Resolución :

Parte (a)

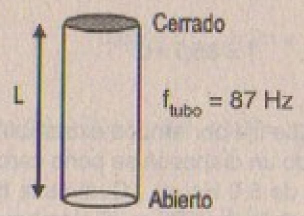


$\Rightarrow \dfrac{3\lambda}{4} = 0{,}4 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1{,}6}{3}$

Por dato: $f = 87 = \dfrac{v_{ondas}}{\lambda}$

$\Rightarrow \quad 87 = \dfrac{v_{ondas}}{\dfrac{1{,}6}{3}} \qquad \therefore \quad v_{ondas} = 46{,}4$ m/s

Parte (b)



Como: $v_{sonido} = \lambda f$

$\Rightarrow \quad 340 = 87\lambda$

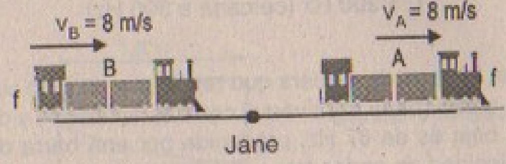
$\therefore \quad \lambda = 3{,}90$ m

Pero: $\dfrac{3\lambda}{4}$ = Longitud del tubo

$\therefore$ Longitud del tubo $= \dfrac{3}{4}\,(3{,}90) = 2{,}93$ m

57. Jane espera en un andén de ferrocarril, mientras dos trenes se aproximan desde la misma dirección a iguales velocidades de 8,0 m/s. Los dos trenes suenan sus silbatos (los cuales tienen la misma frecuencia), y un tren está a cierta distancia detrás del otro. Después de que el primer tren pasa frente a Jane, pero antes de que el segundo tren lo haga también, ella escucha pulsaciones de 4,0 Hz de frecuencia. ¿Cuál es la frecuencia de los silbatos de los trenes?

Resolución:



Por dato: $v_{sonido} = 344$ m/s

$$|f_{Jane/B} - f_{Jane/A}| = 4\ \frac{\text{Puls.}}{s} = 4 \text{ Hz}$$

Por efecto Doppler:
Cuando el tren «A» (fuente) se aleja del observador en reposo (Jane) entonces se cumple:

$$f_{Jane/A} = f\left(\frac{1}{1+\frac{V_A}{V_s}}\right) \quad \therefore \quad f_{Jane/A} = \frac{344}{352} \times f \ldots (1)$$

Por otro lado
Por efecto Doppler: cuando el tren «B» (fuente) se aproxima al observador en reposo (Jane), entonces se cumple:

$$f_{Jane/B} = f\left(\frac{1}{1-\frac{V_B}{V_s}}\right) \quad \therefore \quad f_{Jane/B} = \frac{344}{336} \times f \ldots (2)$$

Como: $|f_{Jane/B} - f_{Jane/A}| = 4 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{344}{336}f - \frac{344}{352}f\right| = 4$

$$\Rightarrow \frac{344 \times 16 \times f}{(336)(352)} = 4 \quad \therefore \quad f = 85,7 \text{ Hz}$$

58. Un alambre de 0,010 kg y 2,0 m de largo se fija por ambos extremos. Al principio la tensión en el alambre es de 200 N. Cuando un diapasón se pone cerca del alambre, se escucha una frecuencia de pulsación de 5,0 Hz. a) ¿Cuál es la frecuencia (frecuencias) del diapasón? b) ¿Cuál debe ser la tensión en el alambre para que desaparezca la pulsación?

Resolución:

Datos: $M_{alambre} = 0,010$ kg
$L_{alambre} = 2,0$ m

Parte (a) $T = 200$ N ; $f_{pulsación} = 5,0$ Hz ; $f_{diapasón} = ?$

Sabemos que: $|f_{diapasón} - f_{alambre}| = 5$ Hz ... (1)

Además: $f_{alambre} = \frac{1}{2(2,0)} \times \sqrt{\frac{200 \times (2,0)}{0,010}} \quad \therefore \quad f_{alambre} = 50$ Hz

De (1): $f_{diapasón} - 50 = 5$ Hz ó $50 - f_{diapasón} = 5$ Hz

En consecuencia: $f_{diapasón} = 55$ Hz ó $f_{diapasón} = 45$ Hz

Parte (b) $T = ?$; $f_{pulsación} = 0$

Si: $f_{diapasón} = 55 \text{ Hz} \Rightarrow f_{alambre} = 55$ Hz

Luego: $55 = \frac{1}{2(2,0)} \times \sqrt{\frac{T \times (2,0)}{0,010}} \quad \therefore \quad T = 242$ N

Por otro lado:
Si: $f_{diapasón} = 45 \text{ Hz} \Rightarrow f_{alambre} = 45$ Hz

Luego: $45 = \frac{1}{2(2,0)} \times \sqrt{\frac{T \times (2,0)}{0,010}}$

$$\Rightarrow \frac{(45)^2(4)^2 \times (0,010)}{2,0} = T \quad \therefore \quad T = 162 \text{ N}$$

59. Si se determina que dos frecuencias naturales adyacentes de un tubo de órgano son 0,55 kHz y 0,65 kHz, calcule la frecuencia fundamental y la longitud de este tubo. (Tome v = 340 m/s.)

Resolución:

Datos: $0,55 = f_{(n)} = 2n - 1 \times \frac{v_s}{4L}$ ... (1) Donde: $v_s = 340$ m/s

$0,65 = f_{(n+1)} = 2n + 1 \times \frac{v_s}{4L}$ ... (2)

Restando (2) – (1): $0,1 \times 10^3 = \frac{v_s}{4L}$ (2)

$$\Rightarrow \text{Long. tubo} = \frac{2(340)}{4(0,1) \times 10^3} = 1,7 \text{ m}$$

Luego: $f_1 = \frac{1}{4L} \times v_s \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{340}{4(1,70)}$

$\therefore \quad f_1 = 50$ Hz

60. Dos altavoces se montan en los extremos de una vara horizontal de 2,0 m y se hacen rotar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de manera tal que la vara efectúa una rotación completa cada 5,0 s. Un oyente está situado a más de medio metro del eje de rotación entre los altavoces, como se ilustra en la figura P18.60. Si los dos altavoces producen un tono Do menor de 262 Hz, ¿cuál es la frecuencia de pulsación escuchada por el oyente? Considere la velocidad del sonido igual a 343 m/s.

60A. Dos altavoces se montan en los extremos de una vara horizontal de longitud L y se hacen rotar alrededor de un eje vertical que pasa por su centro de manera tal que la vara efectúa una rotación completa cada t segundos. Un oyente está situado a más de $L/4$ del eje de rotación entre los altavoces, como se ilustra en la figura P18.60. Si los dos altavoces producen una frecuencia f, ¿cuál es la frecuencia de pulsación escuchada por el oyente? Considere la velocidad del sonido igual a v.

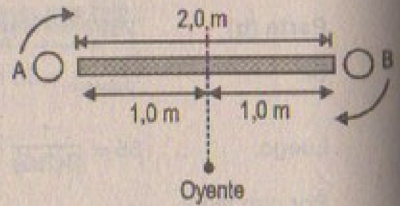


Figura P18.60

Resolución:

Datos: $v_{sonido} = 343$ m/s ; $f_1 = f_A = 262$ Hz

$T = 5,0$ s ; $f_B = f_1 = 262$ Hz

Por M.C.U. $\omega \times T = 2\pi \Rightarrow \omega(1,0) = v_f = \frac{2\pi}{5} \times (1,0)$

$\therefore \; v_f = 1,26$ m/s

Entonces:

Por efecto Doppler: $f_{obs.} = f_1 \left[\dfrac{1}{1-\dfrac{v_f}{v_s}}\right] \Rightarrow f_{obs.} = 262 \left[\dfrac{1}{1-\dfrac{1,26}{343}}\right]$

$\therefore \; f_{obs.} = 263$ Hz

En consecuencia: $f_{pulsación} = |f_{obs.} - f_{altavoz}|$

$\therefore \; f_{pulsación} = |263 - 262| = 1,00$ Hz

61. Una masa de 12 kg cuelga en equilibrio de una cuerda de longitud total $L = 5,0$ m y densidad de masa lineal $\mu = 0,0010$ kg/m. La cuerda pasa por dos poleas ligeras sin fricción que están separadas por una distancia d = 2,0 m (Fig. P18.61a). a) Determine la tensión en la cuerda. b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria mostrado en la figura P18.61b?

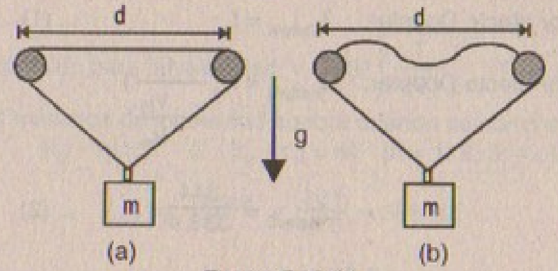


Figura P18.61

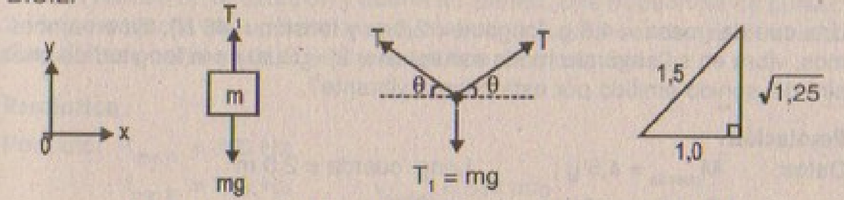
Resolución:

Datos: $m = 12$ kg; $L_{cuerda} = 5,0$ m ; $\mu_{cuerda} = 0,0010$ kg/m

$d = 2,00$ m

Parte (a)

D.C.L.



$T_1 = mg \Rightarrow T_1 = (12)(9,8) \quad \therefore \; T_1 = 117,6$ N

Entonces: $2T\text{sen}\theta - T_1 = 0 \quad \therefore \; T = \dfrac{117,6}{2(\sqrt{1,25})} \times 1,5$

$\therefore \; T_{cuerda} = 78,9$ N

Parte (b)

En la figura: el n.° de antinodos = 3 (onda estacionaria)

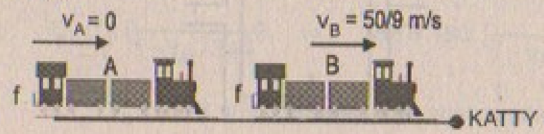
Entonces: $f_{(3)} = \dfrac{3}{2d} \times \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \Rightarrow f_3 = \dfrac{3}{2\,(2,0)} \times \sqrt{\dfrac{78,9}{0,0010}}$

$\therefore \; f_3 = 211$ Hz

62. Mientras espera que llegue Stan Speedy en el último tren de pasajeros, Kathy Kool advierte pulsaciones producidas por dos trenes que suenan simultáneamente sus silbatos. Un tren está en reposo y el otro se aproxima a ella a una velocidad de 20 km/h. Suponga que ambos silbatos tienen la misma frecuencia y que la velocidad del sonido es 344 m/s. Si Kathy escucha cuatro pulsaciones por segundo, ¿cuál es la frecuencia de los silbatos?

Resolución:

Sea:



Considerar: $v_{sonido} = 344$ m/s

Entonces: Por efecto Doppler: $f_{Katty/A} = f$ ... (1)

Además: Por efecto Doppler: $f_{Katty/B} = f\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{v_B}{v_s}}\right)$

$\therefore \quad f_{Katty/B} = \dfrac{344}{338,4} f$ ... (2)

Como: (por dato)

$$\left|\frac{344\,f}{338,4} - f\right| = 4\text{ Hz} \quad\Rightarrow\quad \frac{5,55f}{338,4} = 4$$

$\therefore \quad f$ = frecuencia de los silbatos = 243,6 Hz

63. Una cuerda (masa = 4,8 g, longitud = 2,0 m y tensión = 48 N), fija en ambos extremos, vibra en su segundo modo natural (n = 2). ¿Cuál es la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante?

Resolución:

Datos: $M_{cuerda} = 4,8$ g ; Long. cuerda = 2,0 m

Tensión = 48 N ; n = 2

$$f_2 = \frac{2}{2L}\times\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad\Rightarrow\quad f_2 = \frac{2}{2\,(2)}\times\sqrt{\frac{48\times 2}{4,8\times 10^{-3}}}$$

$\therefore \quad f_2 = 70,7$ Hz

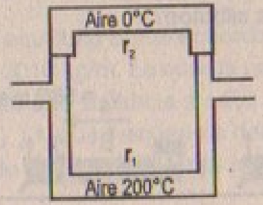
Luego: $v_{sonido} = f_2 \times \lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda = \dfrac{v_{sonido}}{f_2} = \dfrac{70,7}{344}$

$\therefore \quad \lambda_{onda} = 4,86$ m

64. En un arreglo similar al que se muestra en la figura 18.2, las trayectorias r_1 y r_2 miden cada una 1,75 m de longitud. La parte superior del tubo (correspondiente a r_2) se llena con aire a 0°C (273 K). El aire en la parte inferior se calienta rápidamente a 200°C (473 K). ¿Cuál es la frecuencia más baja del altavoz que producirá una intensidad máxima en el receptor? (Es posible que usted determine la velocidad del sonido en el aire en diferentes temperaturas usando la expresión v = $331(T/273)^{1/2}$ m/s, donde *T* está en K.)

Resolución:

$r_1 = r_2 = 1,75$ m



Usando la expresión para la velocidad: $v = 331\left[\dfrac{T}{273}\right]^{1/2}$ (T en Kelvin)

Se esperarán máximos de intensidad sonora cuando se cumpla que:

$|r_2 - r_1| = 0$ ó $|r_2 - r_1| = n\lambda$ (n = 1; 2; 3; 4...)

Entonces: $f_{(0°C)} = \dfrac{v_{sonido}}{\lambda} = \dfrac{331}{1,75} = 189$ Hz

$f_{(200°C)} = \dfrac{v_{sonido}}{\lambda} = \dfrac{479,5}{1,75} = 274$ Hz

En consecuencia:

La frecuencia más baja será: 231,5 Hz

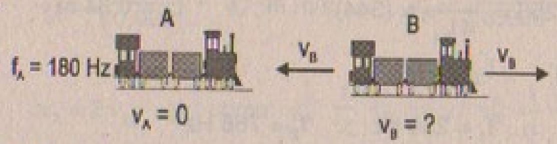
65. Los silbatos de dos trenes tienen frecuencias idénticas de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y suena su silbato, una frecuencia de pulsación de 2 Hz se escucha de un tren en movimiento. ¿Cuáles son las dos velocidades y direcciones posibles que puede tener el tren en movimiento?

Resolución:

Por dato: $f_{tren\ A} = 180$ Hz

$f_{tren\ B} = 180$ Hz $\quad v_{sonido} = 344$ m/s

Además:



$|f_B - 180| = 2 \quad \therefore \quad f_B = 182$ Hz ó $f_B = 178$ Hz

Casos:

Si el tren «B» se aleja del tren «A» entonces se considera $f_B = 178$ Hz, entonces por efecto Doppler:

$$f_B = f_A\left[\frac{1}{1+\dfrac{v_B}{v_s}}\right] \quad\Rightarrow\quad 178 = 180\left[\frac{1}{1+v_B/344}\right]$$

$\therefore \quad v_B = 3,87$ m/s (velocidad de alejamiento)

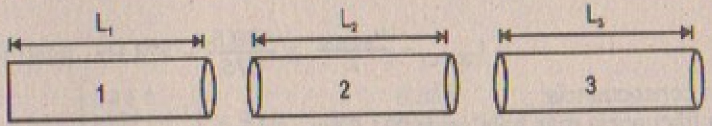
Si el tren «B» se acerca al tren «A», entonces se considera $f_B = 182$ Hz. Luego por efecto Doppler:

$$f_B = f_A\left[\frac{1}{1-v_B/344}\right] \quad\Rightarrow\quad 182 = 180\left[\frac{1}{1-v_B/344}\right]$$

$\therefore \quad v_B = 3,78$ m/s (velocidad de acercamiento)

66. En un acorde mayor sobre la escala musical de tonos físicos, las frecuencias están en las proporciones 4:5:6:8. Un conjunto de tubos, cerrados en un extremo, se cortan de manera que cuando suenen en su modo fundamental, lo harán de manera diferente al del acorde mayor. a) ¿Cuál es la proporción de las longitudes de los tubos? b) ¿Qué longitud de tubos se necesita si la frecuencia más baja del acorde es 256 Hz? c) ¿Cuáles son las frecuencias de este acorde?

Resolución :



Parte (a)

En el tubo 1: $f_1 = \dfrac{1}{4L_1} \times v_s$ $\quad \therefore \quad \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1}{2}$

En el tubo 2: $f_1 = \dfrac{1}{2L_2'} \times v_s$

Parte (b)

Si $f_1 = 256$ Hz

Entonces: $256 = \dfrac{1}{4L_1} \times (344) \quad \therefore \quad L_1 = 0{,}34$ m

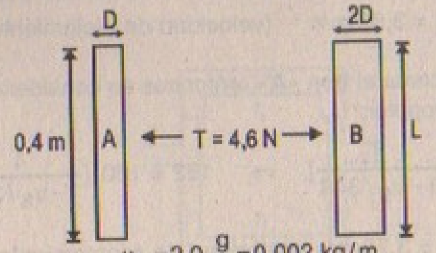
En consecuencia: $L_2 = 0{,}68$ m

Parte (c) $f_1 = 256$ Hz ; $f_2 = 768$ Hz

Para el otro tubo: $f_1 = 256$ Hz ; $f_2 = 512$ Hz

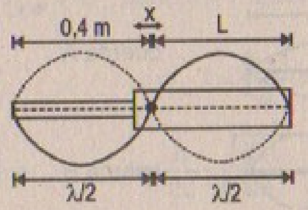
67. Dos alambres se sueldan entre sí. Son del mismo material, pero uno tiene el doble de diámetro que el otro. Se someten a una tensión de 4,6 N. El alambre delgado tiene una longitud de 40 cm y una densidad de masa lineal de 2,0 g/m. La combinación se fija en ambos extremos y se hace vibrar de manera tal que se presentan dos antinodos con el nodo central ubicado a la derecha de la unión. a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración? b) ¿Cuál es la longitud del alambre grueso?

Resolución :



$\mu_A = 2{,}0\ \dfrac{g}{m} = 0{,}002$ kg/m

Parte (a)



$0{,}4 - x = 0{,}2 + x$

$\therefore \quad x = 0{,}1$ m

Sabemos que: $\rho_A = \rho_B = \dfrac{M_A}{Vol_A} = \dfrac{M_B}{Vol_B}$

$$\Rightarrow \quad M_B = \frac{M_A \times Vol_B}{Vol_A} = \frac{(0{,}002)(0{,}4)\times(L_B)(\pi).D^2}{(0{,}4)(\pi)(0{,}5D)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{M_B}{L_B} = \mu_B = 0{,}008 \text{ kg/m}$$

como $\mu_B > \mu_A$ entonces la longitud de «B» es menor que la longitud de «A».
Luego:

$$v_A = \sqrt{\frac{4{,}6}{0{,}002}} = 47{,}96 \text{ m/s} \quad y \quad v_B = \sqrt{\frac{4{,}6}{0{,}008}} = 23{,}98 \text{ m/s}$$

Como: $v_A = 2\,v_B$ y como: $v_A^2\ \dfrac{1}{\alpha}\ L_A \Rightarrow v_B^2\ \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{L_A}{2} = L_B$

En consecuencia: Longitud de B $= \dfrac{0{,}4}{2} = 0{,}2$ m

Por lo tanto: $f_{total} = f_{1A} + f_{1B} = \dfrac{1}{(0{,}4+0{,}2)} \times \sqrt{\dfrac{(4{,}6)\,(0{,}4+0{,}2)}{(0{,}002)(0{,}4)+(0{,}008)(0{,}2)}}$

$\therefore \quad f_{\text{total de vibración}} = 56{,}5$ Hz

Parte (b)

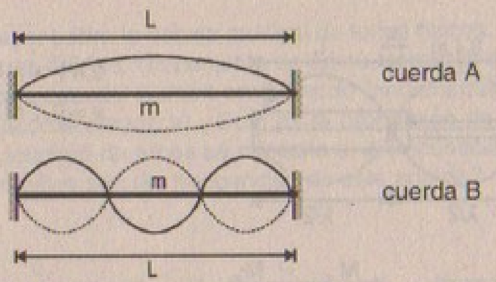
La longitud del alambre grueso (B) $= \dfrac{\text{Longitud de A}}{2} = \dfrac{0{,}4}{2}$

$\therefore \quad$ Long B = 0,2 m <> 20,00 cm

68. Dos cuerdas idénticas, cada una fija en ambos extremos, se arreglan una cerca de la otra. Si la cuerda normal A empieza a oscilar en su modo fundamental, se observa que la cuerda B empezará a vibrar en su tercer modo natural ($n = 3$). Determine la proporción entre la tensión de la cuerda B y la tensión de la cuerda A.

Resolución :

Sea:



Entonces: $f_A = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{m}\times L} \Rightarrow \frac{f_A^2\times 4L^2\times m}{L} = T_A$ ... (1)

Por otro lado: $f_B = \frac{3}{2L}\times\sqrt{\frac{T_B\times L}{m}} \Rightarrow \frac{f_B^2\times 4L^2\times m}{9\times L} = T_B$ ... (2)

Dividiendo (2) por (1): $\frac{T_B}{T_A} = \dfrac{\frac{f_B^2\times 4L^2\times m}{9L}}{\frac{f_A^2\times 4L^2\times m}{L}}$; pero: $f_B = f_A$

$$\therefore \quad \frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{9}$$

69. Con un vibrador de frecuencia variable se genera en una cuerda una onda estacionaria de longitud y tensión variables. Cuando el vibrador tiene una frecuencia *f* en una cuerda de longitud *L* y tensión *F* hay *n* antinodos formados en la cuerda. a) Si se duplica la longitud de la cuerda, ¿en qué factor debe cambiar la frecuencia para obtener el mismo número de antinodos? b) Si la frecuencia y la longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá *n* + 1 antinodos? c) Si la frecuencia se triplica y la longitud se reduce a la mitad, ¿en qué factor debe cambiarse la tensión para obtener el doble de antinodos?

Resolución :

Datos: cuando: f ; L ; F ; hay «n» antinodos en la cuerda.

$$\Rightarrow \quad f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{F}{m}\times L}$$

Parte (a)

Para: $L_{final} = 2L$; n antinodos ; $f_{final} = ?$ $\quad\therefore\quad m_f = 2\,m$

Luego: $f_{final} = \frac{n}{2(2L)}\times\sqrt{\frac{F}{2m}\times(2L)} \quad\therefore\quad f_{final} = \frac{1}{2}\times f = 0{,}5\,f$

Parte (b) $T_{final} = ?$; para: n + 1 antinodos y para: f, L

$$\Rightarrow \quad f = \frac{n+1}{2L}\times\sqrt{\frac{T_{final}\times L}{m}}$$

Sabemos que: $f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{T.L}{m}}$

Entonces: $\frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T} = \frac{n+1}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T_{final}}$

$$\Rightarrow \quad n\sqrt{T} = (n+1)\sqrt{T_{final}} \quad\therefore\quad T_{final} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times T$$

Parte (c)

Si: $f_{final} = 3\,f$; $L_{final} = \frac{L}{2}$; $T_{final} = ?$; $n_{final} = 2n$

$$\Rightarrow \quad f_{final} = \frac{2n}{2\left(\frac{L}{2}\right)}\times\sqrt{\frac{T_{final}\times L}{2m}} = 3\,f \quad ...\ (1)$$

Pero: $f = \frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{T\times L}{m}}$ ... (2)

Entonces: (2) en (1)

$$3\left[\frac{n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\sqrt{T}\right] = \frac{4n}{2L}\times\sqrt{\frac{L}{m}}\times\frac{\sqrt{T_{Final}}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 9T = \frac{16}{2}\times T_{final} \quad\therefore\quad T_{final} = \frac{9}{8}\,T$$

Capítulo 19

TEMPERATURA

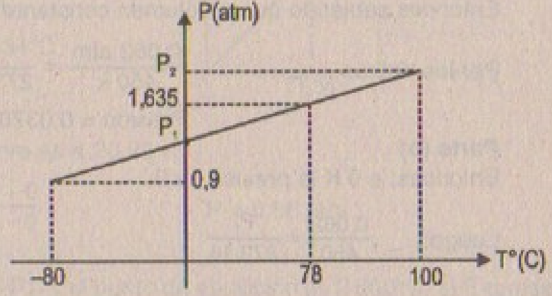
EL TERMÓMETRO DE GAS A VOLUMEN CONSTANTE Y LA ESCALA KELVIN

(*Nota:* Una presión de 1,00 atm = 1,01 × 10^5 Pa = 101 kPa)

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (que es dióxido de carbono en estado sólido y tiene una temperatura de –80,0°C) y en el punto de ebullición del alcohol etílico (78,0°C). Las dos presiones son 0,900 atm y 1,635 atm. a) ¿Qué valor de cero absoluto produce la calibración? ¿Cuál es la presión en a) el punto de congelación del agua, y b) el punto de ebullición del agua?

Resolución :

Parte (a)



De la gráfica de la recta:

$$\frac{0,9-0}{-80-T}=\frac{1,635-0,9}{78+80}$$

$\therefore$ T°C = –273,5 = 0,00 K

Parte (b)

En el punto de congelación: $\dfrac{P_1-0,9}{80}=\dfrac{1,635-0,9}{78+80}$ $\quad\therefore\quad P_1 = 1,27$ atm

En el punto de ebullición: $\dfrac{P_2-1,635}{100-78}=\dfrac{1,635-0,9}{78+80}$ $\quad\therefore\quad P_2 = 1,74$ atm

2. Suponga que la temperatura (en kelvin) y la presión en un termómetro de gas ideal se relacionan por medio de una ecuación *cuadrática*, $T = aP^2 + bP$. Si la temperatura y presión en el punto triple del agua son T_3 y P_3, respectivamente, y si la temperatura y la presión en el punto de ebullición del agua son T_B y P_B, respectivamente, determine a y b en función de T_3, P_3, T_B y P_B.

Resolución :

Sabemos que: T = aP^2 + bP (formando trinomio cuadrado perfecto)

$$\Rightarrow\quad T=a\left[P+\frac{bP}{2a}\right]^2-\frac{(bP)^2}{4a}\qquad\Rightarrow\quad T=aP^2\left[1+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2}{4a}P^2$$

$$\Rightarrow \quad T = P^2\left[a\left(\frac{2a+b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right] \qquad \Rightarrow \quad T = P^2\left[\frac{(2a+b-b)(2a+b+b)}{4a}\right]$$

$$\therefore \quad T = P^2\,(a+b)$$

Si $T = T_3 \quad \Rightarrow \quad P = P_3$

Si $T = T_B \quad \Rightarrow \quad P = P_B$

Luego: $T_3 = P_3^2\ (a+b)$ ... (1)

$T_B = P_B^2\ (a+b)$ ... (2) Desarrollando $T_3 \cdot P_B^2 = T_B \cdot P_3^2$

En consecuencia: $a + b = T_3 + T_B / P_3^2 + P_B^2$

3. Un termómetro de gas a volumen constante registra una presión de 0,062 atm cuando está a una temperatura de 450 K. a) ¿Cuál es la presión en el punto triple del agua? b) ¿Cuál es la temperatura cuando el valor de la presión es 0,015 atm?

Resolución :

Sabemos que en punto triple del agua: T = 273,16 K

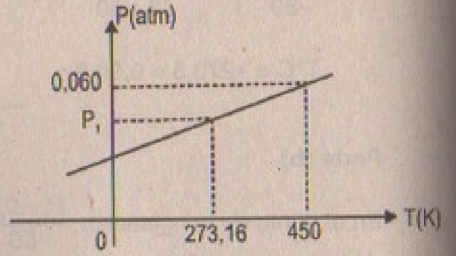
Entonces sabiendo que a volumen constante se cumple que:

Por los datos: $\dfrac{0{,}062 \text{ atm}}{450 \text{ k}} = \dfrac{P}{273{,}16 \text{ K}}$

$\therefore$ Presión = 0,0376 atm

Parte (b)

Entonces: a 0 K la presión es 0.



Luego: $\dfrac{0{,}062}{450} = \dfrac{P_1}{273{,}16}$

$\therefore \quad P_1 = 0{,}0376 \text{ atm} \equiv 30{,}4$ mmhg

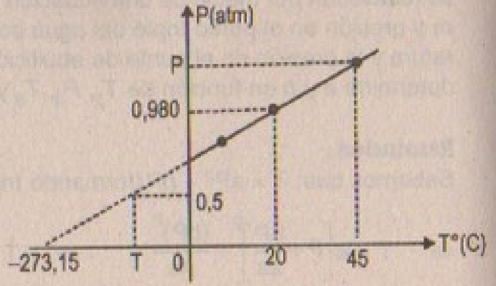
Por otro lado: $\dfrac{0{,}062}{450} = \dfrac{0{,}015}{T}$

$\therefore \quad T = 108$ K

4. En un termómetro de gas a volumen constante, la presión a 20°C es 0,980 atm. a) ¿Cuál es la presión a 45°C? b) ¿Cuál es la temperatura si la presión es 0,500 atm?

Resolución :

Parte (a)



Sabemos que:

$$\frac{P}{45+273{,}15} = \frac{0{,}980}{20+273{,}15}$$

$\therefore \quad P = 1{,}064$ atm

Parte (b) $\dfrac{1{,}064-0{,}980}{45-20} = \dfrac{0{,}980-0{,}5}{20-T}$

$\therefore \quad T = -123°$ C

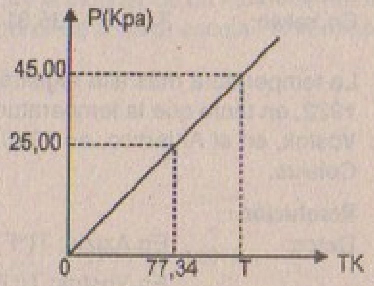
5. Un termómetro de gas a volumen constante se llena con helio. Cuando se sumerge en nitrógeno líquido hirviendo (77,34 K), la presión absoluta es de 25,00 kPa. a) ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius y kelvin cuando la presión es de 45,00 kPa? b) ¿Cuál es la presión cuando el termómetro se sumerge en hidrógeno líquido hirviendo?

Resolución :

Parte (a)

De la relación: $\dfrac{25{,}00-0}{77{,}34-0} = \dfrac{45{,}00-0}{T-0}$

$\therefore \quad T = 139{,}2$ K



Entonces en grados celsius será:

$T°C = 139{,}2 - 273{,}15 = -134°C$

Parte (b)

Cuando el líquido hidrógeno hierve es a 20,28 K.

Entonces: $\dfrac{P-0}{20{,}28} = \dfrac{25{,}00-0}{77{,}34-0} \qquad \therefore \quad P = 6{,}56$ kPa

6. El punto de fusión del oro es 1 064°C y el punto de ebullición es 2 660°C. a) Exprese estas temperaturas en kelvin. b) Calcule la diferencia entre estas temperaturas en grados Celsius y en kelvin.

Resolución :

Datos: Punto de fusión del oro = 1 064°C

Punto de ebullición del oro = 2 660°C

Parte (a) Punto de fusión en kelvin = 1 064° + 273 = 1 337 K

Punto de ebullición en kelvin = 2 660 + 273 = 2 933 K

Parte (b)

Pto. de ebullición – Pto. fusión (en Celsius) = 2 660°C – 1 064°C

$\therefore \quad \Delta T°C = 1\,596°C$

Pto. de ebullición – Pto. de fusión (en kelvin):

2 933 K – 1 337 K = 1 596 K

$\therefore \quad \Delta T\ K = 1\,596$ K

7. El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de −195,81°C a presión atmosférica. Exprese esta temperatura en a) grados Fahrenheit, y b) kelvin.

Resolución :
Datos: puntos de ebullicjón (nitrógeno) = −195,81°C

Parte (a)

$$F = \frac{5C}{9} + 32$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{9}{5}(-195{,}81) + 32 \qquad \therefore \quad F = \text{temperatura en Fahrenheit} = +322{,}0°F$$

Parte (b)
En kelvin: $T(K) = -195{,}81 + 273{,}15 \quad \therefore \quad T(K) = 77{,}30\ K$

8. La temperatura más alta registrada sobre la Tierra es de 136°F, en Azizia, Libia, en 1922, en tanto que la temperatura más baja registrada es de −127°F, en la estación Vostok, en el Antártico, en 1960. Exprese estas temperaturas extremas en grados Celsius.

Resolución :
Datos: En Azizia: T(°F) = 136°F
En Vostok: T(°F) = −127°F

En Azizia: $T°(C) = \frac{5}{9}[(136) - 32] = 57{,}8°C$

En Vostok: $T°(C) = \frac{5}{9}[(-127) - 32] = 88{,}3°C$

9. El oxígeno se condensa en un líquido a aproximadamente 90 K. ¿A qué temperatura, en grados Fahrenheit, corresponde este valor?

Resolución :
Datos: condensación del oxígeno = 90 K

De la conversión: $T(K) = °C + 273{,}15$

$$\Rightarrow \quad 90\ K = °C + 273{,}15 \qquad \therefore \quad T(°C) = -183{,}15°C$$

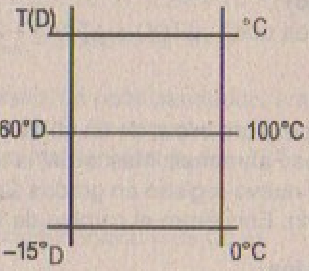
Luego a Fahrenheit:

Sabemos que: $T(°F) = \frac{9}{5}(°C) + 32 \quad \Rightarrow \quad T(°F) = \frac{9}{5}(-183{,}15) + 32$

$$\therefore \quad T(°F) = -297{,}67°F$$

10. En una escala de temperatura desconocida, el punto de congelación del agua es −15°D y el punto de ebullición es +60°D. Obtenga una ecuación de conversión *lineal* entre esta escala de temperatura y la escala Celsius.

Resolución :



Por Thales:

$$\frac{T(D) - 60}{60 + 15} = \frac{C - 100}{100}$$

$$\Rightarrow \quad T(D) - 60 = \frac{75}{100}(C - 100)$$

$$\therefore \quad T(D) = \frac{3}{4}°C - 15$$

11. Una diferencia de temperatura entre el interior y el exterior de un motor de automóvil es de 450°C. Exprese esa diferencia de temperatura en la a) escala Fahrenheit, y b) la escala kelvin.

Resolución :

Sabemos que: $\Delta T°C = \frac{5}{9}\Delta T°F$

$$\Rightarrow \quad 450°C = \frac{5}{9}\Delta T°F \qquad \therefore \quad \Delta T(°F) = 810°F$$

Parte (b) $\Delta T°C = \Delta T(K) - 273{,}15 \quad \Rightarrow \quad 450°C = \Delta T\ (K) - 273{,}15$

$$\therefore \quad \Delta T\ (K) = 723{,}15\ K$$

12. La temperatura normal del cuerpo humano es 98,6°F. Una persona con fiebre puede registrar 102°F. Expresa estas temperaturas en grados Celsius.

Resolución :

Datos: Temperatura del cuerpo humano = 98,6°F
Fiebre de una persona = 102°F

Sabemos que: $T(°F) = \frac{9}{5}C + 32 \quad \Rightarrow \quad 102°F = \frac{9}{5}°C + 32$

$$\therefore \quad T(C°) = 38{,}9°C$$

13. Una sustancia se calienta de −12°F a 150°F. ¿Cuál es su cambio en temperatura en a) la escala Celsius, y b) la escala kelvin?

Resolución :
Datos: $T_{inicial}\ (°F) = -12°F$
$T_{final}\ (°F) = 150°F$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta T(°C) = \frac{5}{9}\Delta T(°F) \quad \Rightarrow \quad (150 + 12)\frac{5}{9} = \Delta T\ (°C)$

$$\therefore \quad \Delta T(°C) = 90°C$$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta T(K) = \Delta T(°C) + 273 \quad \Rightarrow \quad \Delta T(K) = 90°C + 273$

$\therefore \quad \Delta T(K) = 363\ K$

14. La temperatura inicial de un objeto tiene el mismo valor numérico en grados Celsius y grados Fahrenheit. Más tarde, la temperatura cambia, de modo que el valor numérico del nuevo registro en grados Celsius es un tercio tan grande o tan pequeño que en kelvin. Encuentre el cambio de la temperatura en kelvin.

Resolución :

Datos: $T_{final}(°C) = \frac{1}{3}T_{final}(K)$

si $T_{final}(K) = x \Rightarrow T_{final}(°C) = x - 273 = \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow \quad x - \frac{1}{3}x = 273 \qquad \therefore \quad x = 409{,}5\ K$

Luego el cambio de la temperatura en kelvin será: 409,5 K

15. ¿A qué temperatura son iguales las lecturas de un termómetro Fahrenheit y de uno Celsius?

Resolución :

Si $T°(C) = x$ y $T(°F) = x$

Entonces: (por la conversión) $T(°F) = \frac{9}{5}(°C) + 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{5}(x) + 32$

$\therefore \quad x = -40$

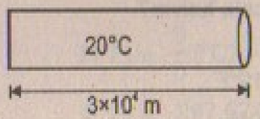
En consecuencia: a – 40°C es equivalente un termómetro en grados Fahrenheit.

EXPANSIÓN TÉRMICA DE SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

metros

16. Un tubo de aluminio mide 30 000 de largo a 20,0°C. ¿Cuál es su longitud a a) 100,0°C y b) 0,0°C?

Resolución :



$\alpha_{Alum.} = 24 \times 10^{-6}\ C^{°-1}$

Parte (a)

$L_f = ? \qquad T_f = 100°C$

Sabemos que: $L_f = L_0(1 + \alpha\,\Delta T) \quad \Rightarrow \quad L_f = 3 \times 10^4\,(1 + 24 \times 10^{-6}\,(80))$

$\therefore \quad L_{final} = 3{,}006 \times 10^4\ m$

Parte (b)

$L_f = ? \qquad T_f = 0°C$

$\Rightarrow \quad L_f = L_0(1 + \alpha\,\Delta T) \quad \Rightarrow \quad L_f = 3 \times 10^4\,[1 + 24 \times 10^{-6}\,(-20)]$

$\therefore \quad L_{final} = 2{,}998 \times 10^4\ m$

17. Un alambre telefónico de cobre está amarrado, un poco pandeado, entre dos postes que están a 35,0 m de distancia. Durante un día de verano con $T_C = 35{,}0°C$, ¿qué longitud es más largo el alambre que en un día de invierno con $T_C = -20{,}0°C$?

Resolución :

Datos: $\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; Longitud inicial = 35,00 m

con $T_C = 35°C \qquad \Delta L_1 = 35\,(17 \times 10^{-6})(35)$

$\therefore \quad \Delta L_1 = 0{,}0208\ m = 2{,}08\ cm$

Con $T_0 = -20°C \qquad \Delta L_2 = L \cdot \alpha_{cobre}\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta L_2 = (35)(17 \times 10^{-6})(20)$

$\therefore \quad \Delta L_2 = 0{,}0119\ m = 1{,}19\ cm$

En consecuencia: $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 2{,}08\ cm + 1{,}19\ cm = 3{,}27\ cm$

18. Una acera de concreto se vacía un día en que la temperatura es de 20°C de modo tal que los extremos no tienen posibilidad de moverse. a) ¿Cuál es el esfuerzo en el cemento en un día caluroso a 50°C? b) ¿Se fractura el concreto? Considere el módulo de Young para el concreto igual a $7{,}0 \times 10^9\ N/m^2$ y la resistencia a la tensión como $2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$.

Resolución :

Datos: $Y_{concreto} = 7{,}0 \times 10^9\ N/m^2$

$S_{tensión(20°C)} = 2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$

$a_{concreto} = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ = α

Parte (a)

Sabemos que: $\text{Esfuerzo} = Y\frac{\Delta L}{L}$ ... (1)

Por otro lado: $\frac{\Delta L}{L} = \alpha_{concreto} \cdot \Delta T = (12 \times 10^{-6})(50 - 20)$

Reemplazando en (1)

Resulta que: $\text{Esfuerzo} = (7{,}0 \times 10^9\ N/m^2)(12 \times 10^{-6})(30)$

$\therefore \quad \text{Esfuerzo} = 2{,}52 \times 10^6\ N/m^2$

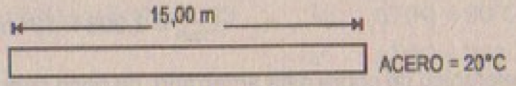
Parte (b)

Como la resistencia a la tensión = $2{,}0 \times 10^9\ N/m^2$, entonces no se fractura el concreto, debido a que el esfuerzo es menor.

19. Una viga de acero estructural mide 15,0 m de largo cuando se monta a 20,0°C. ¿Cuánto cambia esta longitud en las temperaturas externas de –30,0°C a 50,0°C?

Resolución :

Datos:



$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

A $T_f = -30°C$; $L_f = ?$

Entonces: $L_f = 15(1 + 11 \times 10^{-6}\,(-30 - 20))$

$\therefore$ $L_{final\,(-30°C)} = 14{,}99175$ m

Por otro lado: A $T_f = 50°C$; $L_f = ?$

Entonces: $L_f = 15[1 + 11 \times 10^{-6}\,(50 - 20)]$

$\therefore$ $L_{final\,(50°C)} = 15{,}00495$ m

Finalmente:

A $-30°C$ la longitud final ha cambiado en: $15 - 14{,}99175 = 0{,}00825$ m

A $50°C$ la longitud final ha cambiado en: $15{,}00495 - 15 = 0{,}00495$ m

En total ha cambiado: $0{,}00825 + 0{,}00495 = 0{,}00132$ m <> 1,32 cm

20. El puente de New Riber George en Virginia Occidental es un arco de acero de 518 m de largo. ¿Cuánto cambia esta longitud entre temperaturas extremas de $-20{,}0°C$ y $35{,}0°C$?

Resolución :

Datos: Long. (arco de acero) = 518 m

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

$T_{inicial} = 20°C$

a $T_{final} = -20°C$; $L_{final} = ?$

Entonces: $L_{final} = L_o\,(1 + \alpha\Delta T)$ $\Rightarrow$ $L_{final} = (518\text{ m})[1 - (11 \times 10^{-6})(40)]$

$\therefore$ $L_{final}\,(-20°C) = 517{,}77208$ m

Por otro lado: A $T_{final} = 35°C$ $L_{final} = ?$

Entonces: $L_{final} = L_o\,(1 + \alpha\,\Delta T)$ $\Rightarrow L_{final} = (518\text{ m})\,[1 + 11 \times 10^{-6}\,(35 - 20)]$

$\therefore$ $L_{final}\,(35°C) = 518{,}08547$ m

En consecuencia:

A $(-20°C)$: La longitud ha cambiado en: $518 - 517{,}77208 = 0{,}22792$ m

A $(35°C)$: La longitud ha cambiado en: $518{,}08547 - 518 = 0{,}08547$ m

21. El coeficiente promedio de expansión volumétrica del tetracloruro de carbono es $5{,}81 \times 10^{-4}\,(°C)^{-1}$. Si un recipiente de acero de 50,0 gal se llena completamente con

tetracloruro de carbono cuando la temperatura es de 10,0°C, ¿cuánto se derramará cuando la temperatura ascienda a 30,0°C?

Resolución :

Datos: $\beta = 5{,}81 \times 10^{-4}\,°C^{-1}$ (tetracloruro de carbono); $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

Volumen inicial = 50,0 gal. ; $T_{inicial} = 10°C$

En primer lugar hallamos el ΔV del tetracloruro de carbono: a $T_{final} = 30°C$

$\Delta V = V\beta\Delta T$ $\Rightarrow$ $\Delta V = (50{,}00)(5{,}81 \times 10^{-4})(30 - 10)$

$\therefore$ $\Delta V = 0{,}581$ gal

Luego hallamos el "ΔV" del recipiente de acero a $T_{final} = 30°C$.

Entonces: $\Delta V_{acero} = V_{inicial}\,(3\alpha)(\Delta T)$ $\Rightarrow$ $\Delta V = (50{,}00)(3)(11 \times 10^{-6})(20)$

$\therefore$ $\Delta V_{acero} = 0{,}033$ gal.

En consecuencia:

Se derramará la diferencia; es decir:

$$\Delta V_{total} = (0{,}581) - (0{,}033) = 0{,}548 \text{ gal.}$$

22. Una barra de acero se somete a una fuerza de estiramiento de 500 N. Su área de sección transversal es de 2,00 cm². Encuentre el cambio en la temperatura que alargaría la barra en la misma cantidad que lo hace la fuerza de 500 N. (*Sugerencia*: Consúltense las tablas 12.1 y 19.2).

Resolución :

Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$; $Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²

$F_{estir.} = 500$ N ; Área transversal = 2,00 cm²

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\Delta T$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\Delta T$ ... (1)

Por otro lado: $\dfrac{F}{A} = Y.\dfrac{\Delta L}{L}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{AY}$ ... (2)

Igualando: (2) = (1)

Resulta que: $\dfrac{F}{AY} = \alpha\Delta T$ $\therefore$ $\Delta T = \dfrac{F}{AY\alpha}$

Reemplazando datos:

$$\Delta T = \frac{500\text{N}}{(20\times10^{10})(11\times10^{-6})(2\times10^{-4})} \quad \therefore \quad \Delta T = 1{,}136°C$$

23. Una barra de acero de 4,0 cm de diámetro se calienta de modo que su temperatura aumenta en 70°C, y después se fija entre dos soportes rígidos. Se deja que la barra se enfríe hasta su temperatura original. Suponiendo que el módulo de Young para el acero es $20{,}6 \times 10^{10}$ N/m² y que su coeficiente promedio de expansión lineal es $11 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$, calcule la tensión en la barra.

Resolución :

Datos: $Y_{acero} = 20{,}6 \times 10^{10}$ N/m² ; $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$T_{final} = T_{inicial} + 70°C$; Tensión = ?

Sabemos que diámetro de la barra = 4,0 cm

Entonces: Área transversal $= \frac{\pi}{4}(4{,}0)^2 = 12{,}6\ cm^2 \equiv 12{,}6 \times 10^{-4}\ m^2$

Por otro lado: $\Delta L = L\alpha\,\Delta T \Rightarrow \Delta L/L = \alpha\Delta T$ ... (1)

Además: $\frac{T}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L/L = T/AY$ ... (2)

Igualando: $\frac{T}{AY} = \alpha\Delta T \Rightarrow T = A\,Y\alpha\Delta T$

Reemplazando:

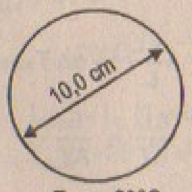
Tensión $= (12{,}6 \times 10^{-4})\,.\,(20{,}6 \times 10^{10})\,(11 \times 10^{-6})(T_{inicial} + 70°C - T_{inicial})$

$\therefore$ Tensión = 200 kN

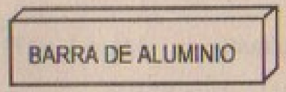
24. Un anillo de latón de 10,0 cm de diámetro a 20,0°C se calienta y se hace deslizar sobre una barra de aluminio de 10,01 cm a 20,0°C. Suponiendo que los coeficientes promedio de expansión lineal son constantes, a) ¿a qué temperatura debe enfriarse esta combinación para separarla? ¿Esto puede lograrse? b) ¿Qué ocurre si la barra de aluminio tuviera 10,02 cm de diámetro?

Resolución :

Anillo de latón



$T_{inicial} = 20°C$



Diámetro de aluminio = 10,01 cm

$T_{inicial} = 20°C$

Considerar: $\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$; $\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Tenemos que: Long. barra – Long. anillo = Long. anillo . $\alpha_{Al}\,(T - 20°)$

$\Rightarrow \pi\,(10{,}01 - 10{,}00) = \pi(10{,}00)\,24 \times 10^{-6}\,(T - 20)$

$\therefore T_{final} = 61{,}7°C$

Entonces si a 61,7°C el anillo de latón se desliza sobre la barra de aluminio, en consecuencia a –61,7°C ambos se separarán.

Parte (b)

Si la barra de aluminio tuviera más diámetro la temperatura de deslizamiento del anillo sobre la barra se incrementaría, en consecuencia la temperatura de enfriamiento para separarlas sería más negativa.

25. Las secciones de concreto de cierta autopista se diseñan para tener una longitud de 25 m. Las secciones se vacían y fraguan a 10°C. ¿Qué espaciamiento mínimo debe dejar el ingeniero entre las secciones para eliminar el pandeo si el concreto va a alcanzar una temperatura de 50°C?

Resolución :

Datos: $\alpha_{concreto} = 12 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $T_{inicial} = 10°C$

$L_{inicial} = 25{,}00$ m ; $T_{final} = 50°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T \Rightarrow \Delta L = (25{,}00)(50 - 10)(12 \times 10^{-6})$

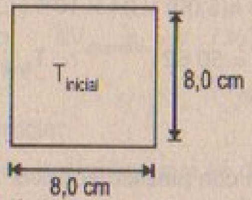
$\therefore \Delta L = 0{,}012$ m

Por lo tanto: Se debe dejar como mínimo 1,2 cm entre las dos secciones.

26. Un hoyo cuadrado de 8,0 cm de cada lado se corta en una lámina de cobre. Calcule el cambio en el área de este hoyo si la temperatura de la lámina aumenta en 50 K.

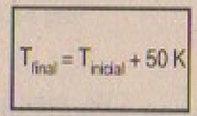
Resolución :

Inicialmente



Finalmente

LÁMINA DE COBRE



$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Sabemos que: $A_{inicial} = (8{,}0)^2 = 64\ cm^2 \equiv 64 \times 10^{-4}\ m^2$

Entonces: Δ Área $= A_{inicial}\,(2\alpha)(\Delta T)$

$\Rightarrow \Delta$ Área $= (64 \times 10^{-4})(2 \times 17 \times 10^{-6})(T_{inicial} + 50\ K - T_{inicial})$

$\Rightarrow \Delta$ Área $= (64 \times 10^{-4})(34 \times 10^{-6})(50\ K)\,\frac{100°C}{373\ K}$

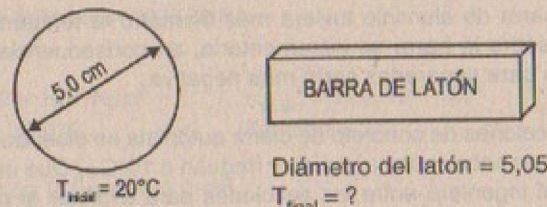
$\therefore \Delta$ Área $= |+0{,}092\ cm^2| = 0{,}092\ cm^2$

27. A 20°C, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5,000 cm, y una barra de latón tiene un diámetro de 5,050 cm. a) ¿Hasta qué temperatura debe calentarse el anillo de modo que se deslice apenas sobre la barra? b) ¿A qué temperatura deben calentarse ambos de manera que el anillo apenas se deslice sobre la barra? ¿El último proceso funcionaría?

Resolución :

Parte (a)

Anillo de aluminio



$T_{inicial} = 20°C$

Diámetro del latón = 5,05 cm

$T_{final} = ?$

Considerar: $\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$$\text{Long. del latón} - \text{Long. anillo} = \text{Long. anillo} \times \alpha_{Al}\,[T_{final} - 20°C]$$

$$\Rightarrow \quad \pi\,(5{,}05\ \text{cm} - 5{,}00) = \pi(5{,}00\ \text{cm})\,(24 \times 10^{-6})[T_{final} - 20]$$

$$\therefore \quad T_{final} = 437°C$$

Parte (b)

$$\Delta_{barra\ de\ latón} = L_{barra\ de\ latón} \times \alpha_{latón}\ (T - 20°C)$$

$$\Delta_{anillo\ de\ Al} = \Delta_{barra\ de\ latón} = L_{inicial\ anillo} \times \alpha_{Al}\ (T - 437°C)$$

$$\pi\,(5{,}05) \times 19 \times 10^{-6}\ (T - 20) = \pi(5{,}00) \times 24 \times 10^{-6}\ (T - 437)$$

$$\Rightarrow \quad 24{,}05T = 50\ 521 \qquad \therefore\ T_{final} = 2\ 100°C$$

No funcionará

28. Las armazones para anteojos se fabrican con plástico epóxico. A temperatura ambiente (suponga 20,0°C), las armazones tienen hoyos para lentes circulares de 2,2 cm de radio. ¿A qué temperatura deben calentarse las armazones para insertar lentes de 2,21 cm de radio? El coeficiente promedio de expansión lineal del material epóxico es $1{,}3 \times 10^{-4}\ (°C)^{-1}$.

Resolución :

Datos: $T_{inicial} = 20°C$ $\qquad \alpha_{epóxico} = 1{,}3 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$T_{final} = ?$ $\qquad R_{armazones} = 2{,}20$ cm

$R_{lentes} = 2{,}21$ cm

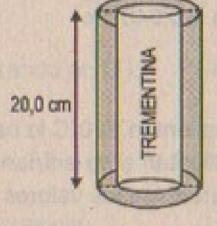
Por condición: $\pi(2{,}21 - 2{,}20)(2{,}21 + 2{,}20) = \pi(2{,}20)^2(2\alpha)(\Delta T)$

$$\Rightarrow \quad (0{,}01)(4{,}41) = (2{,}20)^2(2)(1{,}3 \times 10^{-4})(T_{final} - 20)$$

$$\therefore \quad T_{final} = 55°C$$

29. Un cilindro hueco de aluminio de 20,0 cm de fondo tiene una capacidad interna de 2,000 L a 20,0°C. Está lleno completamente con trementina, y luego se calienta hasta 80,0°C. a) ¿Qué cantidad de trementina se derrama? b) Si ésta se enfría después hasta 20,0°C, ¿a qué distancia debajo de la superficie del borde del cilindro estará la superficie de la trementina?

Resolución :



$\alpha_{cilindro\ hueco} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$V_{interno}\ (20°C) = 2{,}000$ L (trementina)

$\beta_{trementina} = 9 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$T_{final} = 80°C$

$T_{inicial} = 20°C$

Parte (a)

$$\Delta V_{trementina} = V\beta\Delta T = (2 \times 10^3\ \text{cm}^3)(9 \times 10^{-4})(80 - 20)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{trementina} = 108\ \text{cm}^3$$

Por otro lado: $\Delta V_{aluminio} = V\,.\,(3\alpha)(\Delta T) = (2 \times 10^3)(3)(24 \times 10^{-6})(80 - 20)$

$$\therefore \quad \Delta V_{aluminio} = 8{,}64\ \text{cm}^3$$

En consecuencia:

La cantidad de trementina que se derramará será: $\Delta V_{trementina} - \Delta V_{aluminio}$

$$\therefore \quad \Delta V_{(que\ se\ derrama)} = 108 - 8{,}64 = 99{,}4\ \text{cm}^3$$

Parte (b):

Sabemos que: $V_{final\ aluminio} = 2\ 000 + 8{,}64 = 2\ 008{,}64\ \text{cm}^3$

Entonces cuando se enfría:

$$\Delta V_{aluminio} = -(2\ 008{,}64)(3)(24 \times 10^{-6})\ (60) = -8{,}6773248\ \text{cm}^3$$

Entonces: $V_{final\ aluminio} = 2\ 008{,}64 - 8{,}6773248 = 1\ 999{,}962675\ \text{cm}^3$

Además: $V_{final\ trementina} = 2\ 008{,}64\ \text{cm}^3$

Entonces cuando se enfría:

$$\Delta V_{trementina} = -(2\ 008{,}64)(9 \times 10^{-4})(60) = -108{,}46656\ \text{cm}^2$$

Entonces: $V_{final\ trementina} = 1\ 900{,}17344\ cm^3$

Luego; considerando constante la altura del cilindro, entonces:

$$A_{final} = 99{,}99813375\ cm^2\ ; \qquad h_{final\ trementina} = 19{,}056\ cm$$

En consecuencia:

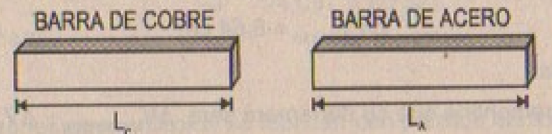
$$\Delta h_{(trementina)} = 20 - 19{,}056 = 0{,}943\ cm$$

30. Una barra de cobre y una barra de acero se calientan. A 0°C la barra de cobre tiene una longitud de L_C. Cuando las barras se calientan o se enfrían, se mantiene una diferencia de 5,0 cm entre sus longitudes. Determine los valores de L_C y L_A.

30A. Una barra de cobre y una barra de acero se calientan. A T(°C) la barra de cobre tiene una longitud de L_C y la de acero una longitud de L_A. Cuando las barras se calientan o se enfrían se mantiene una diferencia de ΔL entre sus longitudes. Determine los valores de L_C y L_A.

Resolución :

Datos:



$T_{inicial} = 0°C \qquad T_{inicial} = 0°C$

$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1} \qquad \alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Por razonamiento: Inicialmente: $|L_C - L_A| = 5{,}00\ cm$ ... (1)

Finalmente cuando se calientan o se enfrían a la misma temperatura resulta que:

$$|L_{final\ C} - L_{final\ A}| = 5{,}00\ cm$$

Entonces: sabemos que:

$$L_{final\ cobre} = L_C\,(1 + \alpha_C\,\Delta T)$$

$$(-) \qquad L_{final\ acero} = L_A\,(1 + \alpha_A\,\Delta T)$$

$$\Rightarrow \quad L_{final\ cobre} - L_{final\ acero} = L_C - L_A + \Delta T\,(L_C\,\alpha_C - L_A\,\alpha_A)$$

$$\Rightarrow \quad 5{,}00\ cm = 5{,}00\ cm + \Delta T\,(L_C\,\alpha_C - L_A\,\alpha_A)$$

$$\Rightarrow \quad L_C\,\alpha_C = L_A \cdot \alpha_A$$

Reemplazando: $L_C\,(17 \times 10^{-6}) = L_A\,(11 \times 10^{-6})$

$$\therefore \quad L_C = \frac{11}{17}\,L_A$$

Reemplazando en (1): $\quad |L_A \times \frac{11}{17} - L_A| = 5{,}00\ cm$

$$\therefore \quad \text{Long. acero} = 14{,}2\ cm$$

En consecuencia: $\quad \text{Long. cobre} = \frac{11}{17}\,(14{,}2) = 9{,}2\ cm$

31. El tanque de combustible de un automóvil se llena hasta el tope con 45 L de gasolina a 10°C. Inmediatamente después, el vehículo se estaciona en un sitio donde el sol cae de lleno y la temperatura es de 35°C. ¿Cuánto se derrama de gasolina del tanque como consecuencia de la expansión? (Ignore la expansión del tanque).

Resolución :

Datos:

Volumen inicial = 45 L

$T_{inicial} = 10°C$

$T_{final} = 35°C$

$\beta_{gasolina} = 9{,}6 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

$$\Delta V_{gasolina} = V_{inicial}\,\beta\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_{gasolina} = (45{,}00\ L)(9{,}6 \times 10^{-4})(35° - 10°)$$

$$\therefore \quad \Delta V_{gasolina} = 1{,}08\ L$$

32. Un matraz volumétrico de vidrio hecho de Pirex se calibra a 20,0°C. Se llena hasta la marca de 100 mL con acetona a 35,0°C. a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando ésta se enfría a 20,0°C? b) ¿Qué tan significativo es el cambio de volumen del matraz?

Resolución :

$T_{inicial} = 20°C$ (matraz)
$V_{inicial} = 100$ mL (acetona)
$T_{inicial} = 35°C$ (acetona)
$\alpha_{vidrio} = 3,2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$
$\beta_{acetona} = 1,5 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta V = V\beta\Delta T$

$\Rightarrow \quad V_{final} = V\,(1 + \beta\,\Delta T)$

$\Rightarrow \quad V_{final\ de\ la\ acetona} = 100\ \text{mL}\ (1 - 1,5 \times 10^{-4}\ (35 - 20))$

$\therefore \quad V_{final\ (acetona)} = 99,775$ mL

Por otro lado: $V_{final\ (matraz)} = V_{inicial}\ (3\ \alpha_{vidrio})(35 - 20)$

$\Rightarrow \quad V_{final} = 100\ \text{mL}\ [(3)(3,2 \times 10^{-6})(20) + 1]$

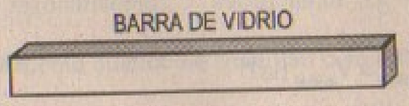
$\therefore \quad V_{final\ (matraz)} = 100,0192$ mL

Parte (b)

Como el volumen final del matraz es: 100,0192 mL esto quiere decir que el $\Delta V = 100,0192 - 100,00 = 0,0192$ mL es una cantidad bastante despreciable.

33. El elemento activo de cierto láser está hecho de una barra de vidrio de 30,0 cm de largo por 1,5 cm de diámetro. Si la temperatura de la barra aumenta en 65°C, encuentre el aumento en a) su longitud, b) su diámetro y c) su volumen. (Considere $\alpha = 9,0 \times 10^{-6}\ (°C)^{-1}$).

Resolución :



Long. Inicial barra = 0,3 m
Diametro de la barra = 1,5 cm
$\Delta T = 65°C$
$\alpha_{vidrio} = 9 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

Sabemos que: $\Delta L = L\alpha\Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta L = (0,3\ \text{m})(9 \times 10^{-6})(65°C)$

$\therefore \quad \Delta L_{(barra)} = 175,5 \times 10^{-6}\ \text{m} \equiv 0,01755\ \text{cm} \equiv 0,176\ \text{mm}$

Parte (b)

Sabemos que: $\Delta A = A(2\alpha)\Delta T$

$\Rightarrow \quad A_{final} = A\,(2\alpha\,\Delta T + 1)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{4}\ (\text{diámetro})^2 = \dfrac{\pi}{4}(\text{diámetro inicial})^2(1 + 2(9 \times 10^{-6})(65°)]$

$\therefore$ Diámetro final = 1,5008772 cm = 15,008772 mm

En consecuencia:

Δ diámetro = 1,5008772 − 1,5000 = 0,0008772 cm ≡ 8,78 μm

Parte (c)

$\Delta V = V\beta\Delta T = V(3\alpha)(\Delta T)$

$\Rightarrow \quad \Delta V = \dfrac{(30)}{4}\ (\pi)(1,5)^2\ [3\ (9 \times 10^{-6})(65°)$

$\therefore \quad \Delta V_{(barra)} = 0,093\ \text{cm}^3 \equiv 93$ mm

DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE UN GAS IDEAL

34. Un gas ideal se mantiene en un recipiente a volumen constante. Al principio, su temperatura es de 10,0°C y su presión de 2,50 atm. ¿Cuál es la presión cuando la temperatura es de 80,0°C?

Resolución :

Datos: V = constante
$T_{inicial} = 10°C$; $T_{final} = 80,0°C$
$P_{inicial} = 2,50$ atm ; $P_{final} = ?$

Sabemos que: $\dfrac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{nR}{V}$ ... (1)

Además: $\dfrac{P_{final}}{T_{final}} = \dfrac{nR}{V}$ ... (2)

Como (2) = (1) $\Rightarrow \quad \dfrac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{P_{final}}{T_{final}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2,50\ \text{atm}}{(10+273)\text{K}} = \dfrac{P_{final}}{(80+273)\text{K}} \quad \therefore \quad P_{final} = 3,12$ atm

35. Un globo lleno de helio tiene un volumen de 1,00 m³. A medida que asciende por la atmósfera de la Tierra su volumen se expande. ¿Cuál es su nuevo volumen (en metros cúbicos) si su temperatura y presión originales son 20,0°C y 1,00 atm, y su temperatura y presión finales son −40,0°C y 0,10 atm?

Resolución :

Datos: $V_{inicial} = 1,00\ \text{m}^3$; $V_{final} = ?$
$T_{inicial} = 20°C$; $T_{final} = -40°C$
$P_{inicial} = 1,00$ atm ; $P_{final} = 0,10$ atm

Entonces decimos que: $\dfrac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1{,}00\ \text{atm})(1{,}00\ \text{m}^3)}{(20+273)\text{K}} = \frac{(0{,}10)\text{atm} \times V_{final}}{(-40+273)\ \text{K}}$$

$$\therefore \quad V_{final} = 7{,}95\ \text{m}^3$$

36. Un auditorio tiene dimensiones de 10,0 m × 20,0 m × 30,0 m. ¿Cuántas moléculas de aire se necesitan para llenar el auditorio a 20°C y 101 kPa de presión?

Resolución:

Datos: $V = (10{,}0\ \text{m}) \times (20{,}0\ \text{m}) \times (30{,}0\ \text{m}) = 6 \times 10^3\ \text{m}^3$

$P = 101\ \text{kPa}$; $T = 20°\text{C}$; $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$

$n = ?$; $R = 8{,}31\ \text{J/mol.K}$

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad \frac{(101\times10^3\ \text{N/m}^2)(6{,}00\times10^3\ \text{m}^3)}{(20+273)(8{,}31\ \text{N.m/mol.K})} = n$$

$$\therefore \quad n = 2{,}5 \times 10^5\ \text{moles}$$

En consecuencia:

$$\text{n.° moléculas} = n \times N_A = (2{,}5 \times 10^5)(6{,}023 \times 10^{23}) = 15 \times 10^{28}\ \text{moléculas}$$

37. Un tanque lleno de oxígeno (O_2) contiene 12,0 kg de oxígeno bajo una presión manométrica de 40,0 atm. Determine la masa del oxígeno que se ha extraído del tanque cuando la lectura de presión es de 25,0 atm. Suponga que la temperatura del tanque permanece constante.

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{atm} + P_{man} = 1{,}00\ \text{atm} + 40{,}00\ \text{atm} = 41{,}00\ \text{atm}$

$P_{final} = P_{atm} + P_{man} = 1{,}00\ \text{atm} + 25{,}00\ \text{atm} = 26{,}00\ \text{atm}$

$M_{O_2\ inicial} = 12{,}00\ \text{kg}$

$T_{inicial} = T_{final}$

Sabemos que: $n_{moles} = \dfrac{12\times10^3\ \text{g}}{32\ \text{g/mol}}$ $\quad \therefore \quad n_{moles\ inicial} = 375$

Entonces: En 375 moles —— 41,00 atm

x moles —— 26,00 atm

$$\therefore \quad x_{moles} = \frac{375\times26}{41{,}00}$$

En consecuencia: $M_{O_2} = (32\ \text{g/mol})\ (375 \times 26/41{,}00)\ \text{mol} = 7{,}609\ \text{kg}$

Luego se ha extraído = 12,00 kg − 7,609 kg = 4,39 kg

38. Con un medidor de presión de las llantas de un automóvil se llena una llanta a una presión manométrica de 32 lb/pulg² en una mañana fría, cuando la temperatura es de −10°C. ¿Cuál sería la lectura de presión de la llanta cuando ésta se caliente hasta 35°C?

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{atm} + P_{man} = 1\ \text{atm} + 32\ \text{lb/pulg}^2$

$P_{inicial} = -10°\text{C} <> 263\ \text{K}$

$T_{final} = 35\ °\text{C} <> 308\ \text{K}$

$P_{final} = ?$

Sabemos que: $P_{man} = 32\ \dfrac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \times \dfrac{0{,}445\ \text{kg}}{1\ \text{lb}} \times \dfrac{1\ \text{pulg}^2}{(2{,}54)^2 \times 10^{-4}\text{m}^2} \times (9{,}8)\ \text{m/s}^2$

$$\therefore \quad P_{man} = 21{,}63 \times 10^4\ \text{N/m}^2 \equiv 2{,}16 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Pero: $1\ \text{atm} <> 101 \times 10^3\ \text{Pa} \Rightarrow 1\ \text{Pa} = \dfrac{1}{101} \times 10^{-3}\ \text{atm}$

Luego: $P_{manométrica} = 1\ \text{atm} + 2{,}14\ \text{atm} = 3{,}14\ \text{atm}$

Por otro lado:

Por dilatación: a mayor temperatura mayor volumen $\therefore$ menor presión

Entonces: si: 263 K —— 3,14 atm

308 K —— x atm (Regla de tres inverso)

$$\therefore \quad x = \frac{263\times3{,}14}{308} = 2{,}68\ \text{atm}$$

39. La masa de un globo aerostático y su cargamento (sin incluir el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior está a 10,0°C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m³. ¿A qué temperatura debe calentarse el aire en el globo antes de que éste empiece a ascender? (La densidad del aire a 10,0°C es de 1,25 kg/m³).

Resolución:

Datos: $M_{globo\ (sin\ aire)} = 200\ \text{kg}$; Volumen del globo = 400 m³

$T_{aire\ exterior} = 10°\text{C}$; $\rho_{aire}\ (10°\text{C}) = 1{,}25\ \text{kg/m}^3$

$P_{aire\ exterior} = (10°\text{C}) = 101\ \text{kPa}$; $T_{final} = ?$

Sabemos que Volumen final = $400\ \text{m}^3 = \dfrac{M_{total}}{\rho_{aire}} = \dfrac{M_{total}}{1{,}25}$

$$\therefore \quad M_{total} = 500\ \text{kg} \Rightarrow M_{aire} = 300\ \text{kg}$$

Luego: Volumen inicial $= \dfrac{M_{aire}}{\rho_{aire}} = \dfrac{300}{1{,}25} = 240 \text{ m}^3$

Entonces:

Por el principio de los gases: $\dfrac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{V_{final}}{T_{final}}$

Entonces: $\dfrac{240 \text{ m}^3}{(10+273)\text{K}} = \dfrac{400 \text{ m}^3}{T_{final}} \Rightarrow T_{final} = \dfrac{(400)\,(283)}{240}$

$\therefore \quad T_{final} = 472 \text{ K}$

40. Un tanque que tiene un volumen de 0,10 m³ contiene gas helio a 150 atm. ¿Cuántos globos puede inflar el tanque si cada globo lleno es una esfera de 0,30 m de diámetro a una presión absoluta de 1,2 atm?

Resolución:

Datos: Volumen del tanque = 0,10 m³ ; $P_{gas\ hielo} = 150$ atm
Diámetro de cada globo = 0,30 m; $P_{abs\ c/g} = 1{,}2$ atm
n.° de globos = ?

Volumen de cada globo $= \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{0{,}3}{2}\right)^3$

$\therefore$ Volumen de cada globo = 0,0141 m³

Por otro lado:

$P_{vol.\ tanque} \times V_{tanque} = \#\, n \times \text{Vol./globo} \times nP_{abs/globo}$ (ley de Dalton)

$\Rightarrow \quad (150 \text{ atm})(0{,}10) \text{ m}^3 = n^2 \times (0{,}0141 \text{ m}^3)(1{,}2 \text{ atm})$

$\therefore \quad n^2 = \dfrac{(150)(0{,}10)}{(0{,}0141)(1{,}2)} = \sqrt{884}$ globos $\approx$ 30 globos

41. Un cuarto de 80,0 m³ de volumen contiene aire cuya masa molar promedio es de 29,0 g/mol. Si la temperatura del cuarto se eleva de 18,0°C a 25°C, ¿qué masa de aire (en kg) saldrá del cuarto? Suponga que la presión del aire en el cuarto se mantiene en 101 kPa.

41A. Un cuarto de volumen *V* contiene aire cuya masa molar promedio es *M*. Si la temperatura del cuarto se eleva de T_1 a T_2, ¿qué masa de aire (en kg) saldrá del cuarto? Suponga que la presión del aire en el cuarto se mantiene en P_0.

Resolución:

Datos: Volumen del cuarto = 80,00 m³
$M_{prom.aire} = 29{,}0$ g/mol ; R = 8,31 J/mol.K
$T_{inicial} = 18°\text{C}$; $T_{final} = 25°\text{C}$
$P_{constante} = 101$ kPa

Inicialmente: $P \times V_{inicial} = \dfrac{m_{aire\ inicial}}{M} \times R \times T_{inicial}$

$\Rightarrow \quad m_{aire\ inicial} = \dfrac{PVM}{RT_{inicial}} = \dfrac{(101\times10^3 \text{ N/m}^2)(80 \text{ m}^3)(29{,}0\times10^{-3} \text{ kg/mol})}{(8{,}31 \text{ J/mol.K})(18+273)}$

$\therefore \quad m_{aire\ inicial} = 96{,}89$ kg

Finalmente: $P \times V_{final} = \dfrac{m_{aire\ final}}{M} \times R \times T_{final}$

$\Rightarrow \quad M_{aire\ final} = \dfrac{P \times V \times M}{R \times T_{final}} = \dfrac{(101\times10^3 \text{N/m}^2)(80 \text{m}^3)(29\times10^{-3} \text{ kg/mol})}{(8{,}31 \text{J/mol.K})\,(25+273)}$

$\therefore \quad M_{aire\ final} = 94{,}62$ kg

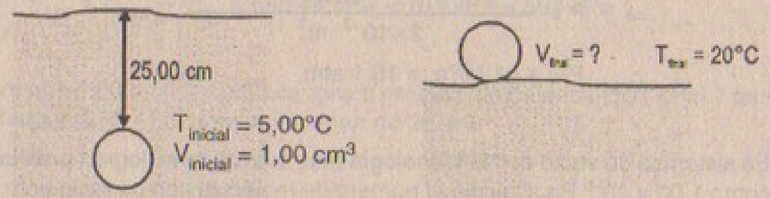
En consecuencia:
La cantidad de masa de aire que saldrá será: 96,89 – 94,62 = 2,28 kg

42. A 25,0 m debajo de la superficie del mar (densidad = 1 025 kg/m³), donde la temperatura es 5,00°C, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de 1,00 cm³. Si la temperatura de la superficie del mar es igual a 20,0°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de que se rompa en la superficie?

42A. A una profundidad *h* debajo de la superficie del mar (densidad = ρ), donde la temperatura es T_c, un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen V_0. Si la temperatura de la superficie del mar es T_h, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de que se rompa en la superficie?

Resolución:

Al inicio: Al final



$\rho_{agua\ de\ mar\ (5°C)} = 1\,025 \text{ kg/m}^3$

Sabemos que a 25,00 m de profundidad la presión = $P_{atm} + \rho gh$

Entonces: $P_{total} = 101 \text{ kPa} + (1\,025)(9{,}8)(25) = 352{,}1 \text{ kPa}$

Además en la superficie la presión = $P_{atm} = 101$ kPa

Luego:

Por la ley de los gases: PV = nRT

Entonces: $$\frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(352{,}1 \times N/m^2)(10^{-6} m^3)}{278 K} = \frac{(101\ kN/m^2)(V_{final})}{293\ K}$$

$$\therefore \quad V_{final} = \frac{(352{,}1\ kPa)(10)^{-6}(293\ K)}{(101\ kPa)(278\ K)} <> 3{,}67\ cm^3$$

43. Si 9,0 g de agua se ponen dentro de una olla de presión de 2,0 L y se calientan hasta 500°C, ¿cuál es la presión dentro del recipiente?

Resolución:

Datos: Masa de agua = 9,0 g
Volumen de la olla = 2,0 L <> $2 \times 10^3\ cm^3$ <> $2 \times 10^{-3}\ m^3$
T = 500°C <> 773 K ; R = 8,31 J/mol.K
P = ?

Sabemos que: PV = nRT

Por otro lado: M_{H_2O} = 18 g/mol

Entonces: $$PV = \frac{m_{H_2O}}{M} RT$$

$$\Rightarrow \quad P\,(2 \times 10^{-3}\ m^3) = \frac{9{,}0\ g}{18\ g/mol} \times (8{,}31\ J/mol.K)(773\ K)$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{(0{,}5\ mol)\left(8{,}31\ \frac{N.m}{mol.K}\right)(773 K)}{2 \times 10^{-3}\ m^3}$$

$$\therefore \quad P = 1{,}61\ MPa \equiv 16{,}1\ atm$$

44. En sistemas de vacío con la tecnología más avanzada se logran presiones tan bajas como $1{,}00 \times 10^{-9}$ Pa. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1,00 m³ a esta presión si la temperatura es de 27°C.

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00 \times 10^{-9}\ N/m^2$
Volumen = 1,00 m³ ; $N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$
T = 27°C ≡ 300 K ; R = 8,31 J/mol.K
$N_{moléculas}$ = ?

Aplicando: PV = nRT $\Rightarrow$ $$PV = \frac{N_{moléculas}}{N_A} \times R\,.\,T$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00 \times 10^{-9})\,(1{,}00) = \frac{N_{moleculas}}{6{,}023 \times 10^{23}} \times (8{,}31)(300\ K)$$

$$\therefore \quad N_{moléculas} = 2{,}416 \times 10^{11}\ \text{moléculas}$$

45. La llanta de una bicicleta se llena con aire a una presión manométrica de 550 kPa y 20°C. ¿Cuál es la presión manométrica de la llanta después de un paseo en un día caluroso cuando la temperatura del aire de la llanta es de 40°C? (Suponga volumen constante y presión atmosférica constante de 101 kPa).

Resolución:

Datos: $P_{inicial} = P_{man} + P_{atm}$ = 550 kPa + 101 kPa = 651 kPa
$T_{inicial}$ = 20°C <> 293 K
Volumen = cte
T_{final} = 40°C <> 313 K
$P_{man\ final}$ = ?

Por dato: $$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = cte$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}}{T_{final}} \quad \Rightarrow \quad \frac{651\ kPa}{293\ K} = \frac{P_{final}}{313\ K}$$

$$\therefore \quad P_{final} = 695{,}44\ kPa$$

Como: $P_{final} = P_{atm} + P_{man\ final}$

$$\Rightarrow \quad P_{man} = P_{final} - P_{atm} = 695{,}44\ kPa - 101\ kPa = 594\ kPa$$

46. Demuestre que 1,00 mol de cualquier gas a presión atmosférica (101 kPa) y temperatura estándar (273 K) ocupa un volumen de 22,4 L.

Resolución:

Datos:

Por demostrar que:

En un mol (1,00 mol) de cualquier gas a presión atmosférica (101 kPa) y temperatura estándar (273 K) ocupa un volumen de 22,4 L.

Sabemos por la ecuación de estado que: PV = nRT

Entonces: $$(101 \times 10^3\ Pa)\ V = (1{,}00\ mol)\left(8{,}31\ \frac{J}{mol.K}\right)(273\ K)$$

$$\therefore \quad V = 22{,}4 \times 10^{-3}\ m^3$$

Haciendo la conversión:

$$V = 22{,}4 \times 10^{-3}\ m^3 \times \frac{10^6\ mL}{1\ m^3} = 22{,}4 \times 10^3\ mL \cong 22{,}4 \text{ litros} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

47. La llanta de un automóvil se infla usando aire originalmente a 10°C y presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime hasta 28% de su volumen original y la temperatura aumenta a 40°C. ¿Cuál es la presión de la llanta? Después de que la llanta se maneja a alta velocidad, la temperatura del aire dentro de la misma se eleva a 85°C y su volumen interior aumenta 2%. ¿Cuál es la nueva presión (absoluta) de la llanta en pascales?

Resolución :

Datos: $T_{inicial} = 10°C <> 283\ K$

$P_{inicial} = P_{atm} = 101\ kPa$

Parte (a) $T_{final} = 40°C <> 313\ K$

$P_{final} = ?$

Sea: $V_{inicial} = V \Rightarrow V_{final} = \frac{28}{100} V$

Luego:

Aplicando: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \frac{(101\times10^3 Pa)\ V}{283\ K} = \frac{P_{final} \times 28V}{(313\ K)(100)}$$

$$\therefore \quad P_{final} = 3{,}99 \times 10^5\ Pa \cong 400\ kPa$$

Parte (b)

$T'_{final} = 85°C <> 358\ K$

$$\text{Volumen final}' = 2\%\ V_f = \frac{2}{100}\left(\frac{28}{100}\right)V = 56 \times 10^{-4}\ V$$

Entonces aplicando: $PV = nRT$

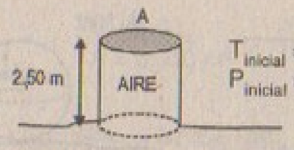
$$\Rightarrow \frac{P_{final} \cdot V_{final}}{T_{final}} = \frac{P_{final}' \cdot V_{final}'}{T_{final}'} \Rightarrow \frac{(101\times10^3 Pa)(28)V}{(313K)(100)} = \frac{P_{final}' \times (56V)}{(358K)(100)(100)}$$

$$\therefore \quad P'_{final} = 448\ kPa$$

48. Una campana de buzo en forma de cilindro, con altura de 2,50 m, está cerrada en el extremo superior y abierta en el extremo inferior. La campana desciende del aire al interior del agua del mar ($\rho = 1{,}025\ g/cm^3$). Al principio el aire en la campana está a 20,0°C. La campana baja a una profundidad (medida hasta el fondo de la campana) de 45,0 brazas u 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es 4,0°C, y la campana está en equilibrio térmico con el agua. a) ¿A qué altura el agua de mar asciende en la campana? b) ¿A qué presión mínima debe elevarse el aire en la campana para expulsar el agua que ha entrado?

Resolución :

Al inicio:



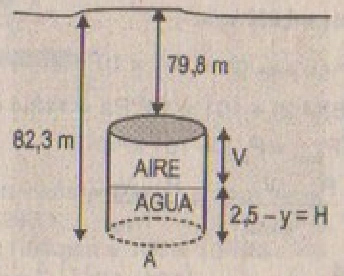
$T_{inicial} = 20°C \cong 297\ K$

$P_{inicial} = P_{atm} = 101 \times 10^3\ Pa$

$\rho_{H_2O} = 1\ 025\ kg/m^3$

Considerar: $g = 9{,}8\ m/s^2$

Al final:



$T_{final} = 4{,}0°C$

Parte (a)

Por ley universal de los gases:

$$\frac{P_{inicial} V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final} V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{atm} \cdot A(2{,}5\ m)}{293\ K} = \frac{\left[P_{atm} + \rho_{H_2O}\ g(79{,}8)\right]Ay}{277\ K}$$

$$\Rightarrow \frac{(101\times10^3 N/m^2)(2{,}5\ m)}{293\ K} = \frac{\left[101\times10^3 N/m^2 + (1025)(9{,}8)(79{,}8\ m)\right]}{277\ K} \cdot y$$

$$\therefore \quad y = 0{,}2645 <> 26{,}45\ cm$$

En consecuencia: $H = 2{,}5\ m - 0{,}2645\ m \approx 2{,}236\ m$ (asciende el agua de mar)

Parte (b)

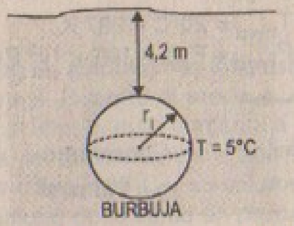
El aire en la campana debe elevarse a una presión mínima $= \frac{F_{agua}}{A} = \frac{W_{agua\ (dentro)}}{A}$

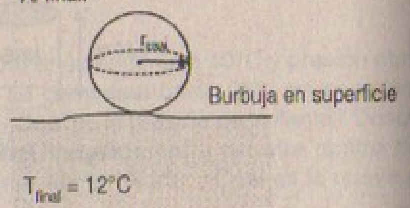
$$\therefore \quad P_{mínima} = \frac{\rho_{H_2O} gAH}{A} = (1\ 025)(9{,}8)(2{,}236\ m) \approx 22{,}5\ kPa$$

49. Una burbuja de gas de los pantanos se eleva desde el fondo de un lago de agua dulce, a una profundidad de 4,2 m y una temperatura de 5,0°C, hasta la superficie, donde la temperatura del agua es de 12°C. ¿Cuál es la proporción de los diámetros de la burbuja en los dos puntos? (Suponga que el gas de la burbuja está en equilibrio térmico con el agua en cada posición).

Resolución :

Al inicio: Al final:





Considerar: $\rho_{H_2O\ dulce} = 1\,030\ kg/m^3$

$$P_{inicial} = P_{man} + P_{atm} = \rho_{H_2O\ dulce}\, gh + 101 \times 10^3\ Pa$$

$$\Rightarrow \quad P_{inicial} = (1{,}03 \times 10^3)(9{,}8)(4{,}2) + 101 \times 10^3\ Pa = 143{,}4 \times 10^3\ Pa$$

Por otro lado: $P_{final} = P_{atm} = 101\ kPa$

Luego: $\dfrac{P_{inicial}V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{P_{final}V_{final}}{T_{final}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(143{,}4\times10^3)\left[\frac{4}{3}\pi r_{inicial}^3\right]}{278\ K} = \frac{(101\times10^3)\left[\frac{4}{3}\pi r_{final}^3\right]}{285\ K}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{143{,}4\times10^3}{278} \times \frac{(\text{Diámetro inicial})^3}{8} = \frac{(101\times10^3)}{285} \times \frac{(\text{Diámetro final})^3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Diámetro final}}{\text{Diámetro inicial}} = \sqrt[3]{\frac{(143{,}4)\,(285)\times10^3}{(101)\,(278)\times10^3}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{Diámetro final}}{\text{Diámetro inicial}} = 1{,}13$$

50. Un cilindro expansible tiene su parte superior conectada a un resorte de $2{,}0 \times 10^3$ N/m de constante de fuerza (Fig. P19.50). El cilindro está lleno con 5,0 L de gas con el resorte sin estirar a 1,0 atm y 20°C. a) Si la tapa tiene un área de sección transversal de 0,010 m² y masa despreciable, ¿qué tan alto sube la tapa cuando la temperatura aumenta a 250°C? b) ¿Cuál es la presión del gas a 250°C?

50A. Un cilindro expansible tiene su parte superior conectada a un resorte de constante de fuerza *k* (Fig. P19.50). El cilindro está lleno con V litros de gas con el resorte sin alargar a presión atmosférica P_0 y temperatura T_0. a) Si la tapa tiene un área de sección transversal A y masa despreciable, ¿qué tan alto sube cuando la temperatura aumenta a *T* ? b) ¿Cuál es la presión del gas a esta temperatura más alta?

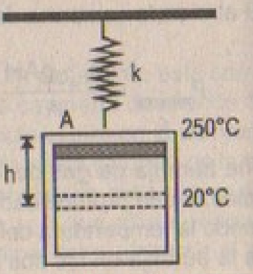


Figura P19.50

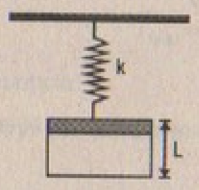
Resolución :

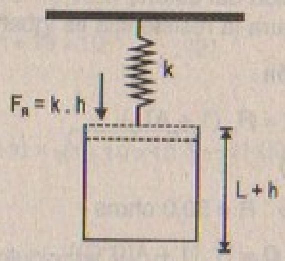
$k = 2{,}0 \times 10^3$ N/m ; V = 5,0 L ; $P_{inicial}$ = 1,00 atm

$T_{inicial}$ = 20°C ≡ 293 K ; A = 0,010 m²

Parte (a)

Al inicio: Al final:





Volumen inicial = 5,0 L
$T_{inicial}$ = 293 K
$P_{inicial}$ = 1,00 atm ≡ 101 × 10³ Pa

Volumen final = ?
T_{final} = 250°C ≡ 523 K
P_{final} = ?

Sabemos que: $V_{inicial} = 5 \times 10^3\ cm^3 = A.L = (0{,}010 \times 10^4\ cm^2)\ L$

$\therefore \quad L = 50{,}0\ cm \equiv 0{,}5\ m$

Por otro lado: $P_{final} = -P_{atm} + \dfrac{F_R}{A} \quad \Rightarrow \quad P_{final} = -P_{atm} + \dfrac{kh}{A} \quad \ldots (1)$

Además: por la ley de los gases:

$$\frac{P_{inicial}V_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}V_{final}}{T_{final}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(101\times10^3 N/m^2)(5\times10^{-3}m^3)}{293\ K} = \frac{(-A)\,.\,101\times10^3 N/m^2 + kh}{A}\ \frac{A\ (h+t)}{523\ K}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(101)(5)(523)}{293} = \left[-1010 + 2{,}0\times10^3 (h)\right](h+0{,}5)$$

Resolviendo la ecuación resulta que:

$$h = 0{,}84\ m \equiv 84\ cm$$

Parte (b)

De (1): $P_{final} = \dfrac{kh}{A} - P_{atm}$

$$\Rightarrow \quad P_{final} = \frac{(2{,}0\times10^3)(0{,}84)}{0{,}010} - 101\times10^3$$

$$\therefore \quad P_{final} = 67 \times 10^3\ Pa$$

PROBLEMAS ADICIONALES

51. Con frecuencia se hacen mediciones de temperatura precisas utilizando el cambio en la resistencia eléctrica de un metal con la temperatura. La resistencia varía de acuerdo con la expresión $R = R_0\,(1 + AT_C)$, donde R_0 y A son constantes. Cierto elemento tiene una resistencia de 50,0 ohms a 0°C y 71,5 ohms en el punto de congelación del estaño (231,97°C). a) Determine las constantes A y R_0. b) ¿A qué temperatura la resistencia es igual a 89,0 ohms?

Resolución :

Datos: $R = R_o\,(1 + AT_C)$

Parte (a)

a 0°C $\Rightarrow$ R = 50,0 ohms

$\Rightarrow \quad 50\,\Omega = R_o\,[1 + A(0°C)] \qquad \therefore \quad R_o = 50\,\Omega$

a 231,97°C $\Rightarrow$ R = 71,5 ohms

$\Rightarrow \quad 71{,}5\,\Omega = 50\,\Omega\,[1 + A(231{,}97°C)] \qquad \therefore \quad A = 1{,}85 \times 10^{-3}\,°C^{-1}$

Parte (b)

a T°C $\Rightarrow$ R = 89 ohms

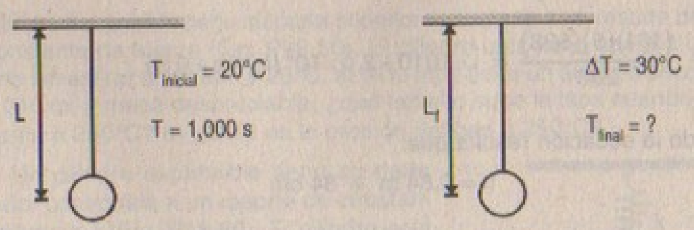
$\Rightarrow \quad 89\,\Omega = 50\,\Omega\,[1 + 1{,}85 \times 10^{-3}\,(T)]$

$\therefore \quad T = 421°C$

52. Un reloj de péndulo con un sistema de suspensión de latón tiene un período de 1,000 s a 20,0°C. Si la temperatura aumenta a 30,0°C, a) ¿en qué medida cambia el período, y b) ¿cuánto tiempo se atrasa o adelanta el reloj en una semana?

Resolución :

Inicialmente: Finalmente:



Considerar: $g = 9{,}8\ m^2/s^2$

Sabemos que: $\qquad T = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Entonces: $\qquad 1{,}000\ s = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}} \qquad ...(1)$

Al final: $\qquad T_{final} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L_f}{g}}$

Pero: $\qquad L_f = L\,(1 + \alpha\,\Delta T) \quad$ donde $\quad \alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$

$\Rightarrow \quad L_f = L\,(1 + 19 \times 10^{-6}\,[30 - 20]) = L\,(1 + 19 \times 10^{-5})$

Luego: $\qquad T_{final} = 2\pi \times \sqrt{\dfrac{L}{g}} \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} \quad ...(2)$

En consecuencia:

El período final aumentará en $\Delta T_{final} = (1\,000\ s) \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} - (1\,000\ s) = 0{,}0949\ s$

Parte (b)

En 1 semana < > 7 días, se realiza 14 revoluciones.

1 rev se realiza en: $T_{inicial} \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}}$ s

Entonces 14 rev se realizará en: $T_{inicial} \times 14 \times \sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}}$ s

Luego: el reloj se adelantará: $\quad T_{final} - T_{inicial}$

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{1 + 19 \times 10^{-5}} - 1\right) 14\,(1\,000\ s) = 1{,}3286 \times 10^{-3}\ s$

53. La placa rectangular que se muestra en la figura P19.53 tiene un área $A = lw$. Si la temperatura aumenta en ΔT, muestre que el incremento del área es $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$, donde α es el coeficiente promedio de expansión lineal. ¿Qué aproximación supone esta expresión? (*Sugerencia*: Advierta que cada dimensión aumenta de acuerdo con $\Delta l = \alpha l\,\Delta T$).

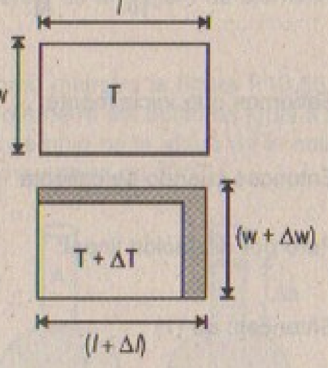


Figura P19.53

Resolución :

Por demostrar que: $\qquad \Delta A = 2\alpha\,A\,\Delta T$

Sabemos que: $\quad A_{inicial} = w.l$

$A_{final} = (l + \Delta l)(w + \Delta w)$

Entonces: $\qquad \Delta A = (l + \Delta l)(w + \Delta w) - wl \qquad ...(1)$

Por otro lado: $\Delta l = l\alpha\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta l + l = l\,(1 + \alpha\Delta T)$ ... (2)

$\Delta w = w\alpha\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta w + w = w\,(1 + \alpha\Delta T)$ ... (3)

Multiplicando (2) y (3)

$$(\Delta l + l)(\Delta w + w) = l\,w\,(1 + \alpha\Delta T)^2$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta l + l)(\Delta w + w) - wl = wl\,(1 + \alpha\Delta T)^2 - wl$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A = wl\,[(1 + \alpha\Delta T - 1)(1 + \alpha T + 1)]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A = wl\,[(\alpha\Delta T)(2 + \alpha\Delta T)]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta A = wl\,[(2\alpha\Delta T) + (\alpha\Delta T)^2]$$

Nota: Si aproximamos: $\alpha\Delta T << 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad (\alpha\Delta T)^2 \cong 0$

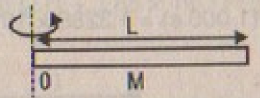
$\therefore \quad \Delta A = w.l\,(2\alpha\Delta T) = A\,2\alpha\Delta T$ l.q.q.d.

54. Considere un objeto con cualquiera de las formas presentadas en la tabla 10.2. ¿Cuál es el aumento porcentual en el momento de inercia del objeto cuando se calienta de 0°C a 100°C, si está compuesto por a) cobre o b) aluminio? (Vea la tabla 19.2. Suponga que los coeficientes promedio de expansión lineal no varían entre 0°C y 100°C).

Resolución :

Parte (a)

Sea:



$\alpha_{cobre} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\Delta T = 100°C$

Sabemos que inicialmente: $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ a 0°C

Entonces cuando se calienta $I_0 = \frac{1}{3}M(L_1)^2$ ... (1)

Pero por dilatación lineal: $L_1 = L\,(1 + 17 \times 10^{-6}\,(10)^2)$

$\therefore \quad L_1 = L\,(1 + 10^{-4} \times 17)$

Entonces: de (1)

$$I_0 = \frac{1}{3}M\,[L(1 + 10^{-4} \times 17)]^2 = \frac{1}{3}ML^2\,(1 + 10^{-4} \times 17)^2$$

En consecuencia: si: en $\frac{1}{3}ML^2$ ———————— 100%

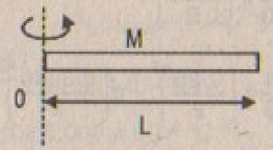
$\frac{1}{3}ML^2\,(1{+}10^{-4} \times 17)^2$ ——— x

$\therefore \quad x = 100{,}34\%$

Luego el aumento porcentual en el momento de inercia de un objeto cuando se calienta a 100°C es del 0,34%

Parte (b)

Sea:



$\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Sabemos que inicialmente: $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ a 0°C

Entonces cuando se calienta a 100°C: $I_0 = \frac{1}{3}M\,L_1^2$ ... (1)

Pero por dilatación lineal: $L_1 = L\,(1 + 240 \times 10^{-6}\,(10^2))$

$\therefore \quad L_1 = L\,(1 + 24 \times 10^{-4})$

Entonces de (1): $I_0 = \frac{1}{3}ML^2\,(1 + 24 \times 10^{-4})^2$

Como: $\frac{1}{3}ML^2$ ———————— 100%

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}ML^2\,(1{+}24{\times}10^{-4})^2$ —— x $\quad \therefore \quad x = 100{,}48\%$

En consecuencia:

El aumento porcentual en el momento de inercia de un objeto de aluminio cuando se calienta a 100°C es de 0,48%.

55. Un termómetro de mercurio se construye como muestra la figura P19.55. El tubo capilar tiene un diámetro de 0,0040 cm, y el diámetro del bulbo es igual a 0,25 cm. Ignore la expansión del vidrio y encuentre el cambio de la altura de la columna de mercurio correspondiente a un cambio de temperatura de 30°C.

55A. Un termómetro de mercurio se construye como muestra la figura P19.55. El tubo capilar tiene un diámetro d_1, y el diámetro del bulbo es d_2. Ignore la expansión del vidrio y encuentre el cambio de la altura de la columna de mercurio correspondiente a un cambio de temperatura ΔT.

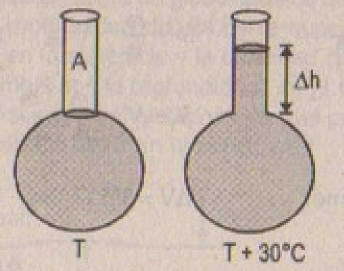


Figura P19.55

Resolución :

Datos: Diámetro del tubo capilar = 0,004 cm

Diámetro del bulbo = 0,25 cm

Sabemos que: $\beta_{mercurio} = 1{,}82 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$

Además: $V_{inical} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3$

$$V_{final} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3 + \pi\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2 \Delta h$$

$$\therefore \quad \Delta V = \pi\Delta h\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2$$

Pero: $\Delta V = V\beta\Delta T$

$$\Rightarrow \quad \pi.\Delta h\left[\frac{0{,}0040}{2}\right]^2 = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{0{,}25}{2}\right]^3 (1{,}82 \times 10^{-4})(T + 30°C - T)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{4}(0{,}0040)^2 = \frac{4}{3}\frac{(0{,}25)^3}{8}(1{,}82 \times 10^{-4})(30)$$

$$\therefore \quad \Delta h = 3{,}55\ cm$$

56. Un líquido tiene una densidad ρ. a) Muestre que el cambio fraccional en la densidad para un cambio de temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$. ¿Cuál es el significado del signo negativo? b) El agua dulce tiene una densidad máxima de 1,000 g/cm³ a 4,0°C. a 10,0°C, su densidad es 0,9997 g/cm³. ¿Cuál es el valor de β para el agua a lo largo de este intervalo de temperatura?

Resolución :

Parte (a)

Por demostrar que: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta\Delta T$

Por dato: densidad del líquido: ρ

Sea: $\rho = \frac{m}{V_i} \quad \Rightarrow \quad \rho_f = \frac{m}{V_f}$

$$\Rightarrow \quad V_f - V_i = \frac{m}{\rho_f} - \frac{m}{\rho_i} = -\frac{m \cdot \Delta\rho}{\rho_f \cdot \rho_i} = \Delta V$$

Como: $\Delta V = V\beta\Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{-m.\ \Delta\rho}{\rho_f \cdot \rho_i} = \frac{m}{\rho_i}\beta\Delta T$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta\Delta T \qquad \text{l.q.q.d.}$$

El signo negativo indica que el volumen final es menor que el volumen inicial, esto quiere decir $\rho_{final} < \rho_{inicial}$ (densidad varía y disminuye o aumenta con la temperatura).

Parte (b)

a 4,0°C $\quad \rho_{H_2O\ dulce} = 1{,}000$ g/cc (final)

a 10°C $\quad \rho_{H_2O\ dulce} = 0{,}997$ g/cc (inicial)

Entonces $\frac{1{,}000 - 0{,}997}{1{,}000} = -\beta\,(4{,}0 - 10)$

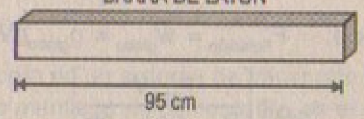
$$\therefore \quad \beta = 5{,}000 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$$

57. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a 20°C. La medida es de 95,00 cm. ¿Cuál será la indicación de la cinta correspondiente a la longitud de la barra cuando ésta y la primera estén a a) −15°C, y b) 55°C?

Resolución :

BARRA DE LATÓN

Inicialmente:



$T_{inicial} = 20°C$

$\alpha_{latón} = 19 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a) $\quad T_{final} = -15°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad L_{final} - L_{inicial} = L_{inicial} \cdot \alpha_{latón}\,(T_{final} - T_{inicial})$$

$$\Rightarrow \quad L_{final} = 95{,}00\ cm\ [1 - 19 \times 10^{-6}\,(15 + 20)]$$

$$\therefore \quad L_{final\ (latón)} = 94{,}94\ cm$$

Parte (b) $\quad T_{final} = 55°C$

Sabemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad L_{final} - L_{inicial} = L_{inicial}\,\alpha_{latón}\,(T_{final} - T_{inicial})$$

$$\Rightarrow \quad L_{final} = 95{,}00\ cm\ [1 + 19 \times 10^{-6}\,(55 - 20)]$$

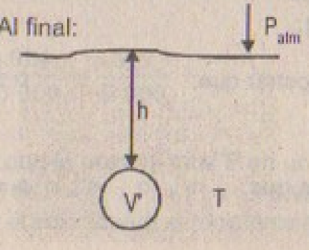
$$\therefore \quad L_{final\ latón} = 95{,}06\ cm$$

58. a) Obtenga una expresión para la fuerza de flotación sobre un globo esférico que se ha sumergido en agua como una función de la profundidad debajo de la superficie, el volumen del globo en la superficie, la presión en la superficie y la densidad del agua. (Suponga que la temperatura del agua no cambia con la profundidad). b) ¿La fuerza de flotación aumenta o disminuye cuando se sumerge el globo? b) ¿A qué profundidad la fuerza de flotación disminuye a la mitad del valor en la superficie?

Resolución :

Al inicio:

Al final:



Sabemos que: $F_{flotación} = \text{Empuje} = \rho_{H_2O}\, gV'$ ... (1)

Por otro lado: $P_{atm}\, V = (P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh)V'$

$\therefore \quad V' = P_{atm}\, V / P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

Resulta que: $$\text{Empuje} = \rho_{H_2O}\, g\left[\frac{P_{atm}\, V}{P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh}\right]$$

Parte (b)
Como la fuerza de flotación es proporcional con el volumen, entonces la fuerza de flotación disminuye debido a que disminuye el volumen ya que aumenta la presión.

Parte (c)
Sabemos que en la superficie: $F_{flotación} = W_{globo} = \rho_{globo} gV$ ... (1)

Por condición: $$\frac{\rho_{globo}\, gV}{2} = \rho_{H_2O}\, g\left[\frac{P_{atm} V}{P_{atm} + \rho_{H_2O}\, gh}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\rho_{H_2O} \cdot P_{atm} = \rho_{globo} \cdot P_{atm} + \rho_{globo} \cdot \rho_{H_2O}\, gh$$

$$\Rightarrow \quad P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{globo}\right) = \rho_{globo}\, \rho_{H_2O}\, gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{globo}\right)}{\rho_{globo}\, \rho_{H_2O} g}$$

Pero a una cierta profundidad: $\rho_{globo} gV' = \rho_{H_2O}\, gV'$

$$\Rightarrow \quad \rho_{globo} = \rho_{H_2O}$$

En consecuencia: $$h = \frac{P_{atm}\left(2\rho_{H_2O} - \rho_{H_2O}\right)}{\rho_{H_2O}\, \rho_{H_2O}\, g} = \frac{P_{atm}}{\rho_{H_2O}\, g}$$

59. a) Demuestre que la densidad de un gas ideal que ocupa un volumen V está dada por $\rho = PM/RT$, donde M es la masa molar. b) Determine la densidad del gas oxígeno a presión atmosférica y 20,0°C.

Resolución:
Parte (a)

Por demostrar que: $$\rho = \frac{PM}{RT}$$

Sabemos que: $$n = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M}$$

Entonces por la ley de los gases: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad PV = \frac{\rho . V}{M}\,(R.T)$$

$$\therefore \quad P = \frac{\rho M}{RT} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)
Presión $= P_{atm} = 101 \times 10^3$ N/m²; $T = 20°C \equiv 293$ K
$R = 8{,}31$ N.m/mol.K ; $M_{O_2} = 32$ g/mol $\equiv 0{,}032$ kg/mol

Entonces: $$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{(101\times10^3)(32)\times10^{-3}}{(8{,}31)(293)} = 1{,}33 \text{ kg/m}^3$$

60. Los rieles de acero de un sistema de transporte rápido interurbano forman una vía continua que se mantiene rígidamente fija en el concreto. a) Si la vía fue instalada cuando la temperatura era de 0°C, ¿cuál es el esfuerzo en los rieles en un día caluroso cuando la temperatura es de 25°C? b) ¿Qué fracción de la resistencia producida de $52{,}2 \times 10^7$ N/m² representa este esfuerzo?

Resolución:
Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$
$T_{inicial} = 0°C$; $Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²
$T_{final} = 25°C$

Parte (a)
Sabemos que: $\Delta L = L\, \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = 11 \times 10^{-6}\,(25 - 0) = 275 \times 10^{-6} \quad ...(1)$$

Por otro lado: $$S = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$\Rightarrow$ Esfuerzo $= (20 \times 10^{10})(275 \times 10^{-6})$
$\therefore$ Esfuerzo $= 5{,}50 \times 10^7$ N/m²

Parte (b)
Si: $52{,}2 \times 10^7$ —— 100%
$5{,}50 \times 10^7$ —— x $\quad \therefore \quad x = 10{,}54\%$

En consecuencia:

$$\text{En fracción } x = \frac{10{,}54}{100} = \frac{1\,054}{10\,000} = \frac{527}{5\,000}$$

61. A partir de la ecuación 19.12, muestre que la presión total P en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$, donde $P_1, P_2, ...$ son las presiones que cada gas ejercería si él solo llenara el recipiente (estas presiones individuales se denominan las *presiones parciales* de los gases respectivos). Lo anterior se conoce como la *ley de Dalton de presiones parciales.*

Resolución :

Demostrar que: $P_{total} = P_1 + P_2 + P_3 + ...$

Sabemos que de la Ec. 19.12: $PV = N\left(\frac{R}{N_A}\right)T$

Por otro lado:

$P_1 V = N K_B T$ (para un gas cualquiera)

Sumando

$P_2 V = N K_B T$ (para otro gas cualquiera)

$\vdots$

$$P_1 + P_2 + P_3 + ... = \left(\frac{K_B . T}{V}\right) N_{total}$$

$$\therefore \quad P_{total} = P_1 + P_2 + P_3 + ... \qquad \text{l.q.q.d.}$$

62. Al analizar una muestra de aire que tiene una masa de 100,00 g, obtenida a nivel del mar, se encontró que se compone de los siguientes gases:

nitrógeno (N_2) = 75,52 g
oxígeno (O_2) = 23,15 g
argón (Ar) = 1,28 g
dióxido de carbono (CO_2) = 0,05 g

más restos de neón, helio, metano y otros gases. a) Calcule la presión parcial (vea el problema 61) de cada gas cuando la presión es $1{,}013 \times 10^5$ Pa. b) Determine el volumen ocupado por la muestra de 100 g a una temperatura de 15,00°C y una presión de $1{,}013 \times 10^5$ Pa. ¿Cuál es la densidad del aire en estas condiciones? c) ¿Cuál es la masa molar efectiva de la muestra de aire?

Resolución :

Datos: $M_{total\ del\ aire} = 100{,}00$ g $\qquad P_{total} = 1{,}013 \times 10^5$ Pa

Nitrógeno (N_2) = 75,52 g
Oxígeno (O_2) = 23,15 g
Argón (Ar) = 1,28 g
Dióxido de carbono (CO_2) = 0,05 g

Parte (a)

Sabemos que: $P_{total} = N_{total} \cdot cte$

$P_1 = N_1 \cdot cte \quad \Rightarrow \quad 1{,}013 \times 10^5 = n_{totales} \times cte$

Además: $P_1 (N_2) = n_{N_2} \times cte$

Por lo tanto: $\boxed{\frac{P_{1(H_2)}}{T_{total}} = \frac{n_{H_2}}{n_{totales}}}$ ... (α)

Hallando la presión parcial de cada gas:

Previamente: $n_{totales} = \frac{M_{total}}{M_{total(molar)}} = \frac{100\text{ g}}{28\text{ g/mol} + 32\text{ g/mol} + 40\text{ g/mol}}$

$\therefore \quad n_{totales} = 3{,}453$ moles

Además: $n_{N_2} = 75{,}52\text{ g}/28\text{ g/mol} = 2{,}697$ moles

$n_{O_2} = \frac{23{,}15\text{ g}}{30\text{ g/mol}} = 0{,}723$ moles

$n_{Ar} = \frac{1{,}28\text{ g}}{40\text{ g/mol}} = 0{,}032$ moles

$n_{CO_2} = \frac{0{,}05\text{ g}}{48\text{ g/mol}} = 0{,}001$ moles

En consecuencia: $n_{totales} = 3{,}453$ moles

Luego: $P_{N_2} = \frac{(1{,}013 \times 10^5)(2{,}697)}{3{,}453} = 0{,}79 \times 10^5$ Pa

$P_{O_2} = \frac{(1{,}013 \times 10^5)(0{,}723)}{3{,}453} = 0{,}21 \times 10^5$ Pa

$P_{Ar} = \frac{(1{,}013 \times 10^5)(0{,}032)}{3{,}453} = 0{,}0094 \times 10^5$ Pa

$P_{CO_2} = \frac{(1{,}013 \times 10^5)(0{,}001)}{3{,}453} = 0{,}00029 \times 10^5$ Pa

Parte (b)

$P = 1{,}013 \times 10^5 \qquad T = 15{,}00°C \cong 288$ K $\qquad V = ?$

$n_{totales} = 3{,}453 \qquad R = 0{,}082$ atm.L/mol.K $\cong 8{,}31$ J/mol.K

Entonces: $PV = nRT$

$\Rightarrow \quad (1{,}013 \times 10^5\text{ Pa})V = (3{,}453\text{ mol})(8{,}31)(288\text{ K})$

$\therefore \quad$ Volumen = 0,082 m^3

Parte (c)

Sabemos que: $n_{total} = \frac{\text{Masa total}}{M_{aire}} \quad \Rightarrow \quad 3{,}453 = \frac{100{,}00}{M_{aire}}$

Masa molar efectiva del aire = $\frac{100{,}00}{3{,}453} = 28{,}96$ g/mol

63. Dos tramos de concreto de un puente de 250 m de largo se colocan extremo con extremo para que no haya posibilidad de expansión (Fig. P19.63a). Si hay un aumento de temperatura de 20,0°C, encuentre la altura, y, a la cual estos tramos se pandean (Fig. P19.63b).

63A. Dos tramos de concreto de un puente de longitud L se colocan extremo con extremo para que no haya posibilidad de expansión (Fig. P19.63a). Si hay un aumento de temperatura de ΔT, encuentre la altura, y, a la cual estos tramos se pandean (Fig. P19.63b).

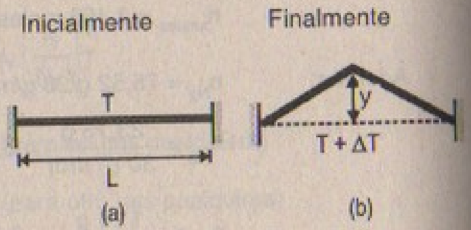
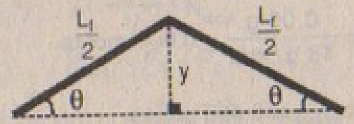


Figura P19.63

Resolución :

Sea:



Tenemos que: $\Delta L = L\,\alpha\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad L + \Delta L = L\,(1 + \alpha\,\Delta T)$

$\Rightarrow \quad L_f = L\,(1 + \alpha\,\Delta T) \qquad \dots(1)$

Por otro lado:

De la figura: $2\left(\dfrac{L_f}{2}\right)\cos\theta = L \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{L}{L_f} \quad \dots(2)$

Además: $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2y}{L_f} \dots (3)$

Entonces: $(3)^2 + (2)^2$ resulta que:

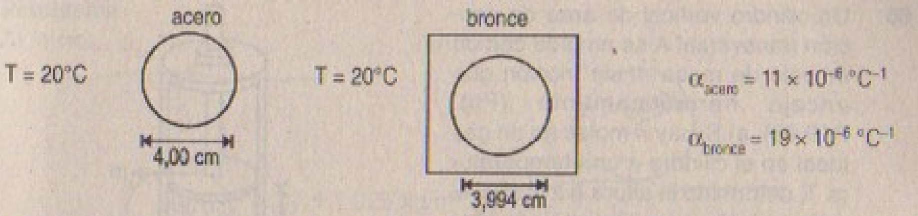
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{(L_f - L)(L_f + L)} = \frac{1}{2}\sqrt{(L\alpha\,\Delta T)(2L + L\alpha\Delta T)}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2} \times \sqrt{(L\alpha\Delta T + L)^2 - L^2}$$

64. Un cojinete de bola de acero mide 4,000 cm de diámetro a 20,0°C. Una placa de bronce tiene un agujero de 3,994 cm de diámetro a 20,0°C. ¿Qué temperatura común deben tener ambas piezas para que la bola atraviese exactamente el agujero?

Resolución :

Datos:



Para que la bola de acero atraviese exactamente el agujero de bronce se tiene que cumplir:

$$A_{\text{final del bronce}} = A_{\text{inicial del acero}} + \Delta A_{\text{acero}}$$

Entonces:

$$A_{\text{final del bronce}} = A_{\text{inicial}}\,(1 + 2\alpha_B \Delta T)$$

$$A_{\text{inicial del acero}} + \Delta A_{\text{acero}} = A_{\text{inicial del acero}}\,(1 + 2\alpha_A\,\Delta T)$$

Entonces:

$$\frac{\pi}{4}(3{,}994)^2\,[1 + 2\times 19\times 10^{-6}\,(T - 20)] = \frac{\pi}{4}(4{,}00)^2\,[1 + 2\times 11\times 10^{-6}\,(T - 20)]$$

$$\Rightarrow \quad (4{,}00)^2 - (3{,}994)^2 = [(3{,}994)^2\,(38\times 10^{-6}) - (4{,}00)^2(22\times 10^{-6})]\,[T - 20]$$

$$\therefore \quad T = 208{,}7°C$$

65. El péndulo de latón de un reloj se ajusta para que tenga un período de 1,000 s a 20°C. ¿Cuál es la temperatura de un cuarto en el que el reloj se atrasa exactamente 1 minuto cada semana?

Resolución :

Sabemos que: $T = 2\pi\,.\,\sqrt{\dfrac{\text{longitud}}{g}}$ ...(periodo de un péndulo)

Entonces: $1{,}000\text{ s} = \dfrac{4\pi^2}{g}$. longitud inicial $\quad \therefore$ Long.inicial $= \dfrac{g}{4\pi^2}$

Por otro lado:

Por dato se sabe que; en una semana el reloj se atrasa un minuto, entonces en un segundo se atrasará:

$$\frac{1}{7\times 24\times 60} = 0{,}0000992\text{ s}$$

Luego: $\quad T_{\text{final}} = 1{,}00\text{ s} + 0{,}0000992\text{ s} = 2\pi.\sqrt{\dfrac{L_{\text{inicial}}\,(1 + \alpha_{\text{latón}}\Delta T)}{g}}$

$$\Rightarrow \quad 1{,}000198423 = \frac{4\pi^2}{g}\times\left(\frac{g}{4\pi^2}\right)(1 + 19\times 10^{-6}\,[T_{\text{final}} - 20°C])$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}9842254\times 10^{-4} = 19\times 10^{-6}\,(T_{\text{final}} - 20°C)$$

$$\therefore \quad T_{\text{final}} = 30{,}4°C$$

66. Un cilindro vertical de área de sección transversal A se amolda con un émbolo de masa *m* sin fricción que encaja herméticamente (Fig. P19.66). a) Si hay *n* moles de un gas ideal en el cilindro a una temperatura *T*, determine la altura *h* a la cual el émbolo está en equilibrio bajo su propio peso. b) ¿Cuál es el valor de *h* si $n = 0{,}20$ mol, $T = 400$ K, $A = 0{,}0080$ m^2, y $m = 20{,}0$ kg?

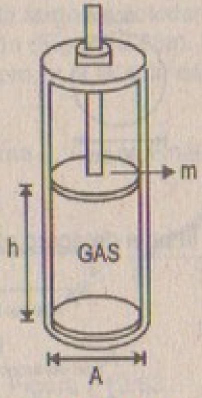


Figura P19.66

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $$P_{gas} = \frac{W_{émbolo}}{A} + \frac{W_{aire}}{A}$$

$$\Rightarrow \quad P_{gas} = \frac{m_{émbolo}}{A} \cdot g + P_{atmosférica}$$

Por la ley de los gases: $P_{gas}V = nRT$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{mg}{A} + P_{atm}\right)(Ah) = nRT$$

$$\therefore \quad h = \frac{nRT}{mg + P_{atm}A}$$

Parte (b)

Si: $n = 0{,}20$ mol ; $R = 8{,}31$ J/mol.K ; $A = 0{,}0080$ m^2

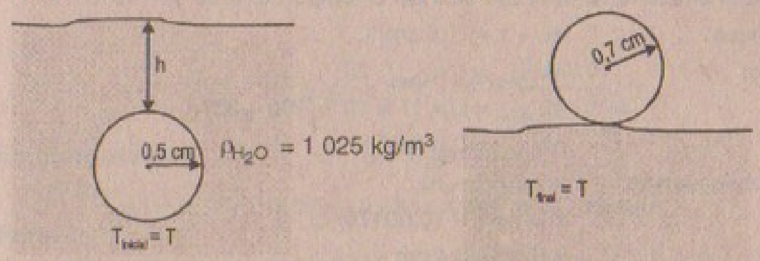
$T = 400$ K ; $m_{embolo} = 20{,}00$ kg ; $g = 9{,}8$ m/s^2

$$\Rightarrow \quad h = \frac{(0{,}20)(8{,}31)(400)}{(20)(9{,}8) + (101\times 10^3)(0{,}0080)} \qquad \therefore \quad h = 0{,}662 \text{ m} \equiv 66{,}2 \text{ cm}$$

67. Una burbuja de aire originada por un buzo dentro del mar tiene un radio de 5,0 mm a cierta profundidad *h*. Cuando la burbuja llega a la superficie del agua, su radio es de 7,0 mm. Suponiendo que la temperatura del aire en la burbuja permanece constante, determine a) la profundidad *h* a la que se encuentre el buzo, y b) la presión absoluta a esta profundidad.

Resolución:

Al inicio: Al final:



Parte (a)

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$$

$$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3 + (1\,025)(9{,}8)\,h)\,\frac{4}{3}\pi(0{,}5)^3 = (101 \times 10^3)\,\frac{4}{3}\pi(0{,}7)^3$$

$$\therefore \quad h = 17{,}53 \approx 18{,}00 \text{ m}$$

Parte (b)

$$P_{total} = P_{atm} + \rho_{H_2O}\,gh$$

$$\Rightarrow \quad P_{total} = 101 \times 10^3 \text{ N/m}^2 + (1\,025)(9{,}8)(17{,}53)$$

$$\therefore \quad P_{total} = 277 \times 10^3 \text{ Pa} \equiv 277 \text{ kPa}$$

68. La figura P19.68 muestra una pieza circular de acero con una abertura. Si se calienta la pieza, a) ¿aumenta o disminuye el ancho de la abertura? b) El ancho de la abertura es de 1,600 cm cuando la temperatura es de 30,0°C. Determine el ancho de la abertura cuando la temperatura es de 190°C.

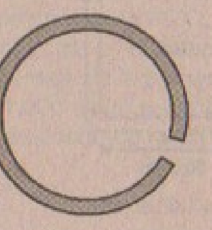


Figura P19.68

Resolución:

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}$ °C^{-1}

Parte (a)

Sabemos que cuando una pieza se calienta o incrementa su temperatura su longitud inicial aumenta y como:

$$L_{inicial} = 2\pi\, R_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad L_{final} = 2\pi\, R_{final} = L_{inicial}\,(1 + \alpha\Delta T)$$

En consecuencia: $L_{final} > L_{inicial}$

$\therefore$ El ancho de la abertura disminuirá.

Parte (b)

Sea x: el ancho de la abertura cuando la temperatura es de 190°C

Entonces: $\Delta L + x = (1{,}6\ \text{cm})\ L$

Luego: $\Delta L_{acero} = L\ \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad \Delta L_{acero} = L \times 11 \times 10^{-6}\ (190 - 30)$

$\therefore \quad \Delta L_{acero} = 0{,}00176\ L$

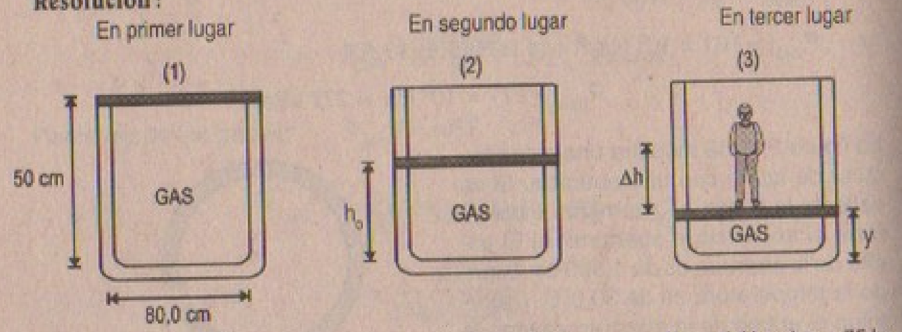
En consecuencia: $x = 1{,}6\ L - \Delta L$

$\Rightarrow \quad x = 1{,}6\ L - (0{,}00176)\ L$

$\therefore \quad x = 1{,}59824\ \text{cm}$

69. Un cilindro que tiene un radio de 40,0 cm y 50,0 cm de profundidad se llena con aire a 20,0°C y 1,00 atm (Fig. P19.69a). Un émbolo de 20,0 kg desciende luego en el cilindro y comprime el aire atrapado en el interior (Fig. P19.69b). Por último, un hombre de 75,0 kg parado sobre el émbolo comprime aun más el aire que permanece a 20°C (Fig. P19.69c). a) ¿Qué distancia (Δh) se mueve el émbolo cuando el hombre está parado sobre él? b) ¿A qué temperatura debe calentarse el gas para elevar el émbolo y al hombre de regreso a h_0?

Resolución:



$P_{inicial} = P_1 = 1{,}00$ atm — Masa del émbolo = 20 kg — Masa del hombre = 75 kg

$T_1 = 20°C \equiv 293$ K — $T_2 = 20°C \equiv 293$ K — $T_3 = 20°C \equiv 293$ K

Parte (a)

Sabemos que: PV = cte

$$\Rightarrow \quad P_1V_1 = P_2V_2$$

$$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)\ A\ (0{,}5) = (101 \times 10^3 + \frac{W_{émbolo}}{A})\ Ah_o$$

$$\Rightarrow \quad (101)(0{,}5) \times 10^3 = \left[101\times10^3 + \frac{(20)(9{,}8)}{\pi\ (0{,}4)^2}\right] h_o$$

$$\therefore \quad h_o = 0{,}498\ \text{m}$$

Por otro lado: $P_1\ V_1 = P_3\ V_3$

$$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)\ A\ (0{,}5) = \left(101\times10^3 + \frac{W_H + W_E}{A}\right) Ay$$

$$\Rightarrow \quad (101 \times 10^3)(0{,}5) = \left[101\times10^3 + \frac{(95)(9{,}8)}{\pi\ (0{,}4)^2}\right] y$$

En consecuencia: $\therefore \quad y = 0{,}491$ m

$$\Delta h = h_o - y = 0{,}498 - 0{,}491 = 0{,}007\ \text{m} \equiv 7{,}06\ \text{mm}$$

Parte (b)

Tenemos que: $\dfrac{P_2V_2}{T_2} = \dfrac{P_3V_3}{T_3}$

$$\Rightarrow \quad \left[101\times10^3 + \frac{(20)(9{,}8)}{\pi(0{,}4)^2}\right]\frac{A\ (0{,}498)}{293\ \text{K}} = \left[101\times10^3 + \frac{(95)(9{,}8)}{\pi(0{,}4)^2}\right]\frac{A\ (0{,}491)}{T_3}$$

Entonces: $\dfrac{(101{,}389\times10^3)(0{,}498)}{293\ \text{K}} = \dfrac{(102{,}852\times10^3)(0{,}491)}{T_3}$

$$\therefore \quad T_3 = 297\ \text{K}$$

70. Una olla de aluminio que tiene la forma de un cilindro, está inicialmente a 4,0°C, temperatura a la cual su diámetro interior es de 28,00 cm. La olla contiene 3,000 gal de agua a 4,0°C. a) ¿Cuál es la profundidad del agua en el recipiente? (1 gal = 3 785 cm³). b) La olla y el agua dentro se calientan hasta 90°C. Considerando la expansión del agua pero ignorando la de la olla, ¿cuál es el cambio en la profundidad del agua? Exprese el cambio como un porcentaje de la profundidad original así como en milímetros. (La densidad del agua es 1,000 g/cm³ a 4,0°C y 0,965 g/cm³ a 90,0°C) c) Modifique su solución del inciso b) considerando la expansión de la olla. (Véase la tabla 19.2).

Resolución:

Datos: $T_{inicial} = 4{,}0°C$

Diámetro interior = 28,00 cm

$V_{inicial} = 3{,}000$ gal

(1 gal = 3 785 cm³)

Parte (a) $\quad V_{inicial} = Ah = \pi\left(\dfrac{\text{diámetro}}{2}\right)^2 h$

$$\Rightarrow \quad 3(3\ 785\ \text{cm}^3) = \frac{\pi}{4}\ (28{,}00)^2\ \text{cm}^2\ h$$

$$\therefore \quad h = 18{,}44\ \text{cm}$$

Parte (b) Considerando presión constante

Entonces: $\dfrac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{V_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \dfrac{3(3785)\ cm^3}{277\ K} = \dfrac{V_{final}}{(90+273)k}$

$$\therefore\quad V_{final} = 14\ 880{,}4\ cm^3$$

Pero: $V_{final} = \dfrac{\pi}{4}\,(28{,}00)^2\ y$

$$\Rightarrow\quad 14\ 880{,}4 = \frac{\pi}{4}(28{,}00)^2 y \qquad \therefore\quad y = 24{,}17\ cm$$

Luego el cambio en la profundidad será: 24,17 – 18,44 = 5,73 cm

En porcentaje será:

Si: (24,17) × 10 mm ——— 100%

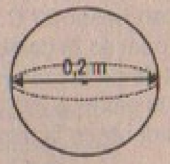
(18,44) × 10 mm ——— x $\quad\therefore\quad$ x = 76,29%

por lo tanto el cambio será: 100% – 76,29% = 23,71%

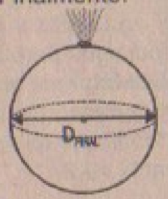
71. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a 1,00 atm y 20,0°C. conforme la esfera se calienta hasta alcanzar 100,0°C, se deja que el gas escape. La válvula se cierra y la esfera se pone en un baño de agua congelada. a) ¿Cuántas moléculas de gas escapan de la esfera a medida que ésta se calienta? b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando ésta está en el agua congelada?

Resolución:

Inicialmente:



Finalmente:



$P_{inicial} = 1{,}00\ atm \equiv 101 \times 10^3\ Pa$;
$T_{inicial} = 20°C = 293\ K$
$V_{inicial} = \dfrac{4}{3}\pi\,(0{,}1)^3$

$P_{final} =$
$T_{final} = 100°C = 373\ K$
$V_{final} =$

Parte (a) $\quad n_{iniciales} = \dfrac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{R \cdot T_{inicial}}$

$$\Rightarrow\quad n_{iniciales} = \frac{(101\times10^3)(4/3\ \pi\ (0{,}1)^3)}{(8{,}31)\ (373\ K)} = 0{,}174\ moles$$

Entonces: $\quad n_{finales} = \dfrac{P_{final} \cdot V_{final}}{R \cdot T_{final}}$

$$\Rightarrow\quad n_{finales} = \frac{(101\times10^3)(4/3\pi\ (0{,}1)^3)}{(8{,}31)(373\ K)} = 0{,}1365\ moles$$

En consecuencia:

$$n_{que\ escapan} = n_{iniciales} - n_{finales} = 0{,}0374\ moles$$

Parte (b)

$$\frac{P_{inicial}}{T_{inicial}} = \frac{P_{final}}{T_{final}} \Rightarrow \frac{1{,}00\ atm}{373\ K} = \frac{P_{final}}{273\ K}$$

$$\therefore\quad P_{final} = 0{,}732\ atm$$

72. La relación $L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$ es una aproximación que funciona cuando el coeficiente de expansión promedio es pequeño. Si α es considerable, la relación $dL/dT = \alpha L$ debe integrarse para determinar la longitud final. a) Suponga que el coeficiente de expansión lineal es constante y determine la expresión general para la longitud final. b) Dada una barra de 1,00 m de longitud y un cambio de temperatura de 100,0°C, determine el error causado por la aproximación cuando $\alpha = 2{,}00 \times 10^{-5}\ (°C)^{-1}$ (el valor normal para metales comunes), y cuando $\alpha = 0{,}020\ (°C)^{-1}$ (un valor irreal grande utilizado con fines comparativos).

Resolución:

Parte (a)

De la ecuación diferencial: $\dfrac{dL}{dT} = \alpha L$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{L}\right)dL = \alpha dT \qquad \Rightarrow\quad \int_{L_i}^{L_f}\left(\frac{1}{L}\right)dt = \alpha \cdot \int_{T_i}^{T_f} dT$$

$$\Rightarrow\quad \ln(L)\Big[_{L_i}^{L_f} = \alpha T\Big|_{T_i}^{T_f} \qquad \Rightarrow\quad \ln\left[\frac{L_f}{L_i}\right] = \alpha\ \Delta T$$

$$\therefore\quad L_{final} = L_{inicial} \cdot e^{\alpha\,\Delta T}$$

Parte (b)

Para: $\quad L_{inicial} = 1{,}00\ m$; $\Delta T = 100°C$; $\alpha = 2{,}00 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

Hallando en primer lugar "$L_{final\ aproximado}$"

Entonces: $\quad L_{final} = (1{,}00\ m)\ [1 + 2{,}0 \times 10^{-5}\ (100)]$

$$\therefore\quad L_{final} = 1{,}002\ m$$

Luego hallando "$L_{final\ real}$"

Aplicando: $\quad L_{final} = L_{inicial} \cdot e^{\alpha\,\Delta T}$

$$\Rightarrow\quad L_{final} = (1{,}00) \cdot e^{(2\times10^{-5})(10^2)}$$

$$\therefore\quad L_{final} = 1{,}002\ m$$

En consecuencia:

El error causado por la aproximación es "cero".

Si: $\alpha = 0{,}020\ °C^{-1}$

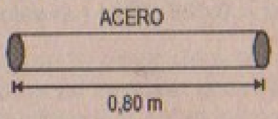
$\Rightarrow$ Aproximando: $L_f = 1{,}00\,[1 + (0{,}020)(100)] = 3{,}00$ m

En realidad será: $L_f = 1{,}00\,.\,e^{(0{,}020)(100)} = 7{,}39$ m

El error causado por la aproximación es: 4,39 m

73. Una cuerda de acero de guitarra con un diámetro de 1,00 mm se estira entre soportes separados 80,0 cm. La temperatura es 0,0°C. a) Encuentre la masa por unidad de longitud de esta cuerda. (Utilice el valor $7{,}86 \times 10^3$ kg/m³ para la densidad.) b) La frecuencia fundamental de las oscilaciones transversales de la cuerda es de 200 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda? c) Si la temperatura se eleva a 30,0°C, encuentre los valores resultantes de la tensión y de la frecuencia fundamental. [Suponga que tanto el módulo Young (tabla 12.1) como el coeficiente de expansión promedio (tabla 19.2) tienen valores constantes entre 0,0°C y 30,0°C].

Resolución :



Diámetro de la cuerda = 10^{-3} m

$\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\rho_{acero} = 7{,}86 \times 10^3$ kg/m³

$Y_{acero} = 20 \times 10^{10}$ N/m²

Parte (a)

Sabemos que: $\rho_{acero} = \dfrac{M_{acero}}{Volumen}$

$$\Rightarrow\quad M_{acero} = (7{,}86 \times 10^3)(0{,}80)(\pi)\left[\frac{10^{-3}}{2}\right]^2$$

$$\therefore\quad M_{acero} = 4{,}94 \times 10^{-3}\ kg$$

Sabemos además que:

$$\text{Densidad lineal} = \mu = \frac{M_{acero}}{Longitud} = \frac{4{,}94\times10^{-3}}{0{,}80}$$

$$\therefore\quad \mu = 6{,}17 \times 10^{-3}\ kg/m$$

Parte (b)

Si: $f_1 = 200$ Hz

Entonces: $200 = \dfrac{1}{2(0{,}80)} \times \sqrt{\dfrac{T\times10^3}{6{,}17}}$

$$\therefore\quad T_{cuerda} = 632\ N$$

Parte (c)

Sabemos que: $\dfrac{T}{A} = Y\,.\,\dfrac{\Delta L}{L}$

Pero: $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha\,\Delta T$

$$\Rightarrow\quad T = Y.\alpha\Delta T.A = (20 \times 10^{10})(11 \times 10^{-6})(30)(\pi)(0{,}5)^2(10^{-3})^2$$

$$\therefore\quad T = 580\ N$$

Por otro lado: $L_{final} = 0{,}80\,[1 + 11 \times 10^{-6}\,(30)] = 0{,}800264$ m

Luego: $f_1 = \dfrac{1}{2(0{,}800264)} \times \sqrt{\dfrac{(580N)(0{,}800264)}{4{,}94\times10^{-3}}} = 192$ Hz

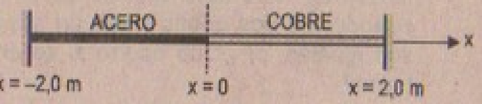
74. Dos alambres, uno de acero y uno de cobre, cada cual de 2,000 mm de diámetro, se unen extremo con extremo. A 40,0°C, cada uno tiene una longitud sin estirar de 2,000 m; se conectan entre dos soportes fijos separados 4,000 m sobre la cubierta de una mesa, de manera que el alambre de acero se extiende de x = –2,000 m a x = 0, el alambre de cobre se extiende de x = 0 a x = 2,000 m, y la tensión es despreciable. La temperatura se reduce después hasta 20,0°C. A esta temperatura encuentre la tensión en el alambre y la coordenada x de la unión entre los alambres. (Consulte las tablas 19.1 y 19.2).

Resolución :

Datos: $\alpha_{acero} = 11 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$\alpha_{acero} = 17 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

$T_{inicial} = 40°C$



Long. inicial (acero) = 2,00 m

Long. inicial (cobre) = 2,00 m

Diámetro de c/alambre = 2,000 mm

a $T_f = 20°C$

$L_{final\ del\ acero} = 2{,}00\ m\,[1 + 11 \times 10^{-6}\,(20 - 40)]$

$\therefore\quad L_{final\ del\ acero} = 1{,}99956$ m

Por otro lado: a $T_{final} = 20°C$

$L_{final\ del\ cobre} = 2{,}00\ m\,[1 + 17 \times 10^{-6}\,(20 - 40)]$

$\therefore\quad L_{final\ cobre} = 1{,}99932$ m

Luego la coordenada "x" de la unión será:

x = 2,0 – 1,99932 = 0,00068 m (tensión despreciable) $\therefore$ no cumple

ó x = –2,0 + 1,99956 = 0,00044 m (cumple)

Hallando la tensión a 20°C

Sabemos que: $\dfrac{T}{A} = Y_{acero}\,.\,\dfrac{\Delta L}{L}$

Además: $\dfrac{\Delta L}{L} = \alpha_{acero} \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad T_{alambre} = Y_{acero} \cdot \alpha_{acero} \cdot |\Delta T| \cdot A$$

$$\Rightarrow \quad T_{alambre} = (20 \times 10^{10})(11 \times 10^{-6})|-20|(\pi)(1{,}00 \times 10^{-3})^2$$

$$\therefore \quad T_{alambre} = 138\ \text{N}$$

75. Una barra bimetálica está formada por dos tiras delgadas de metales diferentes unidos entre sí. A medida que se calientan, el metal con el coeficiente de expansión más grande se expande más que el otro y hace que la barra se arquee, teniendo el radio exterior la mayor circunferencia (Fig. P19.75).
a) Obtenga una expresión para el ángulo de flexión θ como una función de la longitud inicial de las tiras, sus coeficientes de expansión lineal promedio, el cambio de temperatura y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$). b) Muestre que el ángulo de flexión se hace cero cuando ΔT es cero o cuando los dos coeficientes de expansión son iguales. c) ¿Qué ocurre si se enfría la barra?

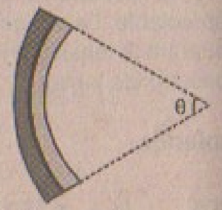
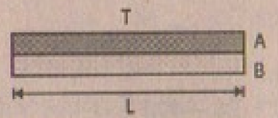


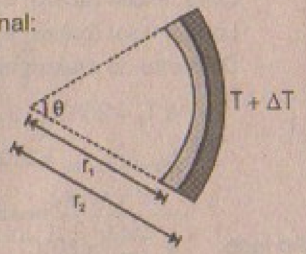
Fig. P19.75

Resolución :

Al inicio:



Al final:



Parte (a)

Sabemos que en un arco circular la longitud del arco es = θ.R

Entonces: $L_{final\,B} = L\,(1 + \alpha_B\,\Delta T) = \theta.r_2$

$L_{final\,A} = L\,(1 + \alpha_B\,\Delta T) = \theta.r_1$

Restando: B – A

Tenemos que: $\theta(r_2 - r_1) = L\Delta T\,(\alpha_B - \alpha_A)$

$$\therefore \quad \theta = \frac{L\Delta T}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A)$$

Parte (b)

Si $\quad \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{L(0)}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A) = 0$

Si $\quad \alpha_B = \alpha_A \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{L\Delta T}{r_2 - r_1}(0) = 0$

Parte (c)

Si se enfría la barra,entonces $\Delta T < 0$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{L}{r_2 - r_1}(\alpha_B - \alpha_A)(-\Delta T)\ \text{(en sentido horario)}$$

En consecuencia la barra se doblaría del otro modo.

Capítulo 20

CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

CALOR Y ENERGÍA TÉRMICA

1. Considere el aparato de Joule descrito en la figura 20.1. Las dos masas son de 1,50 kg cada una y el tanque se llena con 200 g de agua. ¿Cuál es el aumento de la temperatura del agua después de que las masas descienden una distancia de 3,00 m?

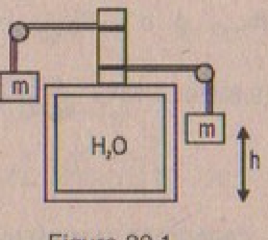


Figura 20.1

Resolución :

Datos: $m = 1{,}5$ kg $\quad M_{H_2O} = 0{,}2$ kg
$h = 3{,}00$ m

considerar: $g = 9{,}8$ m/s^2

Por conservación de energía

$$E_{M\ inicial} = E_{M\ final} = 2\ mgh = (1{,}5)(9{,}8)(3{,}0) = (44{,}1\ J) \times 2$$

Por otro lado: $\quad Q_{transferido(ganado\ del\ agua)} = E_{M\ final} = (44{,}1\ J) \times 2$

$$\Rightarrow \quad M\ .\ C_{e\ H_2O} = .\ \Delta T = (44{,}1\ J)(2)$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}2\ kg)\left(4\ 186 \frac{J}{kg\ °C}\right)\Delta T = (44{,}1\ J)(2)$$

$$\therefore \quad \Delta T = 0{,}105°C$$

2. Una persona de 80 kg que intenta bajar de peso desea subir una montaña para quemar el equivalente a una gran rebanada de pastel de chocolate tasada en 700 calorías (alimenticias). ¿Cuánto debe ascender la persona?

Resolución :

Datos: Masa de la persona = 80 kg
Calor de la rebanada de pastel = 700 cal
1 cal ≡ 4,186 J

$$W_{persona/montaña} = mgh = (80)(9{,}8)h$$

Por otro lado: $\quad 700\ cal \equiv 700\ cal \times \dfrac{4{,}186\ J}{1\ cal} \equiv 2{,}93 \times 10^3\ J$

Luego: $(80)(9,8)h = 2,93 \times 10^3$

$\therefore \quad h = 3,74$ m

En consecuencia: La persona debe de ascender 3,74 m hacia la montaña.

3. El agua en la parte superior de las cataratas del Niágara tiene una temperatura de 10°C. Si ésta cae una distancia total de 50 m y toda su energía potencial se emplea para calentar el agua, calcule la temperatura del agua en el fondo de la catarata.

Resolución:

$$\Delta U_{H_2O} = Q_{ganado\ H_2O}$$

$$\Rightarrow \quad m_{H_2O} \cdot g \cdot h = C_{e_{H_2O}} \cdot m_{H_2O} \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (9,8)(50) = 10^3 \times \frac{cal}{kg.°C} \times \frac{4,186\ J}{1\ cal} \times (T_f - 10°C)$$

$$\therefore \quad T_f = T_{en\ el\ fondo} = 10,117°C$$

CAPACIDAD CALORÍFICA, CALOR ESPECÍFICO Y CALOR LATENTE

4. ¿Cuántas calorías de calor son necesarias para aumentar la temperatura de 3,0 kg de aluminio de 20°C a 50°C?

Resolución:

Sabemos que: $Q = m \cdot C_e \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q = m_{alum} \cdot C_{e\ Al} \cdot (50 - 20)°C$$

$$\Rightarrow \quad Q = (3,0\ kg)\left(900 \cdot \frac{J}{kg.°C}\right)(30°C)$$

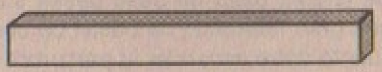
$$\therefore \quad Q = 81\ 000\ J \equiv 1,94 \times 10^4\ cal$$

5. La temperatura de una barra de plata aumenta 10,0°C cuando absorbe 1,23 kJ de calor. La masa de la barra es de 525 g. Determine el calor específico de la plata.

Resolución:

Masa de la barra = 525 g $\qquad C_{e(Ag)} = ?$

$Q = 1,23$ kJ



$\Delta T = 10°C$

Barra de plata

Sabemos que: $Q = m\, C_e\, \Delta T$

$$\Rightarrow \quad 1,23 \times 10^3\ J = (525 \times 10^{-3}\ kg)(C_e)(10°C)$$

$$\Rightarrow \quad C_{e\ (plata)} = \frac{123 \times 10^2}{525 \times 10^{-3}}\ \frac{J}{kg.°C}$$

$$\therefore \quad C_{e\ (plata)} = 2,34 \times 10^2\ J/kg.°C$$

6. Si 100 g de agua a 100°C se vierten dentro de una taza de aluminio de 20 g que contiene 50 g de agua a 20°C, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?

6A. Si una masa m_h de agua a T_h se vierte dentro de una taza de aluminio de masa m_{Al} que contiene m_c de agua fría a T_c donde $T_h > T_c$, ¿cuál es la temperatura de equilibro del sistema?

Resolución:

Datos: $m_{H_2O}\ (100°C) = 0,1$ kg $\qquad C_{e(H_2O)} = 10^3$ J/kg.°C

$m_{taza\ de\ Al} = 0,02$ kg $\qquad C_{e(Al)} = 900$ J/kg°C

$m_{H_2O}\ (20°C) = 0,05$ kg

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

Entonces: $$Q_{perdido} = (0,1\ kg)\left(10^3\ \frac{l}{kg\ .°C}\right)(100 - T_E)$$

$$Q_{ganado} = (0,05)(10^3)(T_E - 20) + (0,02)(900)(T_E - 20)$$

Entonces:

$$(0,1)(10^3)(100 - T_E) = (0,05)(10^3)(T_E - 20) + (0,02)(900)(T_E - 20)$$

$$\therefore \quad T_E = 67,62°C$$

7. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio final cuando 10 g de leche a 10°C se agregan a 160 g de café a 90°C? (Suponga que las capacidades caloríficas de los dos líquidos son las mismas que las del agua, e ignore la capacidad calorífica del recipiente).

Resolución:

Datos: $m_{leche} = 10$ g ; $T_{inicial} = 10°C$; $C_{e\ leche} = C_{e\ café} = C_{e\ H_2O}$

$m_{café} = 160$ g ; $T_{inicial} = 90°C$; $T_{equil.} = ?$

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$Q_{ganado} = m_{leche} \cdot C_e\ (T_E - 10)$

$Q_{perdido} = m_{café} \cdot C_e\ (90 - T_E)$

Luego: $m_{leche}\, C_e \cdot (T_E - 10) = m_{café} \cdot C_e\ (90 - T_E)$

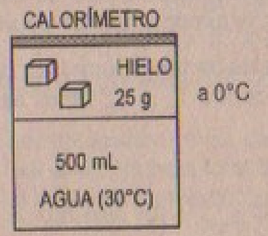
$$\Rightarrow \quad 10\ g\ (T_E - 10) = 160\ g\ (90 - T_E)$$

$$\Rightarrow \quad 17T_E = 90,16 + 10$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 85,3°C$$

8. a) Un calorímetro contiene 500 ml de agua a 30°C y 25 g de hielo a 0°C. Determine la temperatura final del sistema. b) Repita el inciso a) si 250 g de hielo están presentes inicialmente a 0°C.

Resolución:



Calor latente de fusión = $3{,}33 \times 10^5$ J/kg

$T_{final} = ?$

$C_e = 1$ cal/g.°C ; $C_{e\,hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

Parte (a)

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

Entonces: $Q_{ganado(hielo)} = Q_{fusión} + m_{\substack{Agua\\hielo}} \cdot C_e\,(T_f - 0)$

$Q_{perdido(agua)} = m_{H_2O} \cdot C_e \cdot (30 - T_f)$

Entonces: $(0{,}025)(3{,}33 \times 10^5) + 2(0{,}5)(0{,}025) \times 10^3\,(T_f) = (500\text{ g})(1)(30 - T_f)$

$\Rightarrow \quad 8\,325\text{ J} \times \dfrac{1\text{ cal}}{4{,}186\text{ J}} + 2(12{,}5)T_f = 15\,000 - 500T_f$

$\Rightarrow \quad 525{,}0\,T_f = 15\,000 - 1\,998{,}772$

$\therefore \quad T_{final} = 24{,}76°C$

Parte (b)

$m_{hielo} = 250$ g

Entonces: $Q_{ganado\,(hielo)} = Q_{fusión} + m_{H_2O} \cdot C_e\,(T_f - 0)$

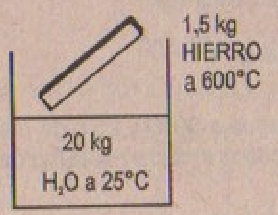
$Q_{ganado(hielo)} = (0{,}25\text{ kg})(3{,}33 \times 10^5) + (250)(1{,}00)\,T_f$

Además: $Q_{perdido}\,(agua) = (500\text{ g})(1{,}00)(30 - T_f)$

Luego: $\dfrac{(0{,}25)(3{,}3\times10^5)}{4{,}186}\text{ cal} + (250)(1)T_f = 500(30 - T_f)$

9. Una herradura de hierro de 1,5 kg inicialmente a 600°C se sumerge en una cubeta que contiene 20 kg de agua a 25°C. ¿Cuál es la temperatura final? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente).

Resolución:



$C_{e\,hierro} = 448$ J/kg.°C

$C_{e\,agua} = 4\,186$ J/kg.°C

$Q_{ganado\,(agua)} = Q_{perdido\,(hierro)}$

$\Rightarrow \quad (20)(4\,186)(T_E - 25°) = (1{,}5)(448)(600 - T_E)$

$\Rightarrow \quad 84\,392T_E = 2\,496\,200$

$\therefore \quad T_{equilibrio} = 29{,}6°C$

10. La temperatura del aire en áreas costeras se ve influida considerablemente por el gran calor específico del agua. Una razón es que el calor liberado cuando 1 metro cúbico de agua se enfría 1,0°C aumentará la temperatura de un volumen enormemente más grande de aire en 1,0°C. Calcule este volumen de aire. El calor específico del aire es aproximadamente 1,0 kJ/kg.°C. Considere la densidad del aire igual a 1,25 kg/m³.

Resolución:

Datos:

Al inicio: $1\text{m}^3\,(H_2O)$ = Volumen ; ? = volumen (aire)

$1{,}0°C = \Delta T\,(H_2O)$; $1{,}0°C = \Delta T$ (aire)

Además: $\rho_{aire} = 1{,}25$ kg/m³ $\quad C_{e(aire)} = 1{,}0$ kJ/kg.°C

sabemos que: $\rho_{H_2O} = \dfrac{m_{H_2O}}{V_{H_2O}} \quad \Rightarrow \quad m_{H_2O} = 10^3\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 1\text{ m}^3 = 10^3\text{ kg}$

además: $\rho_{aire} = \dfrac{m_{aire}}{V_{aire}} \quad \Rightarrow \quad m_{aire} = 1{,}25\text{ kg/m}^3 \times V_{aire}$

Por otro lado: $Q_{ganado\,(aire)} = Q_{perdido\,(agua)}$

$\Rightarrow \quad m_{aire} \cdot C_{e\,aire} \cdot \Delta T = m_{agua} \cdot C_{e\,agua} \cdot \Delta T$

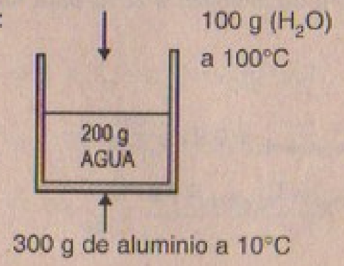
$\Rightarrow \quad (1{,}25)(V_{aire})\left(1{,}0\times10^3\,\dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}}\right) = (10^3\text{ kg})\left(4186\,\dfrac{\text{J}}{\text{kg°C}}\right)$

$\therefore$ Volumen del aire = 3,35 m³

11. Si 200 g de agua están contenidos en un recipiente de aluminio de 300 g a 10°C y 100 g adicionales de agua a 100°C se vierten en el recipiente, ¿cuál es la temperatura de equilibrio final del sistema?

Resolución:

Se añade:



$C_{e(Al)} = 0{,}215\,\dfrac{\text{cal}}{\text{g.°C}}$

$C_{e(H_2O)} = 1{,}00\,\dfrac{\text{cal}}{\text{g.°C}}$

Sabemos que: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$\Rightarrow \quad Q_{ganado\ (agua)} + Q_{ganado\ (recipiente)} = Q_{perdido\ (agua)}$

$\Rightarrow \quad 200\ g\left(1{,}00\ \frac{cal}{g.°C}\right)(T_E - 10°) + 300\ g\left(0{,}215\ \frac{cal}{g°C}\right)(T_E - 10)$

$= 100\ g\left(\frac{1\ cal}{g.°C}\right)(100 - T_E)$

$\Rightarrow \quad 364{,}5\ T_E = 12\ 645$

$\therefore \quad T_{equilibrio} = 34{,}7°C$

12. Un estudiante inhala aire a 22°C y exhala aire a 37°C. El volumen promedio del aire en una respiración es de 200 cm^3. Ignore la evaporación del agua en el aire y calcule la cantidad de calor absorbido en un día por el aire respirado por el estudiante. La densidad del aire es aproximadamente igual a 1,25 kg/m^3, y el calor específico del aire es 1 000 J/kg.°C.

Resolución :

Datos: $T_{inicial\ (estudiante)} = 22°C$ (inhala aire)

$T_{final\ (estudiante)} = 37°C$ (exhala aire)

Volumen promedio (aire) = 200 cm^3

$\rho_{aire\ promedio} = 1{,}25\ kg/m^3$

$C_{e\ aire} = 10^3\ J/kg.°C$

$Q_{absorvido\ estud} = m_{aire}\, C_e\, \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = \rho_{aire} \cdot V_{aire}\, C_e\, \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = \left(1{,}25\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(200\ cm^3 \times \frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}\right)\left(10^3\ \frac{J}{kg°C}\right)(37 - 22)°C$

$\therefore \quad Q_{absorbido\ por\ el\ estudiante} = 3{,}75\ MJ$

En consecuencia: $\frac{Q}{1\ Día} = \frac{3{,}75\ MJ}{1\ Día} \times \frac{1\ Día}{24\ h} \times \frac{1\ h}{3600\ s} = 43{,}4\ J/s$

13. ¿Cuánto calor debe agregarse a 20 g de aluminio a 20°C para fundirlo completamente?

Resolución :

Datos: $m_{aluminio} = 20{,}0\ g$; $C_{e\ (aluminio)} = 0{,}215\ \frac{cal}{g°C}$

$T_{inicial} = 20°C$; $T_{final} = T_{fundición} = 660°C$

$Q = ?$

$Q_{fundición\ total} = Q_{fusión} + Q_{ganado}$

$\Rightarrow \quad Q_{fundición\ total} = (20{,}0 \times 10^{-3}\ kg)(3{,}97 \times 10^5\ \frac{J}{kg})$

$+ (20\ g)(0{,}215\ \frac{cal}{g.°C})\ (640°C)\left(\frac{4{,}186\ J}{1\ cal}\right)$

$\Rightarrow \quad Q_{fundición\ total} = 7\ 940\ J + 11\ 520\ J$

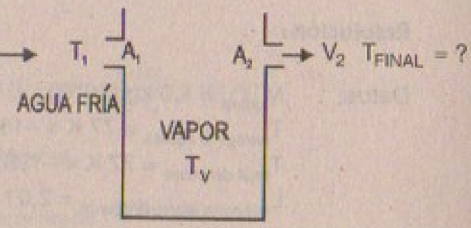
$\therefore \quad Q_{fundición\ total\ (aluminio)} = 19\ 460\ J = 19{,}46\ kJ$

14. Un recipiente aislado contiene vapor saturado que se enfría cuando fluye agua fría por un tubo que pasa por el recipiente. La temperatura del agua que entra es de 273 K. Cuando la velocidad del flujo es de 3,0 m/s, la temperatura del agua que sale es igual 303 K. Determine la temperatura del agua saliente cuando la velocidad de flujos se reduce a 2,0 m/s. Suponga que la tasa de condensación permanece invariable.

14A. Un recipiente aislado contiene vapor saturado que se enfría cuando fluye agua fría por un tubo que pasa por el recipiente. La temperatura del agua que entra es de T_L. Cuando la velocidad del flujo es V_1, la temperatura del agua que sale es T_{sal}. Determine la temperatura del agua saliente cuando la velocidad de flujo se reduce a V_2. Suponga que la tasa de condensación permanece invariable.

Resolución :

Sabemos que: $Q_{entra} = Q_{sale}$



$\Rightarrow \quad m_{H_2O} \times C_e\,(T_V - T_1)$

$= m_{H_2O}\, C_e\,(T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad \rho_{H_2O}$. volumen $(T_V - T_1) = \rho_{H_2O}$. volumen $(T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad \frac{A_1 v_1}{v}(T_V - T_I) = \frac{A_2 v_2}{v}(T_f - T_V)$

$\Rightarrow \quad v_1 T_V - v_1 T_1 = v_2 T_f - v_2 T_V$

$\Rightarrow \quad T_V (v_1 + v_2) = v_2 T_f + v_1 T_1$

$\therefore \quad T_{final} = \frac{T_V (v_1 + v_2) - v_1 T_1}{v_2}$

15. Un calentador de agua funciona por medio de potencia solar. Si el colector solar tiene un área de 6,0 m^2 y la potencia entregada por la luz solar es de 550 W/m^2, ¿cuánto tarda en aumentar la temperatura de 1,0 m^3 de agua de 20°C a 60°C?

Resolución :

Sabemos que: $\dfrac{\text{Potencia entregada}}{\text{área}} = 550\ \dfrac{W}{m^2}$

Entonces $P_{\substack{\text{Entrega luz}\\ \text{al colector}}} = (550)(6) = 3\,300\ W = 33 \times 10^2\ J/s$

Por otro lado: $Q_{\text{requerido }(20°C \to 60°C)} = W_{\text{luz/agua}} = m_{H_2O} \cdot C_{eH_2O} \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{requerido}} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} \cdot C_{e\,H_2O} \cdot \Delta T = (10^3)(1,0)(4\,186)(60-20)$

$\therefore \quad W_{\text{luz/agua}} = 16\,744 \times 10^4\ J$

Si: 33×10^2 J ____ se entrega ____ 1 s

$16\,744 \times 10^4$ J ___ se entrega ____ x s

$\therefore \quad x = 50,7$ ks

16. Un bloque de cobre de 1,0 kg a 20°C se sumerge en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77 K. ¿Cuántos kilogramos de nitrógeno hierven en el momento en que el cobre alcanza 77 K? (El calor específico del cobre es 0,092 cal/g.°C. El calor latente de vaporización del nitrógeno es 48 cal/g.)

Resolución :

Datos: $M_{\text{cobre}} = 1,0$ kg (20°C)

$T_{\text{nitrógeno líquido}} = 77\ K \equiv -195,81°C$

$T_{\text{final del cobre}} = 77\ K \equiv -195,81°C$

$L_{\text{evaporización (nitrógeno)}} = 2,01 \times 10^5\ J/kg$

$C_{e\,\text{cobre}} = 0,092$ cal/g.°C

Por el principio de equilibrio térmico:

$Q_{\text{perdido por el cobre}} = Q_{\text{ganado x nitrógeno}} = Q_{\text{vapor.}}$

$\Rightarrow \quad m_{\text{cobre}} \times C_e \times \Delta T = m_{\text{nitrógeno}} \times L_{\text{vapor.}}$

$\Rightarrow \quad (1{,}0\,kg) \times 0{,}092 \times 10^3\, \dfrac{cal}{kg.°C} \times (293{,}15\,K - 77\,K) = M_{\text{nitrógeno}} \times 2{,}01 \times 10^5 \times \dfrac{1\ cal}{4{,}186\ J}$

$\Rightarrow \quad (92)(216,15\ K) = M_{\text{nitrógeno}} \times 48017,2$

$\therefore \quad M_{\text{nitrógeno}} = \dfrac{92 \times (57)}{4\ 8017,2} = 0,109$ kg

17. ¿Cuánto calor se necesita para evaporar un cubo de hielo de 1,0 g inicialmente a 0°C? El calor latente de fusión del hielo es 80 cal/g y el calor latente de vaporización del agua es 540 cal/g.

Resolución :

Datos: $M_{\text{hielo}} = 1,0$ g (a 0°C)

$L_{\text{fusión}} = 80$ cal/g (hielo)

$L_{\text{vaporización (agua)}} = 540$ cal/g

$Q_{\text{necesario}} = Q_{\text{fusión}} + Q_{\text{ganado}} + Q_{\text{vaporización}}$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{necesario}} = (1,0\ g)\left(80\dfrac{cal}{g}\right) + (1,0\ g)(1,0\dfrac{cal}{g.°C})(100°C) + (1,0\ g)(540\dfrac{cal}{g})$

$\therefore \quad Q_{\substack{\text{necesario para evaporar}\\ \text{un gramo de leche}}} = 720$ cal

18. Con un litro de agua a 30°C se prepara té helado. ¿Cuánto hielo a 0°C debe agregarse para reducir la temperatura del té a 10°C?

Resolución :

Datos: Volumen de agua a 30°C = 1 litro = $10^3\ cm^3$

Masa de hielo = ? ; $T_{\text{hielo}} = 0°C$; $L_{\text{fusión hielo}} = 80\ \dfrac{cal}{g}$

$T_{\text{final (té)}} = 10°C$

$Q_{\text{perdido x (té)}} = M_{H_2O} \cdot C_e \cdot \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{\text{perdido (té helado)}} = 1,0\ \dfrac{cal}{cm^3} \times 10^3\ cm^3 \times \dfrac{1\ cal}{g.°C} \times (20°C)$

$\therefore \quad Q_{\text{perdido (té helado)}} = 20$ kcal

Por otro lado: $Q_{\text{fusión}} + Q_{\text{ganado}} = Q_{\text{perdido (té helado)}} = 20$ kcal

$\Rightarrow \quad M_{\text{hielo}} \times 80\ \dfrac{cal}{g} + M_{\text{hielo (agua)}} \cdot C_e \cdot \Delta T = 20$ kcal

$\Rightarrow \quad \left(80\dfrac{cal}{g} + 10\dfrac{cal}{g}\right) M_{\text{hielo}} = 20 \times 10^3$ cal

$\therefore \quad M_{\text{hielo}} = 0,22$ kg

19. Cuando un conductor frena un automóvil, la fricción entre los tambores y las balatas de los frenos convierten la energía cinética del auto en calor. Si un automóvil de 1500 kg que viaja a 30 m/s se detiene, ¿cuánto aumenta la temperatura en cada uno de los cuatro tambores de hierro de 8 kg de los frenos? (Ignore la pérdida térmica hacia los alrededores).

Resolución:

Datos: $M_{automóvil} = 1\,500$ kg ; $v_{automóvil} = 30$ m/s

$M_{c/tambor\ hierro} = 8$ kg ; $C_{e\ hierro} = 448\ \dfrac{J}{kg.°C}$

$\Delta T = ?$

$$E_{K\ automóvil} = Q_{perdido \times auto} = Q_{ganado \times tambores}$$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}(1\,500)(30)^2 = 4(M\ c/tambor)\ C_{e\ hierro} \times \Delta T$

$\Rightarrow\ 750(30)^2 = 4(8\ kg)(448)\ \Delta T$

$\therefore\ \Delta T = 47{,}1°C$

20. Si 90,0 g de plomo fundido a 327,3°C se vierten en una pieza de 300,0 g fundida de hierro inicialmente a 20,0°C, ¿cuál es la temperatura final del sistema? (Suponga que no hay pérdidas de calor).

Resolución:

Datos: $M_{plomo\ fundido\ a\ 327°C} \doteq 90{,}0$ g $\qquad L_{fusión} = 2{,}45 \times 10^4\ \dfrac{J}{kg}$

$M_{pieza\ de\ hierro\ fundida\ a\ 20°C} = 300{,}0$ g

$C_{e\ plomo} = 0{,}0305$ cal/g.°C $\qquad C_{e\ hierro} = 0{,}107$ cal/g.°C

$T_{equilibrio} = ?$

Por equilibrio y principio de la calorimetría:

$$(Q_{fusión} + Q_{perdido})_{plomo} = Q_{ganado\ (hierro)}$$

$\Rightarrow\ 2{,}45 \times 10^4\ \dfrac{J}{kg}\left(\dfrac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)\left(\dfrac{1\ kg}{1\,000 g}\right) \times (90{,}0\ g) + (90{,}0\ g)\left(0{,}0305\ \dfrac{cal}{g.°C}\right)(\Delta T)$

$= (300\ g)\left(0{,}107\ \dfrac{cal}{g.°C}\right)(T_{equil.} - 20°C)$

$\Rightarrow\ 526{,}76\ cal + 2{,}745\ (327{,}3 - T_{equil.}) = 32{,}1\ (T_{equil.} - 20)$

$\Rightarrow\ 526{,}76\ cal + 898{,}44 - 2{,}745\ T_{equil.} = 32{,}1\ T_{equil.} - 642$

$\therefore\ T_{equilibrio} = 59{,}32°C$

21. En un recipiente aislado se agregan 250 g de hielo a 0°C a 600 g de agua a 18°C. a) ¿Cuál es la temperatura final del sistema? b) ¿Qué cantidad de hielo queda cuando el sistema alcanza el equilibrio?

Resolución:

Datos: Masa de hielo a 0°C = 250 g ; $C_{e\ hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

Masa de agua a 18°C = 600 g ; $C_{e\ H_2O} = 1{,}0$ cal/g.°C

Parte (a)

$$Q_{calor\ (que\ se\ cede)} = (600\ g)\left(1\ \frac{cal}{g.°C}\right)(18 - 0) = 10{,}8\ kcal$$

$$Q_{hielo\ (ganado)} = m\ L_{fusión} = (250\ g)\left(80\ \frac{cal}{g.°C}\right) = 20\ kcal$$

En consecuencia:

No se derretirá todo el hielo, luego:

$\therefore\ T_{equilibrio} = 0°C$

Parte (b) $\quad 10{,}8\ kcal = m_{hielo} \times L_{fusión}$

$\Rightarrow\ 10{,}8\ kcal = m_{hielo} \times 80\ \dfrac{cal}{g}$

$\therefore\ m_{hielo} = 135$ g (se transforman en agua)

En consecuencia: quedará de hielo = 250 g − 135 g = 115 g

22. Un cubo de hielo de 50 g a −20,0°C se sumerge en un recipiente de agua a 0,0°C. ¿Qué cantidad de agua se congela sobre el hielo?

Resolución:

Datos: M_{hielo} (a − 20,0°C) = 50 g $\qquad C_{e\ hielo} = 0{,}5$ cal/g.°C

$T_{agua} = 0°C$; $\qquad C_{e\ H_2O} = 1$cal/g.°C

$M_{H_2O} = ?$

$$Q_{cede\ (agua)} = M_{H_2O} \cdot \left(80\ \frac{cal}{g}\right)$$

$$Q_{gana\ (hielo)} = Q_{fusión} + Q_{ganado} = (50\ g)\left(80\ \frac{cal}{g}\right) + (50)(0{,}5)(20)\ cal$$

$\therefore\ Q_{requiere} = 4{,}5$ kcal

Luego:

$M\ .\ 80\dfrac{cal}{g} = 4{,}5 \times 10^3$ cal $\qquad \therefore\ M_{H_2O} = 56{,}25$ g (que se congela)

23. Un clavo de hierro se clava dentro de un bloque de hielo por medio de un solo golpe de martillo. La cabeza de éste tiene una masa de 0,50 kg y una velocidad inicial de 2,0 m/s. El clavo y el martillo se encuentran en reposo después del golpe. ¿Cuánto hielo se funde? Suponga que la temperatura del clavo es 0,0°C antes y después.

Resolución :

Datos: $M_{cabeza\ del\ clavo} = 0{,}5$ kg ; $v_{inicial\ (clavo)} = 2{,}0$ m/s

$T_{inicial\ del\ clavo} = 0°C$; $C_{e\ hierro} = 448$ J/kg.°C

$M_{hielo} = ?$; $C_{e\ hierro} = 2\ 090$ J/kg.°C

$$Q_{calor\ que\ pierde\ el\ clavo} = E_{k\ clavo} = \frac{1}{2}(0{,}5)(2{,}0)^2 = 1\ J$$

$$Q_{calor\ que\ gana\ hielo} = mL_{fusión}$$

Entonces por el principio de calorimetría:

$$Q_{ganado} = Q_{perdido}$$

$$\Rightarrow \quad M_{hielo} \times 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg} = 1J$$

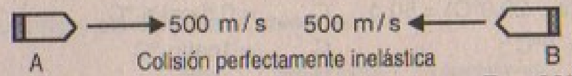
$$\therefore \quad M_{hielo\ que\ se\ funde} = 3 \times 10^{-6}\ kg = 3{,}00\ \mu g$$

24. Dos balas de plomo de 5,0 g, ambas a temperatura de 20°C, chocan de frente cuando cada una se mueve a 500 m/s. Suponiendo una colisión perfectamente inelástica y ninguna pérdida de calor hacia la atmósfera, describa el estado final del sistema de las dos balas.

Resolución :

$$M_{bala\ A} = M_{bala\ B} = 5{,}0\ g$$

Bala de plomo



$T_A = 20°C$ $\qquad$ $T_B = 20°C$

Sabemos que en una colisión perfectamente inelástica los cuerpos después del choque se mantienen unidos, disminuyendo la E_K del sistema.

Entonces: $\vec{P}_I = \vec{P}_f$

$$\Rightarrow \quad (5 \times 10^{-3}\ kg)(500) - (5 \times 10^{-3}\ kg)(500) = 0$$

como: $E_{K\ inicial} = 2\left(\frac{1}{2}\right)(0{,}005)(500)^2 = 1\ 250\ J$

Entonces: $E_{K\ inicial\ \text{sistema}} = Q_{transformación\ (liberado)\ \text{(sistema)}}$

25. Un centavo de cobre de 3,0 g a 25°C se sumerge 50 m en la tierra. a) Si 60% de la energía potencial se emplea en aumentar la energía interna, determine su temperatura final. b) ¿El resultado final depende de la masa del centavo? Explique.

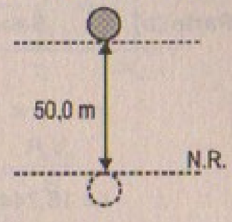
Resolución :

Datos: $M_{cobre} = 3{,}0$ g ; $T_{cobre} = 25°C$

Profundidad de la tierra = 50,0 m

Parte (a)

Centavo de cobre



$$U_{potencial} = mgh = (3 \times 10^{-3}\ kg)(9{,}8\ \frac{m}{s^2})(50)$$

$$= 1{,}47\ J$$

Entonces $60\%\ U_{potencial} = (0{,}6)(1{,}47\ J)$

$$= 0{,}882\ J$$

Por dato: $U_{interna} = Q = 0{,}6\ U_{potencial}$

$$\Rightarrow \quad Q_{térmico} = 0{,}882\ J = m_{cobre} \cdot C_e \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}882\ J = (3 \times 10^{-3}\ kg)(387\ \frac{J}{kg.°C})(T_f - 25°C)$$

$$\therefore \quad T_{final} = 25{,}76°C$$

Parte (b)

Para hallar la temperatura final:

$$(0{,}6)(mgh) = mC_e\Delta T$$

$$\therefore \quad \Delta T = \frac{(0{,}6)gh}{C_e} = 60\%\ \frac{gh}{C_{e(cobre)}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{final} = T_0 + 60\%\left(\frac{gh}{C_e}\right)$$

Podemos concluir que:

El resultado final no depende de la masa del centavo.

26. El lago Erie contiene cerca de $4{,}0 \times 10^{11}$ m³ de agua. a) ¿Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de ese volumen de agua de 11°C a 12°C? b) ¿Aproximadamente cuántos años tomaría suministrar esta cantidad de calor empleando la salida completa de una central eléctrica de 1 000 MW?

Resolución :

Datos: Volumen del agua = $4{,}0 \times 10^{11}$ m³

Parte (a)

$Q_{requiere} = ?$; $T_{final} = 12°C$; $T_{inicial} = 11°C$

Entonces: $Q_{que\ se\ requiere} = m_{agua} \cdot C_{e\ agua} \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{que\ se\ requiere} = \rho_{H_2O} \cdot \text{Volumen}\ \Delta T\ C_e$$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{que se requiere}} = 10^3\,\frac{kg}{m^3} \times 4{,}0 \times 10^{11}\ m^3 \times 4\,186\ \frac{J}{kg.^\circ C} \times 1^\circ C \left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{que se requiere}} = 4 \times 10^{14}\ kcal$$

Parte (b) Sabemos que: $\dfrac{Q}{t} = P = 10^3\ \dfrac{MJ}{s}$

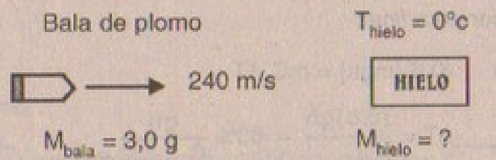
$$\Rightarrow \quad 4 \times 10^{17}\ cal = 10^3 \times M \times \frac{J}{s} \times \left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right) \times t$$

$$\therefore \quad t = 16{,}744 \times 10^8\ s\left(\frac{1\ \text{año}}{365\ \text{días}} \times \frac{1\ \text{día}}{24\ h} \times \frac{1\ h}{3\,600\ s}\right) \equiv 53{,}09\ \text{años}$$

27. Una bala de plomo de 3,0 g se desplaza a 240 m/s cuando se incrusta en un bloque de hielo a 0°C. Si todo el calor generado funde el hielo, ¿qué cantidad de hielo se derrite? (El calor latente de fusión para el hielo es de 80 kcal/kg y el calor específico del plomo es de 0,030 kcal/kg.°C).

Resolución :

Datos:



Sabemos que (por dato) $L_{\text{fusión hielo}} = 80\ kcal/kg$

$C_{e\ plomo} = 0{,}030\ kcal/kg^\circ.C$

Decimos que:

$$Q_{\text{generado por la bala}} = E_{K\ bala} = Q_{\text{transformación (hielo)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3{,}0 \times 10^{-3})(240)^2 = M_{hielo} \times 80 \times 10^3\ \frac{cal}{kg} \times \left(\frac{4{,}186\ J}{1\ cal}\right)$$

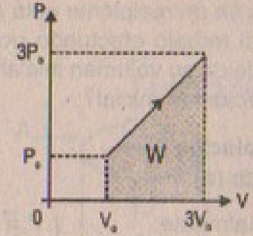
$$\therefore \quad M_{\text{hielo que se funde}} = 0{,}258\ g \text{ si la bala está a } 0^\circ C$$

TRABAJO Y CALOR EN PROCESOS TERMODINÁMICOS

28. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que pasa del estado (P_0, V_0) al estado ($3P_0$, $3V_0$). Este cambio ocurre de tal manera que la presión del gas es directamente proporcional al volumen. a) ¿Cuánto trabajo se efectúa en el proceso? b) ¿Cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?

Resolución :

Parte (a)



$$\text{Trabajo} = W = \left(\frac{P_0 + 3P_0}{2}\right)(3V_0 - V_0)$$

$$\therefore \quad W = 4P_0\,V_0$$

Parte (b)

Inicialmente: $P_0\,V_0 = R\,T_{inicial}$ $\quad\therefore\quad T_{inicial} = \dfrac{P_0V_0}{R}$

Finalmente: $3^2P_0\,V_0 = RT_{final}$ $\quad\therefore\quad T_{final} = \dfrac{9P_0V_0}{R}$

29. Un gas se expande de I a F a lo largo de tres posibles trayectorias, como se indica en la figura P20.29. Calcule el trabajo en joules realizado por el gas a lo largo de las trayectorias IAF, IF e IBF.

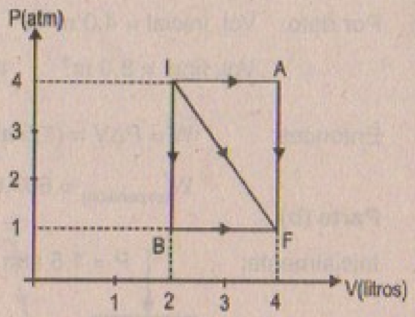


Figura P20.29

Resolución :

$$\text{Trabajo (IAF)} = W_{IA} + W_{AF} = W_{IA} + 0$$

$$\therefore \quad W_{(IAF)} = (4\ atm)(4-2)\ \text{litros} = 8\ atm \times \text{litros} \times \frac{10^3 cm^3}{1\ \text{litro}} \times \frac{1\ m^3}{10^6 cm^3} \times \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\ N/m^2$$

$$\therefore \quad W_{(IAF)} = 810\ J$$

Por otro lado: $\quad \text{Trabajo (IF)} = \left(\dfrac{4+1}{2}\right)(2) = 5\ atm\ .\ \text{litros}\ \dfrac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\ \dfrac{N}{m^2} \times \dfrac{10^{-3} m^3}{1\ \text{litros}}$

$$\therefore \quad W_{(IF)} = 506\ J$$

Por último: $\quad \text{Trabajo (IBF)} = W_{IB} + W_{BF} = 0 + W_{BF}$

$$\Rightarrow \quad W_{(IBF)} = 2\ atm \times \text{litros} \times \frac{10^{-3} m^3}{1\ \text{litro}} \times (1{,}013 \times 10^5\ N/m^2)$$

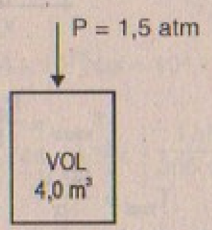
$$\therefore \quad W_{(IBF)} = 203\ J$$

30. Gas en un recipiente está a una presión de 1,5 atm y un volumen de 4,0 m^3. ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas si a) se expande a presión constante hasta el doble de su volumen inicial y b) se comprime a presión constante hasta un cuarto de su volumen inicial?

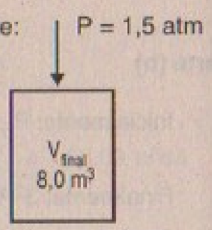
Resolución:

Parte (a)

Inicialmente:



Finalmente:



Por dato: Vol. inicial = 4,0 m^3

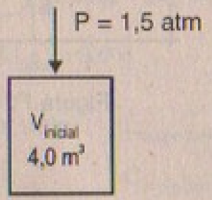
Vol. final = 8,0 m^3 a P = cte

Entonces: $W = P\Delta V = (1{,}5\ \text{atm})(4\ m^3)\times\dfrac{1{,}013\times10^5}{1\ \text{atm}}\ N/m^2$

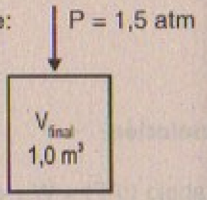
$\therefore\ W_{(expansión)} = 607{,}8\ kJ$

Parte (b)

Inicialmente:



Finalmente:



Entonces: $W = P\,\Delta V = (1{,}5\ \text{atm})(1{,}0\ m^3 - 4{,}0\ m^3)\times\dfrac{1{,}013\times10^5}{1\ \text{atm}} N/m^2$

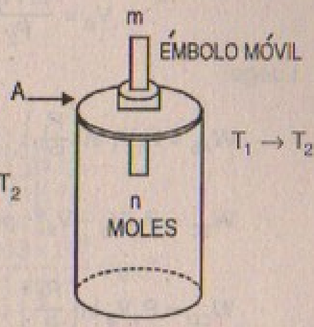
$\therefore\ W_{(compresión)} = -456\ kJ$

31. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo móvil en la parte superior. El émbolo tiene una masa de 8 000 g y un área de 5,0 cm^2, y se puede mover libremente hacia arriba y hacia abajo, manteniendo constante la presión del gas, ¿Cuánto trabajo se hace cuando la temperatura de 0,20 moles del gas se eleva de 20°C a 300°C?

31A. Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo móvil en la parte superior. El émbolo tiene una masa *m* y un área *A*, y se puede mover libremente hacia arriba y hacia abajo, manteniendo la presión del gas constante. ¿Cuánto trabajo se hace cuando la temperatura de *n* moles del gas se eleva de T_1 a T_2?

Resolución:

P = cte



Sabemos que: $\dfrac{F}{A} = \dfrac{\text{Peso del émbolo}}{A} = P$

Por otro lado: $V_1 = \dfrac{nR}{P}.T_1 \quad \wedge \quad V_2 = \dfrac{nR}{P}.T_2$

$\Rightarrow\quad \Delta V = (T_2 - T_1)\dfrac{nR}{P}$

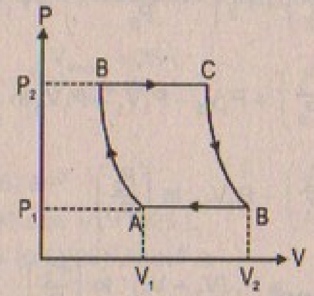
Como: $W = P\Delta V$

Luego: $W = P(T_2 - T_1)\dfrac{nR}{P} \qquad \therefore\ W = nR(\Delta T)$

32. $W_{neto} = P_1\,(V_2 - V_1)\ln\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)$

Resolución:

Dada la figura:



Por demostrar que:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1)\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Sabemos que: $W_{neto} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$ ...(α)

Por otro lado:

$$\underbrace{T_A = T_B}_{\text{Isoterma}} = \frac{P_1V_1}{Rn} \quad ; \quad \underbrace{T_C = T_D}_{\text{Isoterma}} = \frac{P_2V_2}{Rn}$$

Además; se cumple que:

$$V_c = \frac{nRT_C}{P_2} = \left(\frac{nR}{P_2}\right)\left(\frac{P_1.V_2}{nR}\right) = \frac{P_1.V_2}{P_2}$$

$$V_B = \frac{nRT_B}{P_2} = \left(\frac{nR}{P_2}\right)\left(\frac{P_1.V_1}{nR}\right) = \frac{P_1.V_1}{P_2}$$

Luego:

$$W_{AB} = P_1V_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ ; puesto que: } PV = cte$$

$$W_{BC} = P_2(V_c - V_B) \text{ ; puesto que: } P = cte$$

$$W_{CD} = P_1V_2 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \text{ ; puesto que: } PV = cte$$

$$W_{DA} = P_1(V_1 - V_2) \text{ ; puesto que: } P = cte$$

Entonces reemplazando en (α) resulta que:

$$W_{neto} = P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + P_2\left(\frac{P_1V_2 - P_1V_1}{P_2}\right) + P_1V_2 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + P_1(V_1 - V_2)$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + P_1V_2 - P_1V_1 + P_1V_2 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + P_1V_1 - P_1V_2$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = P_1V_2 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - P_1V_1 . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\therefore \quad W_{neto} = P_1 (V_2 - V_1) . \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{l.q.q.d.}$$

33. Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de 1,0 m^3 en un proceso cuasiestático para el cual $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5{,}0$ atm/m^6, como se muestra en la figura P20.33. ¿Cuánto trabajo fue hecho por el gas en expansión?

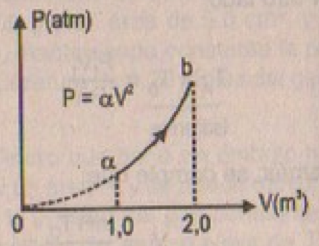


Figura P20.33

Resolución :

$$\alpha = 5{,}0 \frac{atm}{m^6}$$

Sabemos que: $W_{a\to b} = \int_V PdV$

$$\Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = \int_1^2 \alpha V^2 dV = 5 \left.\frac{V^3}{3}\right|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = \frac{35}{3} \text{ atm . m}^3 \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}} \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \quad W_{(a\to b)} = 1{,}18 \text{ MJ}$$

34. Un gas ideal a TPE (1 atm y 0°C) se lleva por un proceso en el que el volumen se expande de 25 L a 80 L. Durante este proceso la presión varía inversamente a medida que el volumen se eleva al cuadrado, $P = 0{,}5\, aV^{-2}$. a) Determine la constante *a* en unidades del SI. b) Encuentre la presión y temperatura finales. c) Determine una expresión general para el trabajo hecho por el gas durante este proceso. d) Calcule el trabajo real en joules efectuado por el gas en este proceso.

Resolución :

Datos: $P = 1$ atm ; $V_{inicial} = 25$ L
$T = 0°C$; $V_{final} = 80$ L
$P = 0{,}5\, aV^2$

Parte (a)

Sabemos que: $P = (0{,}5)\, aV^2$

Entonces si: $P = 1{,}00$ atm y $V = 25$ L

Luego: $1 \text{ atm} = (0{,}5)(25)^2 \text{ litros}^2 .a$

$$\therefore \quad a = 32 \times 10^{-4} \frac{atm}{L^2}$$

Parte (b)

Como: $$a = 32 \times 10^{-4} \frac{atm}{L^2} \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}} \frac{N}{m^2} \times \frac{1 L^2}{10^{-6} m^6}$$

$$\therefore \quad a = 3{,}24 \times 10^8 \frac{N}{m^8}$$

Parte (c)

Sabemos que: $W = \int PdV$

$$\Rightarrow \quad W = \int_V (0{,}5) aV^2 dV = \frac{(0{,}5)(a)}{3} V^3 + k$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{6} aV_f^3 - \frac{1}{6} aV_i^3$$

Parte (d)

Para: $a = 3{,}24 \times 10^8 \dfrac{N}{m^8}$ $\quad V_{inicial} = 25 \times 10^{-3}\ m^3$

$V_{final} = 80 \times 10^{-3}\ m^3$

Entonces: $W = \dfrac{1}{6}(3{,}24 \times 10^8)\left[(80 \times 10^{-3})^3 - (25 \times 10^{-3})^3\right]$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{3{,}24}{6} \times 10^8 (55 \times 10^{-3})[64 \times 10^{-4} + 6{,}25 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-3}]$$

$$\therefore \quad W_{gas} = 26{,}8\ kJ$$

35. Un mol de un gas ideal realiza 3 000 J de trabajo sobre los alrededores conforme se expande isotérmicamente hasta una presión final de 1 atm y un volumen de 25 L. Determine a) el volumen inicial, y b) la temperatura del gas.

Resolución :

Datos: $W = 3\ 000\ J$; $P_{final} = 1\ atm$

$V_{final} = 25\ L$; $V_{inicial} = ?$

Parte (a)

Sabemos que: $W = \int PdV$

$$\Rightarrow \quad 3\ 000\ J = \int_V \frac{nRT}{V} dV$$

$$\Rightarrow \quad 3 \times 10^3\ J = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad \dots (1)$$

Por otro lado: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (1\ atm)(25\ L) = (1\ mol)\left(0{,}082\ \frac{atm.L}{mol.K}\right)T$$

$$\therefore \quad T = 305\ K$$

Luego en (1)

$$3 \times 10^3\ J = 25\ atm \times L \times \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\frac{N}{m^2} \times \frac{10^{-3}\ m^3}{1L} . \ln\left[\frac{25}{V_i}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}1846 = \ln\left(\frac{25}{V_i}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{e^{(1{,}1846)}} = V_{inicial}$$

$$\therefore \quad V_{inicial} = 7{,}65\ litros$$

Parte (b)

Como: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad (1\ atm)(25\ L) = (1\ mol)\left(0{,}082\ \frac{atm.L}{mol.K}\right)T$$

$$\therefore \quad T_{sistema} = 305\ K$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

36. Un gas ideal se somete a proceso cíclico mostrado en la figura P20.36 de A a B a C y de regreso a A. a) Dibuje un diagrama *PV* para este ciclo e identifique las etapas durante las cuales se absorbe calor y aquellas durante las cuales se emite calor. b) ¿Cuál es el resultado completo del ciclo en función de *U*, *Q* y *W*?

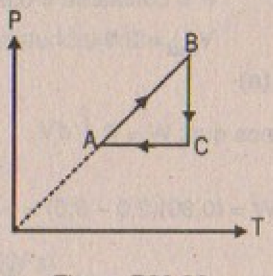


Figura P20.36

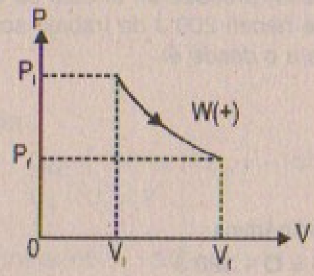
Resolución :

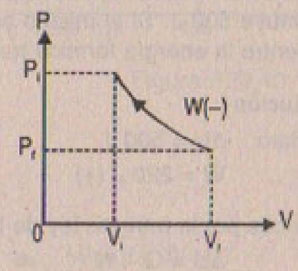
Parte (a)

Sabemos que: $\Delta U = Q - W$

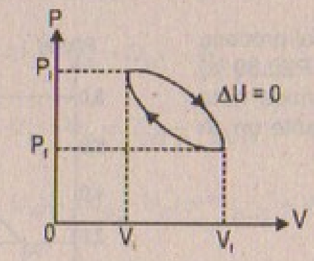
$\Rightarrow$ Ciclo: $\Delta U = 0$ $\quad \therefore \quad Q = W$

- Como el sistema absorbe calor, entonces: W = positivo (expansión)
- Cuando el sistema emite calor, entonces: W = negativo (compresión)





Parte (b)



37. Un gas es comprimido a una presión constante de 0,80 atm de 9,0 L a 2,0 L. En el proceso, 400 J de energía térmica salen del gas. a) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas? b) ¿Cuál es el cambio en su energía interna?

37A. Un gas es comprimido a una presión constante *P* de V_1 a V_2. En el proceso, *Q* joules de energía térmica salen del gas. a) ¿Cuál es el trabajo efectuado por el gas? b) ¿Cuál es el cambio en su energía interna?

Resolución :

Datos: P = constante = 0,80 atm ; $V_{inicial} = 9{,}0$ L

$V_{final} = 2{,}0$ L ; Energía liberada = –400 J = Q

Parte (a)

Sabemos que: $W = P\int dV$

$$\Rightarrow \quad W = (0{,}80)(2{,}0-9{,}0) = -5{,}6 \text{ atm . L} \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}}\frac{N}{m^2}\times\frac{10^{-3}\,m^3}{1L}$$

$$\therefore \quad W_{(-)} = -567{,}3 \text{ J}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica: $\Delta U = Q - W$

Entonces: $\Delta U = -400 \text{ J} - (-567)$

$$\therefore \quad \Delta U = 167 \text{ J}$$

38. Un sistema termodinámico experimenta un proceso en el cual su energía interna disminuye 500 J. Si al mismo tiempo se hacen 200 J de trabajo sobre el sistema, encuentre la energía térmica transferida a o desde él.

Resolución :

Por dato: $\Delta U = 500$ J

$W = 220$ J (+)

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad 500 \text{ J} = Q - 220 \text{ J}$$

$$\therefore \quad Q_{transferida} = 720 \text{ J}$$

39. Un gas se lleva a través del proceso cíclico descrito en la figura P20.39. a) Encuentre la energía térmica neta transferida al sistema durante un ciclo completo.

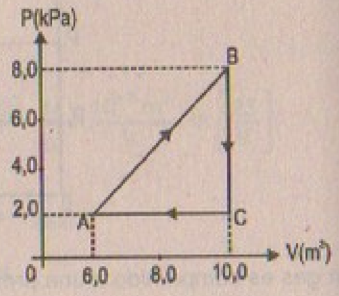


Figura P20.39

Resolución : 39

Parte (a)

Sabemos que en un proceso cíclico $\Delta U = 0 \quad \therefore \quad Q = W$

Por otro lado: $W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = W_{A\to B} + W_{C\to A}$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \left(\frac{2+8}{2}\right)(4) + 2(6-10) = 12 \text{ kJ}$$

En consecuencia: Q = energía térmica transferida = 12 kJ

Parte (b)

Si se invierte el ciclo entonces $W(-) = Q$

En consecuencia: Q = energía térmica = –12 kJ

40. Un sistema gaseoso sigue el proceso que se indica en la figura P20.40. De A a B, el proceso es adiabático, y de *B* a *C* es isobárico con 100 kJ de flujo de calor hacia el sistema. De *C* a *D*, el proceso es isotérmico, y de *D* a *A* es isobárico con 150 kJ de flujo de calor hacia fuera del sistema. Determine la diferencia en la energía interna $U_B - U_A$.

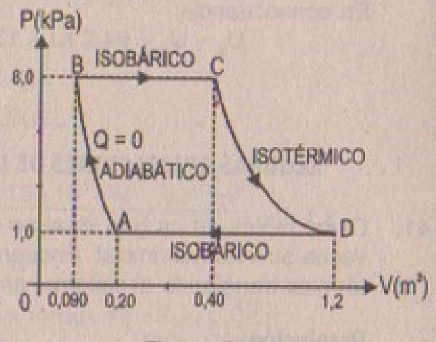


Figura P20.40

Resolución :

Datos: $Q_{BC} = 100$ kJ ; $Q_{DA} = -150$ kJ

$U_B - U_A = ?$

Por la primera ley: $\Delta U = Q - W = -W \quad \Rightarrow \quad W = P\int dV = ?$

De otra manera (utilizando datos)

Sabemos que: $(-)\begin{cases} U_C - U_B = Q_{BC} - W_{B\to C} \\ U_A - U_D = Q_{AD} - W_{D\to A} \end{cases}$

$$(U_B - U_A) + (U_D - U_C) = W_{B\to C} + W_{D\to A} - Q_{BC} - Q_{DA}$$

Pero: $U_D - U_C = Q_{DC} - W_{C\to D} = 0 - W_{C\to D}$ (proceso isotérmico)

Luego: $U_B - U_A = W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A} - (Q_{BC} - \cancelto{0}{Q_{CD}} + Q_{DA})$

$$\text{Pero: } W_{B\to C} = (3 \text{ atm})(0{,}40 - 0{,}09) = 3 \text{ atm} \times \frac{1{,}013\times10^5}{1 \text{ atm}}\frac{N}{m^2}\times(0{,}31 \text{ m}^3) = 94{,}2 \text{ kJ}$$

$$W_{C\to D} = nRT \,.\, \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = PV\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = (0{,}4)(3\text{ atm}) \times \frac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\,\frac{N}{m^2}\,.\,\ln\left(\frac{1{,}2}{0{,}4}\right)$$

$$\therefore \quad W_{C\to D} = 133{,}5\text{ kJ}$$

$$W_{D\to A} = (1{,}0\text{ atm})(0{,}20 - 1{,}2) = -1\text{ atm}\,.\,\frac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\,\frac{N}{m^2}\times m^3 = -101{,}3\text{ kJ}$$

Además: (por dato)

$$Q_{BC} = 100\text{ kJ} \quad y \quad Q_{DA} = -150\text{ kJ}$$

En consecuencia:

$$U_B - U_A = 94{,}2\text{ kJ} + 133{,}5\text{ kJ} - 101{,}3\text{ kJ} - (100\text{ kJ} - 150\text{ kJ})$$

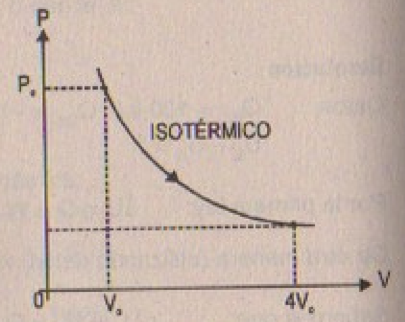
$$\therefore \quad U_B - U_A = 176{,}4\text{ kJ}$$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

41. Cinco moles de un gas ideal se expanden isotérmicamente a 127°C hasta cuatro veces su volumen inicial. Encuentre a) el trabajo hecho por el gas, y b) la energía térmica transferida al sistema, ambos en joules.

Resolución:

Parte (a)



Datos: $n = 5$ moles

$R = 0{,}082\,\dfrac{atm\,.\,L}{mol\,.\,K}$

$T = 127°C$

$T = cte = 127°C$

En un proceso isotérmico $\Delta U = 0$

Entonces por la primera ley: $\Delta U = Q - W \;\Rightarrow\; Q = W$

Por otro lado: $\quad PV = nRT \;\Rightarrow\; P = \dfrac{nRT}{V}$

Luego: $\quad W = \displaystyle\int P\,dV = \int_{V_0}^{4V_0} \frac{nRT}{V}\,.\,dV$

Entonces: $\quad W = (nRT)\ln\left(\dfrac{4V_0}{V_0}\right)$

Reemplazando: $\quad W = (5)\left(8{,}31\,\dfrac{J}{mol.K}\right)\ln(4)(127+273) = 23\text{ kJ} \equiv Q$

42. ¿Cuánto trabajo efectúa el vapor cuando 1,0 mol de agua a 100°C hierve y se convierte en 1 mol de vapor a 100°C y 1,0 atm de presión? Determine el cambio en la energía interna del vapor conforme se produce el cambio de estado. Considere al vapor como un gas ideal.

Resolución:

Datos: $n = 1{,}00$ mol ; $P = 1{,}00$ atm

$T = 100°C \equiv 373\text{ K}$; $R = 0{,}082\,\dfrac{atm\,.\,L}{mol\,.\,K}$

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1{,}00\text{ mol})(0{,}082)(373)}{1{,}00\text{ atm}} = 30{,}6\text{ L}$$

Luego: $\quad W = PV = (1\text{ atm})(30{,}6\text{ L}) \times \dfrac{1{,}013\times10^5}{1\text{ atm}}\,\dfrac{N}{m^2}\times\dfrac{10^{-3}m^3}{1\text{ L}} = 3{,}1\text{ kJ}$

Entonces por la primera ley: $\quad \Delta U = Q - W$

Pero: $\quad Q = Q_{transformación} = 2{,}26\times10^6\,\dfrac{J}{kg}\times 1\text{ mol}\times 18\,\dfrac{g}{mol}\times\dfrac{1\text{ kg}}{10^3\text{ g}}$

$$\therefore \quad Q = 40{,}68\text{ kJ}$$

En consecuencia: $\quad \Delta U = 40{,}68\text{ kJ} - 3{,}1\text{ kJ} = 37{,}58\text{ kJ}$

43. Se calienta helio a presión constante de 273 K a 373 K. Si el gas realiza 20,0 J de trabajo durante el proceso, ¿cuál es la masa de helio?

Resolución:

Datos: Proceso isobárico

$T_{inicial} = 273\text{ K}$; $W = 20{,}0\text{ J}$; $R = 8{,}31\,\dfrac{J}{mol K}$

$T_{final} = 373\text{ K}$; $m_{helio} = \rho$

En un proceso isobárico $\quad W = P(V_f - V_i)$

Por otro lado: $\quad \dfrac{V_i}{T_i} - \dfrac{V_f}{T_f} = \dfrac{n.R}{P} = cte$

Además: $\quad PV_f - PV_i = nRT_f - nRT_i = nR(\Delta T) = 20{,}0\text{ J}$

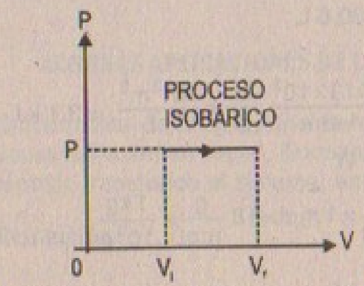
Entonces: $\quad \dfrac{m_{helio}}{M_{helio}}\times\left(8{,}31\,\dfrac{J}{mol K}\right)\times(373-273) = 20{,}0\text{ J}$

$$\Rightarrow \quad m_{helio} = \frac{(20{,}0)\left(4\,\frac{g}{mol}\right)}{\left(8{,}31\,\frac{J}{mol K}\right)(100K)} = 0{,}0962 \text{ g}$$

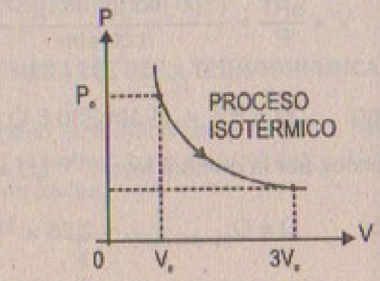
44. Un mol de un gas ideal se calienta a presión constante de modo que su temperatura se triplica. Luego se calienta el gas a temperatura constante de manera que su volumen se triplica. Encuentre la razón entre el trabajo efectuado durante el proceso isotérmico y el realizado durante el proceso isobárico.

Resolución:

Inicialmente:



Finalmente:



Inicialmente en un proceso isobárico:

$$V_{inicial} = \frac{nRT_o}{P} \quad \wedge \quad V_{final} = \frac{3nRT_o}{P}$$

Luego: $W = P\Delta V$

$$\Rightarrow \quad W = P\left[\frac{3nRT_o}{P} - \frac{nRT_o}{P}\right] = 2nRT_o$$

Finalmente en un proceso isotérmico:

Se sabe que: $W = nRT_o \ln\left(\frac{3V_o}{V_o}\right) = nRT_o \ln(3)$

En consecuencia: $\dfrac{W_{proceso\ isotérmico}}{W_{proceso\ isobárico}} = \dfrac{nRT_o \ln(3)}{2nRT_o}$

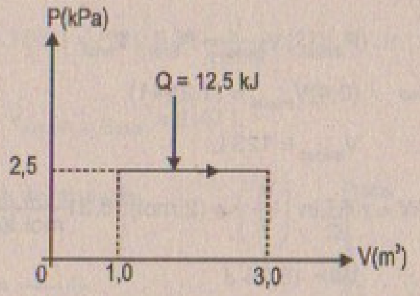
$$\therefore \quad \text{Razón} = \frac{\ln(3)}{2} = 0{,}549$$

45. Un gas ideal inicialmente a 300 K se somete a una expansión isobárica a 2,50 kPa. Si el volumen aumenta de 1,00 m^3 a 3,00 m^3, y se transfieren al gas 12,5 kJ de energía térmica, calcule a) el cambio en su energía interna, y b) su temperatura final.

Resolución:

Datos:

$T_{inicial} = 300$ K



Parte (a)

Sabemos que: $W = P.\Delta V = (2{,}5)(3 - 1) = 5$ kJ

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = 12{,}5 \text{ kJ} - 5 \text{ kJ} \qquad \therefore \quad \Delta U = 7{,}5 \text{ kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que: $\dfrac{V_{inicial}}{T_{inicial}} = \dfrac{V_{final}}{T_{final}} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1{,}0\ m^3}{300K} = \frac{3{,}0\ m^3}{T_{final}} \qquad \therefore \quad T_{final} = 900 \text{ K}$$

46. Dos moles de gas helio inicialmente a 300 K y 0,40 atm se comprimen isotérmicamente a 1,2 atm. Encuentre a) el volumen final del gas, b) el trabajo hecho por el gas, y c) la energía térmica transferida. Considere que el helio se comporta como un gas ideal.

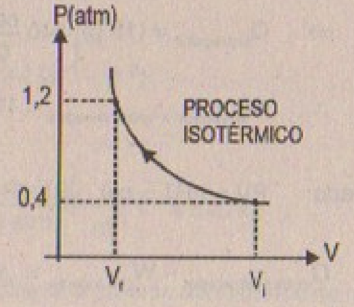
Resolución:

Datos:

n = 2 moles (helio)

T = 300 K

$R = 0{,}082\ \dfrac{atm.L}{mol K}$



Parte (a)

Sabemos que: $P_f \cdot V_{final} = nRT$

$$\Rightarrow \quad V_{final} = \frac{nRT}{P_f} = \frac{(2)(0{,}082)(300)}{1{,}2}$$

$$\therefore \quad V_{final} = 41 \text{ litros}$$

Parte (b)

Sabemos que: $P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (0{,}4)V_{inicial} = (1{,}2)(41)$

$\therefore \quad V_{inicial} = 123\ L$

Luego: $W = nRT.\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = (2\ mol)\left(8{,}31\frac{J}{mol.K}\right)\ln\left(\frac{123}{41}\right)$

$\therefore \quad W = 18{,}26\ J$

Parte (c)

En un proceso isotérmico: $\Delta U = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta U = Q - W = 0 \quad \therefore \quad Q = W = 18{,}26\ J$

47. Un mol de vapor de agua a 373 K se enfría a 283 K. El calor entregado por el vapor del agua que se enfría lo absorben 10 moles de un gas ideal, y esta absorción de calor ocasiona que el gas se expanda a una temperatura constante de 273 K. Si el volumen final del gas ideal es 20,0 L, determine su volumen inicial.

47A. Un mol de vapor de agua a temperatura T_h se enfría a T_c. El calor entregado por el vapor del agua que se enfría lo absorben n moles de un gas ideal, y esta absorción de calor ocasiona que el gas se expanda a una temperatura constante de T_0. Si el volumen final del gas ideal es V_f, determine su volumen inicial.

Resolución:

Sabemos que: $Q_{entregado\ vapor\ de\ agua} = Q_{vaporización} + Q_{perdido}$

$\Rightarrow \quad Q_{entregado} = m_{H_2O} \cdot L_{vapor} + m_{H_2O} \cdot C_e\ \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{entregado} = (18\ g)\left(540\ \frac{cal}{g}\right) + (18\ g)\left(\frac{1\ cal}{g.°C}\right)(100 - 10)°C$

$\therefore \quad Q_{entregado \times vapor\ de\ agua} = 11\ 340\ cal$

Por otro lado: $PV = nRT = cte \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

Como: $Q_{entregado \times vapor} - W_{(10\ moles)} = \Delta U = 0$ ya que $T = cte = 273\ K$

$\Rightarrow \quad Q_{entregado \times vapor} = W_{(10\ moles)} = \int P\,dV$

$\Rightarrow \quad 11\ 340\ cal \times \left(\frac{4{,}186 J}{1\ cal}\right) = nRT\int_{V_i=?}^{V_f=20{,}0\,L}\frac{1}{V}\,dV$

$\Rightarrow \quad 11\ 340 \times 4{,}186\ J = (10)\left(8{,}31\frac{J}{mol.K}\right)(273\ K).\ln\left(\frac{20{,}0\ L}{V_i}\right)$

$\therefore \quad V_{inicial\ (10\ moles)} = 2{,}47\ L$

48. Durante una expansión controlada, la presión de un gas es

$P = 12e^{-bV}\ atm\ ; \quad b = \frac{1}{12\ m^3}$

donde el volumen está en m^3 (Fig. P20.48). Determine el trabajo efectuado cuando el gas se expande de 12 m^3 a 36 m^3.

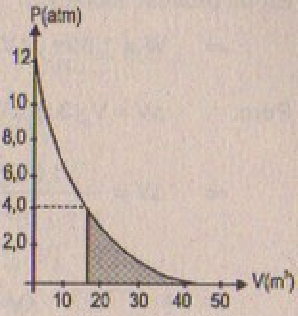


Figura P20.48

Resolución:

Datos: $P = 12e^{-b.V}\ atm\ ; \quad b = \frac{1}{12\ m^3}$

por hallar: W en 12 $m^3 \to 36\ m^3$

Sabemos que: $W = \int P dV$

$\Rightarrow \quad W = \int_{12}^{36} 12e^{-bV}.dV = -\frac{12}{b}\ e^{-bV}\Big|_{12}^{36}$

$\Rightarrow \quad W = -\frac{12}{\frac{1}{12}} \times e^{-\frac{1}{12}V}\Big|_{12}^{36} = 144\ (e^{-1} - e^{-3})$

$\therefore \quad W = 45{,}8\ atm \times m^3 \times \frac{1{,}013 \times 10^5}{1\ atm}\ \frac{N}{m^2} = 4\ 640\ kJ$

49. Un bloque de 1,0 kg de aluminio se calienta a presión atmosférica de manera tal que su temperatura aumenta de 22°C a 40°C. Encuentre a) el trabajo realizado por el aluminio, b) la energía térmica que se le entrega, y c) el cambio en su energía interna.

Resolución:

Datos: $m_{Al} = 1{,}0\ kg \qquad \rho_{Al} = 2{,}7 \times 10^3\ kg/m^3$

$P = cte = 1\ atm \equiv 1{,}013 \times 10^5\ N/m^2$

$T_{inicial} = 22°C$; $T_{final} = 40°C$

$\alpha_{aluminio} = 24 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Parte (a)

En un proceso isobárico: $W = P\Delta V$

$$\Rightarrow \quad W = 1\ atm\ .\ \Delta V$$

Pero: $\Delta V = V_o(3\alpha)(\Delta T) = \dfrac{m_{Al}}{\rho_{Al}} \times (3\alpha)(\Delta T)$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{1{,}0\ kg}{2{,}7\times 10^3\ \frac{kg}{m^3}} \times 3\ (24 \times 10^{-6}\ °C^{-1})(40 - 22)$$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{72\times 18}{2{,}7} \times 10^{-9}\ m^3$$

Luego: $W = P\Delta V = 1{,}013 \times 10^5\ \dfrac{N}{m^2} \times \left[\dfrac{72\times 18}{2{,}7}\times 10^{-9}\ m^3\right]$

$$\therefore \quad W = 48{,}6 \times 10^{-3}\ J \equiv 48{,}6\ mJ$$

Parte (b)

Sabemos que: $Q = m_{Al}\ C_e\ \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q = (1{,}0\ kg)(900\ J/kg.°C)(40 - 22)°C$$

$$\therefore \quad Q = 16{,}2\ kJ$$

Parte (c)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = 16{,}2\ kJ - 48{,}6\ mJ \qquad \therefore \quad \Delta U \approx 16{,}2\ kJ$$

50. En la figura P20.50, el cambio de la energía interna de un gas que pasa de A a C es +800 J. El trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria *ABC* es +500 J. a) ¿Cuánta energía debe entregarse al sistema cuando va de A a C pasando por B? b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, ¿cuál es el trabajo que hace el sistema al ir de C a D? c) ¿Cuál es la energía que se intercambia con los alrededores cuando el ciclo va de *C* a *A*? d) Si el cambio en la energía interna al ir del punto *D* al punto A es +500 J, ¿cuánta energía térmica debe entregarse al sistema cuando va del punto *C* al punto *D*?

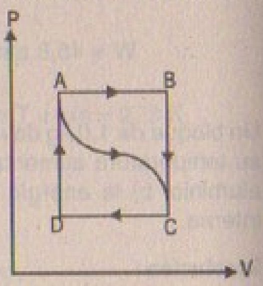


Figura P20.50

Resolución :

Datos: $\Delta U_{(a\to c)} = +800\ J$; $W_{ABC} = +500\ J$

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{AC} = Q_{AC} - W_{AC} = 800\ J$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U_{AC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} \qquad \therefore \quad \Delta U_{ABC} = +800\ J$$

Parte (b)

Si $P_A = 5P_C \quad \Rightarrow \quad P_B = 5P_D = 5\ P_C = P_A$

Por otro lado: $W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = W_{AB} + 0$

Entonces a $P = cte \quad W = P\Delta V$

Pero: $W_{ABC} = +500\ J = P_A\ (V_B - V_A) = P_B\ (V_B - V_A)$

Nos piden: $W_{C\to D} = P_C\ (V_D - V_C) = P_D\ (V_D - V_C)$ (a $P = cte$)

Como: $V_A = V_D$ y $V_B = V_C$ (según el gráfico)

Entonces: $W_{C\to D} = \dfrac{P_B}{5}\ (V_A - V_B) = -\dfrac{P_B}{5}\ (V_B - V_A)$

$$\therefore \quad W_{C\to D} = -\frac{1}{5}\ (500\ J) = -100\ J$$

Parte (c)

Sabemos que: $\Delta U_{(A\to C)} = +800\ J \qquad \therefore \quad \Delta U_{(C\to A)} = -800\ J$

Parte (d)

Datos: $\Delta U_{(D\to A)} = +500\ J$; $\Delta U_{ABC} = +800\ J$; $W_{ABC} = +500\ J$

Como: $\Delta U_{(ABCDA)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{ABC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = 0$

$$\Rightarrow \quad +800\ J + \Delta U_{CD} + 500\ J = 0 \qquad \therefore \quad \Delta U_{C\to D} = -1\ 300\ J$$

Además: $W_{AC} = -W_{CA} \quad \Rightarrow \quad -500\ J = W_{C\to A}$

Pero: $W_{C\to A} = W_{C\to D} + W_{D\to A} \qquad \therefore \quad W_{C\to D} = -500\ J$

Luego por la primera ley: $\Delta U_{C\to D} = Q_{C\to D} - W_{C\to D}$

$$\Rightarrow \quad -1\ 300\ J = Q_{C\to D} - (-500\ J)$$

$$\therefore \quad Q_{C\to D} = -1\ 800\ J$$

51. Helio con un volumen inicial de 1,00 litro y una presión inicial de 10,0 atm se expande hasta un volumen final de 1,00 m³. La relación entre la presión y el volumen durante la expansión es PV = constante. Determine a) el valor de la constante, b) la presión final, y c) el trabajo hecho por el helio durante la expansión.

Resolución :

Datos: Gas helio

$V_{inicial} = 1{,}00$ litro ; $V_{final} = 1{,}00\ m^3$

$P_{inicial} = 10,0 \text{ atm} \qquad P_{final} = ?$

$R = 0,082 \dfrac{\text{atm.L}}{\text{mol.K}}$

Parte (a)

Sabemos que: PV = cte

$\Rightarrow \quad P_{inicial} \cdot V_{inicial} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad (10,0 \text{ atm})(1,00 \text{ litro}) = k = \text{cte}$

$\therefore \quad k = 10,0 \text{ atm.L}$

Parte (b)

Sabemos que: $P_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (10,0 \text{ atm})(1,00 \text{ litro}) = 1,00 \text{ m}^3 \cdot V_{final}$

$\Rightarrow \quad (10 \text{ atm})\left(10^3 \text{mL} \times \dfrac{10^{-3}\text{m}^3}{1\,000^2 \text{mL}}\right) = 1,00 \text{ m}^3 \cdot V_{final}$

$\therefore \quad P_{final} = 10^{-2} \text{ atm} = 0,01 \text{ atm}$

parte (c)

Sabemos que: T = cte

$\Rightarrow \quad W = nRT\ln\left(\dfrac{V_f}{V_i}\right) = k \cdot \ln\left(\dfrac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm . L} \times \ln\left(\dfrac{1,00 \text{ m}^3}{10^{-3}\text{m}^3}\right)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm.L} \times \ln(1\,000)$

$\Rightarrow \quad W = 10 \text{ atm} \cdot \dfrac{1,013\times10^5}{1 \text{ atm}} \text{ N/m}^2 \times \dfrac{1 \text{ L}}{1 \text{ L}} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times (6,90)$

$\therefore \quad W = 7,00 \text{ kJ}$

TRANSFERENCIA DE CALOR

52. El cristal de una ventana tiene un área de 3,0 m² y un espesor de 0,60 cm. Si la diferencia de temperatura entre sus caras es de 25°C, ¿cuánto calor fluye a través de la ventana por hora?

Resolución :

Datos: Área = 3,0 m²

Espesor = Δx = 0,60 cm ; $\quad K_{vidrio} = 0,8 \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

ΔT = 25°C ; $\quad Q = ?$

Sabemos que: $\dfrac{Q}{\Delta t} = -\dfrac{kA\,\Delta T}{\Delta x}$

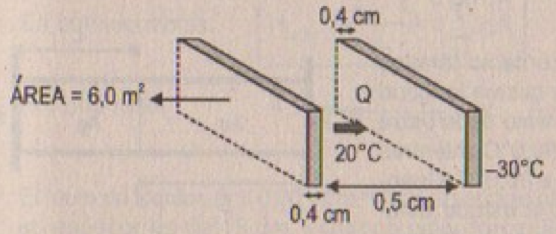
$\Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = -kA\dfrac{dT}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = -(0,8)(3,0)\dfrac{(25)}{(0,6)\times10^{-2}}$

Luego: $\displaystyle\int_0^{3\,600\text{s}} dQ = \int_0^{3600\text{s}\leftrightarrow 1\text{ hora}} -\dfrac{(0,8)(3,0)(25)\times10^2}{0,6}\,dt$

$\therefore \quad$ Q(1 hora) = 36 MJ, (–) fluye hacia fuera

53. Una ventana de cristal térmico de 6,0 m² de área está construido con dos hojas de vidrio, cada una de 4,0 mm de espesor separadas por un espacio de aire de 5,0 mm. Si el interior está a 20°C y el exterior a –30°C, ¿cuál es la pérdida de calor a través de la ventana?

Resolución :



$k_{vidrio} = 0,8 \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

$k_{aire} = 0,0234 \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}}$

Sabemos que: $\quad \overset{\circ}{Q} = k_{aire} A \dfrac{dT}{dx}$

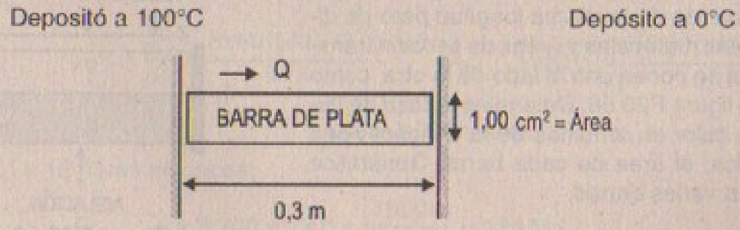
Entonces: $\quad \overset{\circ}{Q} = 0,0234 \dfrac{\text{W}}{\text{m.°C}} \times (6,0 \text{ m}^2) \times \dfrac{(30+20)\text{°C}}{5\times10^{-2}\text{m}}$

$\Rightarrow \quad \overset{\circ}{Q} = \dfrac{(0,0234)(6,0)(50)}{5\times10^{-2}} \text{ W}$

En consecuencia: $\quad \dfrac{dQ}{dt} = \overset{\circ}{Q} = 1\,404 \text{ W} \equiv 1,4 \text{ kW}$

54. Una barra de plata de 30,0 cm de longitud y 1,00 cm² de área de sección transversal es utilizada para transferir calor de un depósito a 100,0°C a uno a 0,0°C. ¿Cuánto calor se transfiere por segundo?

Resolución :



Sabemos que: $$H = -kA\frac{(T_f - T_i)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad H = -k_{plata} \times A \times \frac{(T_f - T_i)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad H = -427\,\frac{W}{m.^\circ C} \times 1{,}00\ cm^2 \times \frac{1\ m^2}{10^4 cm^2} \times \left(\frac{0^\circ C - 100^\circ C}{0{,}3\ m}\right)$$

$$\therefore \quad H = 14{,}2\ J/s$$

En consecuencia:

Se transferirá $14{,}2\ J \equiv 14{,}2\ J \times \dfrac{1\ cal}{4{,}186\ J} = 3{,}4$ cal en cada segundo

55. Una barra de oro está en contacto térmico con una barra de plata de la misma longitud y área (Fig. P20.55). Un extremo de la barra compuesta se mantiene a 80,0°C mientras que el extremo opuesto está a 30,0°C. Cuando el flujo de calor alcanza el estado estable, encuentre la temperatura en la unión.

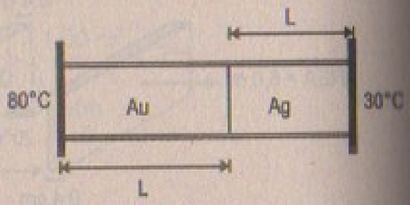


Figura P20.55

Resolución :

Datos: $k_{oro} = 314\,\frac{W}{m.^\circ C}$; $k_{plata} = 427\,\frac{W}{m.^\circ C}$

Cuando se alcanza el estado estable la gradiente de la temperatura es constante a lo largo de la barra, como:

$$H_{Au} = -k_{Au}\,A\,\frac{(T_o - 80)}{L} \quad y \quad H_{Ag} = -k_{Ag}\,A\,\frac{(30 - T_o)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad -k_{Au}.A\,\frac{(T_o - 80)}{L} = -k_{Ag}\,.\,A\,\frac{(30 - T_o)}{L}$$

$$\Rightarrow \quad 314\,\frac{W}{m.^\circ C}\,(T_o - 80)^\circ C = 427\,\frac{W}{m.^\circ C}\,(30 - T_o)^\circ C$$

$$\therefore \quad T_o = 51{,}0^\circ C$$

56. Dos barras de la misma longitud pero de diferentes materiales y áreas de sección transversal se ponen una al lado de la otra, como en la figura P20.56. Determine la tasa de flujo de calor en términos de la conductividad térmica, el área de cada barra. Generalice esto a varias barras.

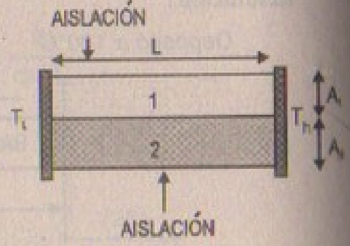


Figura P20.56

Resolución :

Sea: $T_L > T_h$

Además sabemos que: $$H = -k.A\frac{\Delta T}{L}$$

Entonces: $$H_1 = -k_1A_1\,\frac{(T_h - T_L)}{L} \quad \wedge \quad H_2 = -k_2A_2\,\frac{(T_h - T_L)}{L}$$

Luego: $$H_n = -k_nA_n\,\frac{(T_h - T_L)}{L}$$

En consecuencia: $$\boxed{H_{total} = \frac{T_L - T_h}{L} \times \sum_{i=1}^{n} k_iA_i}$$ caso general

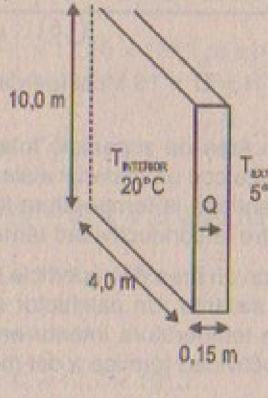
Por otro lado: $$A_1 = \frac{H_1 \times L}{k_1\,(T_L - T_h)} \quad y \quad A_2 = \frac{H_2 \times L}{k_2\,(T_L - T_h)}$$

57. El muro de ladrillos (k = 0,80 W/m.°C) de un edificio tiene dimensiones de 4,0 m × 10,0 m y su espesor es de 15 cm. ¿Cuánto calor (en joules) fluye a través del muro en un período de 12 h cuando las temperaturas promedio interior y exterior son, respectivamente, 20°C y 5°C?

Resolución :

$Q_{(12\ horas)} = ?$

$k = 0{,}80\,\dfrac{W}{m^\circ C}$



Sabemos que: $$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -\left(0{,}80\,\frac{W}{m^\circ C}\right)(4{,}0 \times 10{,}0)m^2 \times \left(\frac{5-20}{0{,}15}\right)\frac{^\circ C}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{(0{,}80)(40)(15)}{0{,}15} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dQ = \int_0^t \frac{(0{,}80)(40)(15)}{0{,}15}\,dt$$

$$\therefore \quad Q(t) = 3\,200t \text{ joules}$$

Para t = 12 horas entonces:

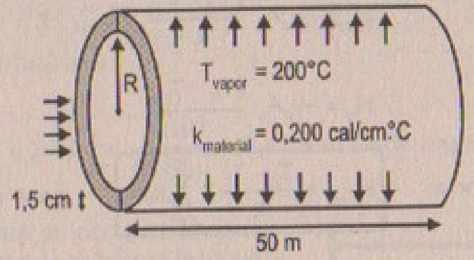
$$Q_{(12\ horas)} = 3\,200 \times 12\ h \times \frac{3600\ s}{1\ h} = 138\ MJ$$

58. Un tubo de vapor se cubre con un material aislante de 1,5 cm de espesor y 0,200 cal/cm.°C.s de conductividad térmica. ¿Cuánto calor se pierde cada segundo cuando el vapor está a 200°C y el aire circundante se encuentre a 20°C? El tubo tiene una circunferencia de 20 cm y una longitud de 50 m. Ignore las pérdidas a través de los extremos del tubo.

Resolución:

Radio = 20 cm

$T_{aire} = 20°C$



Sabemos que: $H = kA\dfrac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \quad H = 0{,}200\ \frac{cal}{cm.°C} \times (50\ m)(2\pi \times 20\ cm) \times \left[\frac{200°C - 20°C}{1{,}5\ cm}\right]$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{(0{,}200\ cal)\,(3{,}1416)\,(5000)(180)(40)}{(1{,}5)}$$

$$\therefore \quad H = \overset{\circ}{Q} = 15\ \text{Mcal (pérdida de calor} \times \text{segundo)}$$

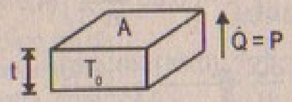
59. Una caja con un área de superficie total de 1,20 m² y una pared de 4,00 cm de espesor está hecha con un material aislante. Un calefactor eléctrico de 10,0 W dentro de la caja mantiene la temperatura interior en 15,0°C arriba de la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica *k* del material aislante.

59A. Una caja con un área de superficie total *A* y una pared de espesor *t* está hecha con un material aislante. Un calefactor eléctrico que entrega *P* watts dentro de la caja mantiene la temperatura interior en T_0 arriba de la temperatura exterior. Encuentre la conductividad térmica *k* del material aislante.

Resolución:

k = ?

Sabemos que:



$$\frac{dQ}{dt} = -kA\,\frac{(T_E - T_O)}{t}$$

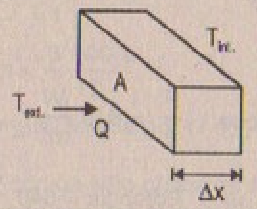
Pero: $\dfrac{dQ}{dt} = P \quad \Rightarrow \quad P = kA\,\dfrac{(\Delta T)}{t}$

$$\therefore \quad k = \frac{P \times t}{A(\Delta T)}$$

60. Una caja de estireno tiene un área de superficie de 0,80 m² y un espesor de pared de 2,0 cm. La temperatura interior es de 5°C y la exterior de 25°C. Si son necesarias 8,0 h para que 5,0 kg de hielo se fundan en el recipiente, determine la conductividad térmica del estireno.

Resolución:

Datos:
$A = 0{,}80\ m^2$
$\Delta x = 2{,}0\ cm$
$T_{int} = 5°C$
$T_{ext} = 20°C$



$L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5\ \dfrac{J}{kg}$

Sabemos que: $\dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{kA}{dx}\,.\,dT$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{-k(0{,}80\ m^2)}{2\times10^{-2} m}\int_{20}^{5} dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{(15)(0{,}80)(100).k}{2}$$

$$\therefore \quad Q(t) = 600kt$$

Luego para t = 8 h

$$Q_{total} = k(600) \times 8\ h \times \left(\frac{3600\ s}{1\ h}\right) = 17{,}28 \times 10^6\ k\ m.s.°C$$

Por otro lado:

$$Q_{\text{requerido para fundir (hielo a 5°C)}} = Q_{fusión} + Q_{ganado}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{requerido} = 5\ kg \times 4\ 186\ \frac{J}{kg.°C}\ (5° - 0)°C + (5\ kg)(3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg})$$

$$\therefore \quad Q_{\text{requerido (fundir)}} = 17{,}7 \times 10^5\ J$$

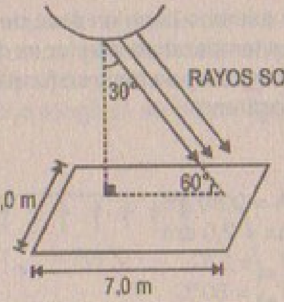
Como: $\quad Q_{\text{total transferido}} = Q_{\text{requerido (fundir)}}$

$$\Rightarrow \quad 17{,}28 \times 10^6\ .\ k\ m.s°C = 17{,}7 \times 10^5\ J$$

$$\therefore \quad k_{conductividad} = 0{,}1\ \frac{W}{m.°C}$$

61. El techo de una casa construido para absorber la radiación solar incidente sobre él tiene un área de 7,0 m × 10,0 m. La radiación solar en la superficie terrestre es de 840 W/m². En promedio, los rayos solares forman un ángulo de 60° con el plano del techo. a) Si 15% de la energía incidente se convierte en potencia eléctrica útil, ¿cuántos kilowatts-hora por día de energía útil brinda esta fuente? Suponga que el Sol brilla durante un promedio de 8,0 h/día. b) Si el usuario residencial promedio paga 6 centavos de dólar por kWh, ¿cuál es el ahorro económico con esta fuente energética por día?

Resolución :



Datos:

$P = 840\ \dfrac{W}{m^2}$

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{P}{A} = 840\ \dfrac{W}{m^2}$

$\Rightarrow$ Potencia $= 840\ \dfrac{W}{m^2} \times 70\ m^2 = 58\ 800\ W$

Pero: $P_{promedio} = P \times \cos 30 = 58\ 800 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ W$

Como: $15\%\ P_{promedio}$ = Potencia eléctrica útil

$\Rightarrow$ Potencia eléctrica útil $= (0{,}15)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(58\ 800)\ W$

En consecuencia: si el Sol brilla en promedio: 8 h/día

Entonces:

Esta fuente brindará: $(0{,}15)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(58\ 800)(8)\ \dfrac{W-h}{día} = 61{,}1$ kW-h/día

Parte (b)

Si el usuario paga: 6 centavos de dólar ——— kW-h

x ——— 61,1 kW-h

$\therefore$ x = 366,6 centavos de dólar

En consecuencia:

El ahorro económico de esta fuente por cada día es de 366,6 centavos de dólar o equivalente a \$ 3,67

62. La superficie del Sol tiene una temperatura de aproximadamente 5 800 K. Si se toma el radio del Sol como $6{,}96 \times 10^8$ m, calcule la energía total radiada por el Sol diariamente. (Suponga $e = 1$).

Resolución :

$T_{Sol} = 5\ 800$ K

Radio del sol $= 6{,}96 \times 10^8$ m

$e = 1$

Sabemos que el área de la superficie es: $4\pi R^2$

entonces: $A = 4(3{,}1416)(6{,}96 \times 10^8) = 8{,}75 \times 10^9\ m^2$

además: $\sigma = 5{,}6696 \times 10^8\ \dfrac{W}{m^2 . K^4}$

Luego por la ley de Stefan: $P = \sigma A . e\ T^4$

$\Rightarrow$ $P = (5{,}6696 \times 10^8)(1)(8{,}75 \times 10^9)(5{,}8 \times 10^3)^4$

$\therefore$ $P = 5{,}61 \times 10^{33}$ J/s

En consecuencia:

Si: $5{,}61 \times 10^{33}$ J ——— 1 s

x ——— $24\ h \times \dfrac{3\ 600\ s}{1\ h}$

$\therefore$ $x = 4{,}85 \times 10^{38}$ J en un día (energía radiada por el sol)

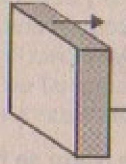
63. Calcule el valor R de a) una ventana hecha con un solo cristal de 1/8 pulg de espesor, y b) una ventana de cristal térmico formada con dos cristales individuales, cada uno de 1/8 pulg de espesor y separados por un espacio de aire de 1/4 pulg. c) ¿En qué factor se reduce la pérdida de calor si se utiliza la ventana térmica en lugar de la ventana de un solo cristal?

Resolución :

Parte (a)

$R_{ventana\ de\ cristal} = R_{vidrio\ plano}$ ($\frac{1}{8}$ pulgadas de espesor) $= 0{,}89$ pie² × °F.h/BTU

Parte (b)



Entonces: $R_{total} = R_{plano\ vidrio}\left(\dfrac{1}{8}\ pulg\right) + R_{espacio\ de\ aire}\left(\dfrac{1}{4}\ pulg\right)$

$\therefore$ $R_{total} = 2(0{,}89) + 0{,}17 = 1{,}85$ pie² × °F/BTU

PROBLEMAS ADICIONALES

64. Un recipiente para cocinar sobre un quemador con su flama baja contiene 10,0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0°C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios tiempos y el resultado se grafica en la figura P20.64. Durante los primeros 50 min la mezcla permanece en 0°C. Entre el minuto 50 y 60, la temperatura aumenta a 2,0°C. Ignore la capacidad calorífica del recipiente y determine la masa inicial del hielo.

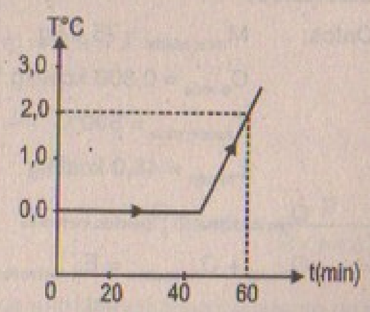


Figura P20.64

Resolución :

Datos: $m_{agua} = 10\ kg$; $C_{e\ H_2O} = 4\ 186\ J/kg.°C$

$C_{e\ hielo} = 2\ 090\ J/kg.°C$; $m_{hielo} = ?$

$L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5\ J/kg$; $Q_{solidif} = -m_{agua} \cdot L$

$$\Rightarrow \quad Q_{solidif} = -10\ kg\ (3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}) = -3{,}33 \times 10^6\ J$$

Por otro lado: $Q_{necesario\ de\ transf.} = Q_{fusión} + m_{H_2O} \cdot C_e \cdot \Delta T$

$$\Rightarrow \quad (m_{hielo} + 10\ kg)(3{,}33 \times 10^5) + (10 + m_{hielo})(4\ 186)(2)$$

Pero: $Q_{solidif} = Q_{fusión}$

$$\Rightarrow \quad -3{,}33 \times 10^6\ J = (10 + m_{hielo})\ [3{,}33 \times 10^5 + 8\ 372]$$

$$\Rightarrow \quad -3{,}33 \times 10^6\ J = 3{,}33 \times 10^6\ J + 83\ 720\ J + m_{hielo}\ (3{,}33 \times 10^5 + 8\ 372)$$

$$\Rightarrow \quad -6{,}74 \times 10^6\ J = m_{hielo}\ (3{,}41 \times 10^5)$$

$$\therefore \quad m_{hielo} = |-19{,}76\ kg|$$

65. Alrededor de un cráter formado por un meteorito de hierro se fundieron 75,0 kg de roca debido al impacto. La roca tiene un calor específico de 0,800 kcal/kg.°C, un punto de fusión de 500°C y un calor latente de fusión de 48,0 kcal/kg. La temperatura original del suelo era de 0,0°C. Si el meteorito golpea el suelo mientras se mueve a 600 m/s, ¿cuál es la masa mínima del meteorito? Suponga que se libera calor hacia la roca no fundida de los alrededores o a la atmósfera durante el impacto. Ignore la capacidad calorífica del meteorito.

Resolución :

Datos: $M_{roca\ sólida} = 75{,}0\ kg$

$C_{e\ roca} = 0{,}800\ kcal/kg.°C$; $v_{meteorito} = 600\ m/s$

$T_{fusión\ roca} = 500°C$; $M_{meteorito} = ?$

$L_{fusión} = 48{,}0\ kcal/kg$; $T_{suelo} = 0{,}0°C$

$$Q_{ganado\ roca} = Q_{perdido\ meteorito}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{transf} + Q_{necesario} = E_{K\ meteorito} \text{ (en forma de calor)}$$

$$\Rightarrow \quad (75\ kg)(48 \times 10^3\ \frac{cal}{kg}) + (75\ kg)(0{,}8 \times 10^3\ \frac{cal}{kg.°C})(500°C) = \frac{1}{2}(M_{met})(600)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}36 \times 10^7\ cal + 3 \times 10^7\ cal = \frac{1}{2}\ M_{meteorito} \times 36 \times 10^4\ J\left(\frac{1\ cal}{4{,}186\ J}\right)$$

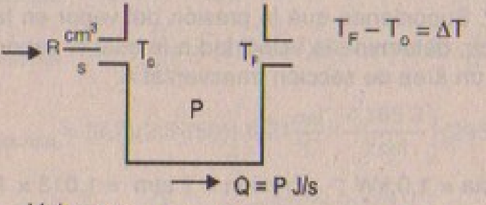
$$\Rightarrow \quad \frac{(3{,}36 \times 10^7)(2)(4{,}186)}{36 \times 10^4} = M_{meteorito}$$

$$\therefore \quad M_{meteorito} = 781\ kg$$

66. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se utiliza para medir el calor específico de un líquido. La técnica consiste en medir la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y de salida de una corriente del líquido que fluye mientras se agrega calor a una tasa conocida. En un experimento particular, un líquido de 0,78 g/cm³ de densidad fluye por el calorímetro a una tasa de 4,0 cm³/s. En estado estable se establece una diferencia de temperatura de 4,8°C entre los puntos de entrada y salida cuando se suministra calor a razón de 30 J/s. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

66.A Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se utiliza para medir el calor específico de un líquido. La técnica consiste en medir la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y de salida de una corriente del líquido que fluye mientras se agrega calor a una tasa conocida. En un experimento particular, un líquido de densidad ρ fluye por el calorímetro a una tasa de *R* cm³/s. En estado estable, se establece una diferencia de temperatura Δ*T* entre los puntos de entrada y salida cuando se suministra calor a razón de *P* J/s. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

Resolución :



Sabemos que: $\frac{Volumen}{t} = R = \frac{m}{P \times t} \Rightarrow m = R \times P \times t$

Además: $\frac{Q}{t} = P \quad \Rightarrow \quad Q = P \times t\ \ J/s$

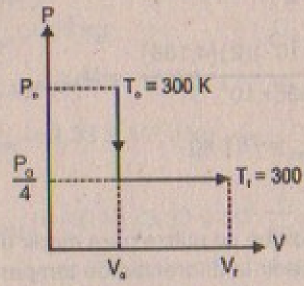
Luego: $Q = mC_e\Delta T$

$$\Rightarrow \quad Pt = R \times t \times \rho \times C_e \times \Delta T \qquad \therefore \quad C_e\ líquido = \frac{P}{R \times \rho \times \Delta T}$$

67. Un mol de un gas ideal inicialmente a 300 K se enfría a volumen constante de modo que la presión final es un cuarto de la presión inicial. Después el gas se expande a

presión constante hasta que alcanza la temperatura inicial. Determine el trabajo realizado por el gas.

Resolución :



$n = 1$ mol
$R = 8,31$ J/mol.K

Por la ley de los gases: $P_oV_o = nRT_o \quad \Rightarrow \quad V_o = \dfrac{nRT_o}{P_o}$

Además: $\dfrac{P_o}{4} \cdot V_f = nRT_f \quad \Rightarrow \quad V_f = \dfrac{4nRT_f}{P_o} = \dfrac{4nRT_o}{P_o}$

Luego: $W_{(P=CTE)} = P\Delta V = \dfrac{P_o}{4}\left(\dfrac{4nRT_o}{P_o} - \dfrac{nRT_o}{P_o}\right)$

$\therefore \quad W = 0,75\ nRT_o = (0,75)(1)(8,31)(300) = 1,87$ kJ

68. Una tetera eléctrica está hirviendo, y la potencia eléctrica consumida por el agua en ella es 1,0 kW. Suponiendo que la presión del vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la velocidad a la cual el vapor de agua sale por el pico, el cual tiene un área de sección transversal de 2,0 cm².

68.A Una tetera eléctrica está hirviendo, y la potencia eléctrica consumida por el agua en ella es P. Suponiendo que la presión del vapor en la tetera es igual a la presión atmosférica, determine la velocidad a la cual el vapor de agua sale por el pico, el cual tiene un área de sección transversal A.

Resolución :

Datos: Potencia = 1,0 kW ; Presión = 1 atm = $1,013 \times 10^5\ \dfrac{N}{m^2}$

$T = 100°C = 373$ K ; $n = 1$ mol
$R = 8,31$ J/mol.K

Sabemos que: $P = \dfrac{F}{A}$

$\Rightarrow \quad PA = F$

$\Rightarrow \quad PA \times$ velocidad $= F \times v =$ Potencia

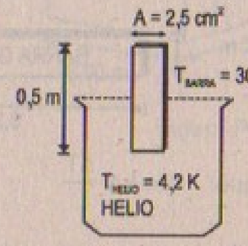
$\Rightarrow \quad (1,013 \times 10^5)\ \dfrac{N}{m^2} \times 2 \times 10^{-4}\ m^2 = 1,0 \times 10^3\ \dfrac{m}{s}$

$\therefore$ Velocidad del vapor = 49,36 m/s

69. Una barra de aluminio de 0,50 m de largo y un área de sección transversal de 2,5 cm² se introduce en un recipiente aislado térmicamente que contiene helio líquido a 4,2 K. La barra está inicialmente a 300 K. a) Si una mitad de la barra se introduce en el helio, ¿cuántos litros de helio hervirán durante el tiempo en que la mitad introducida se enfríe a 4,2 K? (Suponga que la mitad superior no se enfría.) b) Si la parte superior de la barra se mantiene a 300 K, ¿cuál es la tasa de ebullición aproximada del helio líquido después de que la mitad inferior ha llegado a 4,2 K? (Observe que el aluminio tiene una conductividad térmica de 31 J/s.cm.K a 4,2 K, un calor específico de 0,21 cal/g.°C y una densidad de 2,7 g/cm³. Consulte el ejemplo 20.5 para los datos del helio).

Resolución :

Datos: $k_{Al} = 31$ J/s.cm.K
$T_{Al} = 4,2$ K
$C_{e\ Al} = 0,21$ cal/g°C
$\rho_{Al} = 2,7$ g/cm³
$L_{vaporiz.(helio)} = 2,09 \times 10^4$ J/kg



Considerar: $\rho_{helio\ hervido\ (vapor)} = 1,25 \times 10^2\ kg/m^3$

Parte (a)

Sabemos que:

$Q_{transferido\ total\ del\ aluminio\ al\ helio} = M_{Al} \cdot C_{e\ Al}\ \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{transf.total} = \rho_{Al} \cdot V_{Al} \times C_{e\ Al} \times \Delta T$

$\Rightarrow \quad Q_{transf.total} = 2,7\ \dfrac{g}{cm^3} \times (2,5\ cm^2)(50\ cm)(0,21\ \dfrac{cal}{g.°C})(300\ K - 4,2\ K)$

$\Rightarrow \quad Q_{trans.total} = (2,7)(2,5)(50)\left(0,21\dfrac{cal}{°C} \times \dfrac{4,186\ J}{1\ cal}\right)(295,8°C)$

$\therefore \quad Q_{trans.total} = 8,775 \times 10^4$ J

En consecuencia: $Q_{trans.total\ de\ la\ mitad} = 4,39 \times 10^4$ J

Como: $Q_{transf.total\ de\ la\ mitad\ del\ aluminio} = Q_{vaporización\ helio}$

$\Rightarrow \quad 4,39 \times 10^4\ J = M_{helio} \times L_{vaporización\ del\ helio}$

$\Rightarrow \quad 4,39 \times 10^4\ J = \rho_{helio} \cdot$ Volumen $\times 2,09 \times 10^4\ \dfrac{J}{kg}$

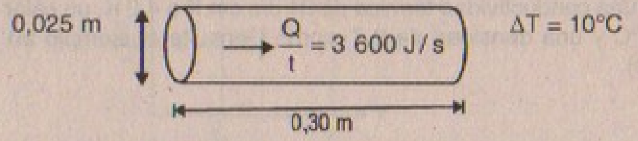
$\therefore \quad M_{helio} = 2,1$ kg

Pero volumen del helio = M_{helio} / ρ_{helio}

$\Rightarrow$ Volumen del helio que hervirán = 2,1 kg / ($1,25 \times 10^{+2}$ kg/m³) = 16,8 L

70. Un tubo térmico de 0,025 m de diámetro y 0,30 m de longitud puede transferir 3 600 J de calor por segundo con una diferencia de temperatura entre los extremos de 10°C. ¿Cómo se compara este rendimiento con la transferencia de calor de una barra de plata sólida de las mismas dimensiones si la conductividad térmica de la plata es $k = 427$ W/m.°C? (La plata es el mejor conductor térmico de todos los metales).

Resolución :



Sabemos que: $H = kA\dfrac{\Delta T}{L}$

$$\Rightarrow \quad H_{plata} = 427\ \frac{J}{m.s.°C} \times \pi\left[\frac{0,025}{2}\right]^2 \times \left(\frac{10°C}{0,30}\right)$$

$$\therefore \quad H_{plata} = 6,986\ J/s$$

Mientras el tubo térmico transfiere 3 600 J/s con un rendimiento del 100%.
El H_{Ag} que es 6,986 J/s representa el 0,194% con respecto del tubo.

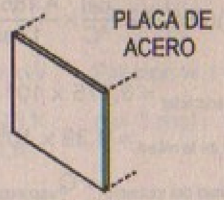
71. Una bala de plomo de 5,00 g que se mueve a 300 m/s choca con una placa de acero plana y se detiene. Si la colisión es inelástica, ¿se fundirá la bala? El plomo tiene un punto de fusión de 327°C, un calor específico de 0,128 J/g.°C y un calor latente de fusión de 24,5 J/g.

Resolución :

Bala de plomo

$\rightarrow$ v = 300 m/s

$m_{bala} = 5,00$ g



Datos: $T_{fusión\ plomo} = 327°C$; $C_{e\ plomo} = 0,128$ J/g°C

$L_{plomo(fusión)} = 24,5$ J/g

Sabemos que: $E_{K\ bala\ plomo} = \dfrac{1}{2}(5 \times 10^{-3})(300)^2$

$$\therefore \quad E_{K(bala\ de\ plomo)} = 225\ J$$

Por otro lado: $Q_{trans\ (fusión)} = m \times L = 5 \times (24,5) = 122,5$ J

Entonces:
Concluimos que al colisionar la bala con la placa, se funde parcialmente hasta que la velocidad del sistema llegue a un límite en que su energía cinética sea menor que el calor de transformación (fusión).

72. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y del techo de la casa de la figura P20.72 es 0,48 W/m.°C, y su espesor promedio es de 21,0 cm. La casa se calienta con gas natural, el cual tiene un calor de combustión (calor entregado por metro cúbico de gas quemado) de 9 300 kcal/m³. ¿Cuántos metros cúbicos de gas deben quemarse cada día para mantener una temperatura interior de 25,0°C si la temperatura exterior es 0,0°C? Ignore la radiación y las pérdidas de calor a través del suelo.

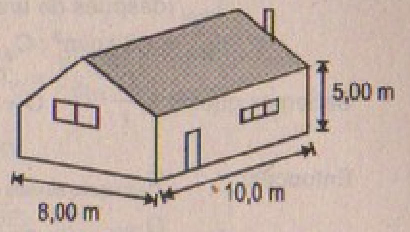


Figura P20.72

Resolución :

Datos: $k = 0,48\ \dfrac{W}{m.°C}$

Espesor promedio = 0,21 m

Sabemos que: $\dfrac{Q}{volumen} = 9\ 300\ \dfrac{kcal}{m^3}$

$$\Rightarrow \quad Q = (8,00\ m)(10,00\ m)(5,00\ m) \times 9\ 300\ \frac{kcal}{m^3}$$

$$\therefore \quad Q = 3,72 \times 10^6\ kcal$$

Por otro lado: $\dfrac{dQ}{dt} = kA\dfrac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = (0,48)\ \frac{AL}{L}\left(\frac{25°C}{0,21}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{1\ día} dQ = \frac{(0,48)(25)}{0,21} \cdot \frac{volumen}{10,0} \int_0^{1\ día} dt$$

$$\Rightarrow \quad Q_{(1\ DÍA)} = 3,72\ k \times 10^6\ cal \times \frac{4,186\ J}{1\ cal} = \frac{0,48}{0,21} \times \frac{25}{10} \times \left[24\ h \times \frac{3\ 600\ s}{1\ h}\right] .\ vol.$$

$$\therefore \quad \frac{volumen}{día} = 2,72\ k \times 10^6\ m^3/día$$

73. Una clase de 10 estudiantes en examen tiene una salida de potencia por estudiante de casi 200 W. Suponga que la temperatura inicial del cuarto es 20°C y que las dimensiones son 6,0 m por 3,0 m. ¿Cuál es la temperatura del cuarto después de 1,0 h si todo el calor permanece en el aire del salón y no se añade nada más por medio de una fuente exterior? El calor específico del aire es de 837 J/kg.°C y su densidad aproximada es de $1,3 \times 10^{-3}$ g/cm³.

Resolución:

Datos: Dimensiones del cuarto: 6,0 cm × 3,0 m × 15,00 m

$T_{\text{inicial cuarto}} = 20°C$

Potencia de cada estudiante = 200 W

T_{final} (después de una hora) = ?

$\rho_{\text{aire}} = 1,3\ \text{kg/m}^3$; $C_{e\ \text{aire}} = 837$ J/kg.°C

Sabemos que: $P = \dfrac{Q}{t} \Rightarrow Q = P \times t = 200\ \dfrac{J}{s} \times t$ (de cada estudiante)

Entonces: $Q_{\text{entregado de cada estud.}} = 200\ \dfrac{J}{s} \times 3\,600\ s = 7,2 \times 10^5$ J (en una hora)

$\therefore \quad Q_{\text{entregado (× 10 alumnos)}} = 7,2 \times 10^6$ J

Como: $Q_{\text{ganado por el aire}} = Q_{\text{transferido(× los 10 estudiantes)}}$

$\Rightarrow \quad \rho_{\text{aire}} V_{\text{aire}} C_e \Delta T = 7,2 \times 10^6$ J

$\Rightarrow \quad 1,3\ \dfrac{kg}{m^3} \times (6 \times 3 \times 15) m^3 \times 837\ \dfrac{J}{kg.°C} \times (T_f - 20°C) = 7,2 \times 10^6$ J

$\therefore \quad T_{\text{FINAL}} = 44,5\ °C$

74. Un gas ideal inicialmente a P_0, V_0 y T_0 efectúa un ciclo como el que se describe en la figura P20.74. a) Encuentre el trabajo neto hecho por el gas por ciclo. b) ¿Cuál es el calor neto agregado al sistema por ciclo? c) Obtenga un valor numérico para el trabajo neto hecho por ciclo por 1 mol de gas inicialmente a 0°C.

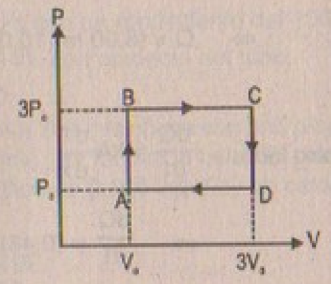


Figura P20.74

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $W_{ABCDA} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

$$\Rightarrow \quad W_{ABCDA} = \underset{(V=CTE)}{W_{A\to B}} + \underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} + \underset{(V=CTE)}{W_{C\to D}} + \underset{(P=CTE)}{W_{D\to A}}$$

$$\Rightarrow \quad W_{ABCDA} = 0 + P.\Delta V + 0 + P.\Delta V$$

$$\Rightarrow \quad W_{ABCDA} = 3P_0(3V_0 - V_0) + P_0(V_0 - 3V_0)$$

$$\therefore \quad W_{ABCDA} = 4P_0V_0$$

Parte (b)

Por la primera ley $\quad \Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad 0 = Q - W \quad \therefore \quad Q_{\text{neto}} = W = 4P_oV_o$

Parte (c)

Para n = 1 mol ; $T_A = 0°C = 273$ K

Entonces: $\quad W_{\text{total}} = W_{B\to C} + W_{D\to A}$

Luego por la ley de gases:

$$T_B = \frac{3P_oV_o}{Rn} \quad \wedge \quad T_C = \frac{9P_oV_o}{Rn}$$

Entonces: $\quad \dfrac{T_B R}{3P_o} = V_o \quad \wedge \quad \dfrac{T_C R}{3P_o} = V_f = 3V_o$

Además: $\quad \dfrac{P_o}{T_A} = \dfrac{3P_o}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_B = \dfrac{3P_o}{P_o}.T_A = 3T_A$

$\dfrac{V_o}{T_B} = \dfrac{3V_o}{T_C} \quad \Rightarrow \quad T_C = \dfrac{3V_o}{V_o}.T_B = 9T_A$

Por lo tanto:

$$\underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} = 3P_o\left[\frac{9RT_A}{3P_o} - \frac{3RT_A}{3P_o}\right] = 6RT_An = 6(1\ \text{mol})(8,31\ \frac{J}{\text{mol.K}})(237\ K)$$

$$\therefore \quad \underset{(P=CTE)}{W_{B\to C}} = 13,61\ kJ$$

Por otro lado: $\quad \underset{(P=CTE)}{W_{D\to A}} = P_o(V_o - 3V_o) = -2P_oV_o = -2nRT_A$

$\Rightarrow \quad W_{D\to A} = -2(1)(8,31)(273) = -4,54$ kJ

En consecuencia: $\quad W_{\text{total}} = W_{ABCDA} = W_{B\to C} + W_{D\to A} = 13,61\ kJ - 4,54\ kJ$

$\therefore \quad W_{\text{total}} = 9,07$ kJ

75. Un submarino de investigación para un pasajero tiene un casco esférico de hierro de 1,50 m de radio exterior y 2,00 cm de espesor, forrado con hule de igual espesor. Si el submarino navega por aguas del Ártico (temperatura de 0°C) y la tasa total de calor liberado dentro de la pequeña nave (incluyendo el calor metabólico del ocupante) es de 1500 W, encuentre la temperatura de equilibrio del interior.

Resolución:

Datos:

$\Delta x = 2 \times 10^{-2}$ m

R = 1,5 m

$\dfrac{Q_{\text{total}}}{t} = 1\,500$ W

$T_{\text{exterior}} = 0°C$

Sabemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = -k.A.\frac{dT}{dr} = \dot{W}\,; \qquad k = 196{,}95\ 158\ 10^{-3}\ \frac{W}{m.°C}$$

$$\Rightarrow \quad W = -k.(4\pi r^2).\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{1,5}^{1,48}\frac{1}{r^2}.dr = \int_0^{T_e} -\frac{4\pi.k}{W}.dT \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{r}\Big|_{1,5}^{1,48} = -\frac{4\pi.k}{\dot{W}}.T_{equilibrio}$$

$$\Rightarrow \quad T_{equilibrio} = \frac{(1{,}5-1{,}48)}{(1{,}5)(1{,}48)}\times\frac{1\,500}{(4\pi)(k)} = \frac{(0{,}02)(1\,500)}{(1{,}5)(1{,}48)(196{,}95\times10^{-3})}$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 5{,}46°C$$

76. Una placa de hierro está sostenida contra una rueda de hierro de modo que una fuerza de fricción de deslizamiento de 50,0 N actúa entre las dos piezas metálicas. La velocidad relativa a la cual las dos superficies se deslizan una sobre la otra es de 40,0 m/s. a) Calcule la tasa a la cual la energía mecánica se convierte en energía térmica. b) La placa y la rueda tienen ambas una masa de 5,00 kg y cada una recibe 50% de la energía térmica. Si durante 10,0 s el sistema opera como se describió y se deja que cada objeto alcance una temperatura interna uniforme, ¿cuál es el aumento de temperatura que se produce?

Resolución:

Datos: $k_{hierro} = 79{,}5$ W/m.°C

$f_r = 50$ N

$v_{relativa} = 40{,}0$ m/s

Parte (a) $\quad \dfrac{Q}{t} = F.v = (50\ N)(40{,}0\ m/s) = 2\,000\ W$

Parte (b) $\quad m_{placa} = M_{rueda} = 5{,}00$ kg

como: $\quad \dfrac{Q}{t} = 2\,000\ W \quad \Rightarrow \quad Q(t) = 2000\ W.t$

luego: $\quad Q(10'0\ s) = 2\times10^3\ (10) = 20$ kJ

Luego: $\quad Q_{placa} = 10$ kJ ; $Q_{rueda} = 10$ kJ

Sabemos que: $\quad \dfrac{Q}{t} = 10\ kW = k_{hierro}\,A\,\dfrac{\Delta T}{\Delta x}$

Además: $\quad 10\ kJ = m_{hierro}\,C_e\Delta T \quad \Rightarrow \quad 10\ kJ = (5\ kg)\left(448\dfrac{J}{K.°C}\right)\Delta T$

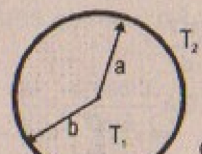
$$\therefore \quad \Delta T = 4{,}46\ °C$$

77. Un recipiente en la forma de un cascarón esférico tiene un radio interior *a* y un radio exterior *b*. La pared tiene una conductividad térmica *k*. Si el interior se mantiene a una temperatura T_1 y el exterior se encuentra a una temperatura T_2, muestre que la tasa de flujo de calor entre las superficies es

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{4\pi\ kab}{b-a}\right)(T_1-T_2)$$

Resolución:

Sea la figura:



Cascarón esférico

Por demostrar que: $\quad \dot{Q} = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{4\pi.k(ab)}{(b-a)}\ (T_1-T_2)$

Sabemos que: $\quad \dot{Q} = -k.A.\dfrac{dT}{dr} = -k.(4\pi.r^2).\dfrac{dT}{dr}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}.dr = -\frac{4\pi.k}{\dot{Q}}.dT \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b\frac{1}{r^2}.dr = -\frac{4\pi.k}{\dot{Q}}\int_{T_1}^{T_2}dT$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\Big|_a^b = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}(T)\Big|_{T_1}^{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{b}-\frac{1}{a} = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}(T_2-T_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{ab} = \frac{4\pi.k}{\dot{Q}}\ (T_1-T_2)$$

$$\therefore \quad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi.K.(ab)(T_1-T_2)}{(b-a)} \qquad \text{l. q.q.d.}$$

78. El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura inferior, T_b (Fig. P20.78). La pared del cilindro tiene una conductividad térmica *k*. Ignore los efectos en los extremos y demuestre que la tasa de flujo de calor de la pared interior a la pared exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi\ Lk\left[\frac{T_a-T_b}{\ln(b/a)}\right]$$

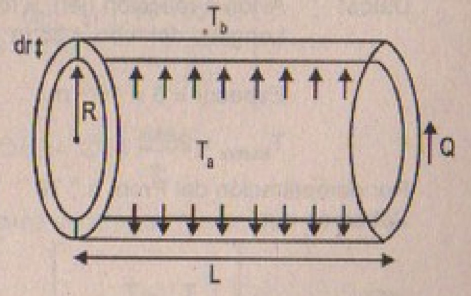


Figura P20.78

(*Sugerencia:* El radiante de temperatura es *dT/dr*. Observe que la corriente de calor radial pasa por un cilindro concéntrico de área 2πrL).

Resolución :

Por demostrar que: $\dfrac{dQ}{dt} = 2\pi k L\left[\dfrac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}\right]$

Sabemos que: $A(r) = 2prL$ $\qquad a < r < b$

Por transferencia de calor: $\dot{Q} = -kA\dfrac{dT}{dr}$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{1}{r}\,dr = -\frac{k(2\pi\times L)}{\dot{Q}}\int_{T_a}^{T_b} dT$$

$$\Rightarrow \quad \ln(r)\Big|_a^b = -\frac{k(2\pi\times L)}{\dot{Q}}.\,T\Big|_{T_a}^{T_b} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{2\pi\times L\times k}{\dot{Q}}(T_b - T_a)$$

Como: $T_a > T_b$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{2\pi\,kL\,(T_a - T_b)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi kL\,(T_a - T_b)}{\ln(b/a)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

79. La sección de pasajeros de un avión a reacción (jet) comercial tiene la forma de un tubo cilíndrico de 35 m de largo y 2,5 m de radio interior. Sus paredes están forradas con un material aislante de 6,0 cm de espesor y de 4 × 10^{-5} cal/s.cm.°C de conductividad térmica. El interior se mantiene a 25°C mientras que el exterior está a −35°C. ¿Qué tasa de calefacción es necesaria para mantener esta diferencia de temperatura? (Emplee el resultado del problema 78).

Resolución :

Datos: Avión a reacción (jet) ≡ forma de un tubo cilíndrico

Longitud del tubo = 35 m ; radio interior = 2,5 m

Espesor = 6×10^{-2} m ; $k = 4 \times 10^{-5}\dfrac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}$

$T_{interior} = 25°C$; $T_{exterior} = -35°C$

Por demostración del Prob. n.° 78

Sabemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi\times L\,k\left[\frac{T_{int.} - T_{ext.}}{\ln\left(\frac{\text{radio ext.}}{\text{radio int.}}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2\pi\times(35)\left(4\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}\right)\times\left[\frac{(25+35)°C}{\ln\left(\frac{2{,}5+6\times10^{-2}}{2{,}5}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2(3{,}1416)(35\text{ cm})\times4\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm°C}}\times\left(\frac{10^2\text{cm}}{1\text{ m}}\right)\times\frac{60°C}{\ln(1{,}024)}$$

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = 2\,226{,}95\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}\times\frac{4{,}186\text{ J}}{1\text{ cal}} = 9{,}32\text{ kW}$$

80. Una botella térmica en la forma de un cilindro tiene un radio interior de 4,0 cm, radio exterior de 4,5 cm y longitud de 30,0 cm. Las paredes aislantes tienen una conductividad térmica igual a 2,0 × 10^{-5} cal/s.cm.°C. Un litro de café caliente a 90°C se vierte dentro de la botella. Si la pared exterior permanece a 20°C, ¿cuánto tardará el café en enfriarse hasta 50°C? (Emplee el resultado del problema 78 y suponga que el café tiene las mismas propiedades que el agua).

Resolución :

Datos: Botella ≡ cilindro hueco ; radio interior = 4,0 cm

Radio exterior = 4,5 cm ; longitud del tubo = 30,0 cm

$k_{térmica} = 2{,}0 \times 10^{-5}$ cal/s cm.°C ; volumen de café = 1 litro

$T_{café} = 90°C$; $T_{exterior} = 20°C$

$t_{(50°C)} = ?$

Por demostración del problema n.° 78 (por sugerencia)

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk\left[\frac{T_{int.} - T_{ext.}}{\ln(b/a)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = 2\,(3{,}1416)(30\text{ cm})(2\times10^{-5}\frac{\text{cal}}{\text{s.cm.°C}}).\left[\frac{(90-20)°C}{\ln\left(\frac{4{,}5}{4{,}0}\right)}\right]$$

$$\int_0^t dQ = 2{,}24\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}\times\int_0^t dt \qquad \therefore \qquad Q(t) = 2{,}24\,\frac{\text{cal}}{\text{s}}\,.\,t$$

Por otro lado: Q necesario para enfriarse el café es: $T_f = 50°C$

$$Q = m_{café}\,.\,C_e\,.\,\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad Q = \rho_{café}\,.\,\text{volumen}\times C_e\times(40°C)$$

$$Q = 1{,}00\ \frac{g}{cm^3} \times 10^3 cm^3 \times \frac{1\ cal}{g.°C} \times 40°C$$

Luego: $Q(t) = Q_{necesario} \Rightarrow 2{,}24\ \frac{cal}{s} \times t = 4 \times 10^4\ cal$

$\therefore\quad t_{enfriarse\ el\ café} = 17\ 857{,}142\ s$

o equivalente a

$$t_{necesario} = 17\ 857{,}142\ s \left(\frac{1\ h}{3\ 600\ s}\right) = 4{,}96\ h$$

81. Una "estufa solar" se compone de un espejo reflejante curvo que concentra la luz solar sobre el objeto que se quiere calentar (Fig. P20.81). La potencia solar por unidad de área que llega a la Tierra en alguna localidad es de 600 W/m^2 y la estufa tiene un diámetro de 0,60 m. Suponiendo que 40% de la energía incidente se convierte en energía térmica, ¿cuánto tiempo tardaría en hervir completamente 0,50 litros de agua inicialmente a 20°C? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente).

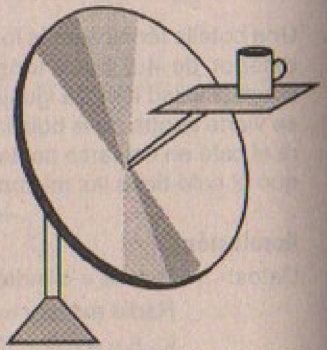


Figura P20.81

Resolución :

Datos: $\frac{\text{potencia solar}}{\text{área}} = 600\ \frac{W}{m^2}$; Diámetro de la taza = 0,60 m

Volumen de agua = 0,50 litros ; $T_{inicial} = 20°C$

Sabemos que: $\frac{P}{A} = 600 \frac{W}{m^2} \Rightarrow P = 600\ \frac{W}{m^2} \times A$

Pero: $A = \pi \left(\frac{0{,}6}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ (0{,}36)$

Luego: $\frac{Q}{t} = P = 600\ \frac{J}{s.m^2} \times \frac{\pi}{4}\ (0{,}36)\ m^2$

$\Rightarrow\quad Q(t) = 169{,}65\ t\ \frac{J}{s}$ (energía incidente)

Luego 40% energía incidente = energía térmica

Entonces $Q_{térmica} = (0{,}4)(169{,}65 \times t)\ \frac{J}{s}$

Pero por otro lado:

$$Q_{térmica\ necesaria\ (hervir)} = m_{H_2O} \cdot C_e \cdot \Delta T + Q_{trans\ (hervir)}$$

$\Rightarrow\quad Q_{necesaria} = \rho_{H_2O} V_{H_2O} \cdot C_e \cdot (100 - 20)°C + (0{,}5)(2{,}26 \times 10^6)\ J/kg$

$\Rightarrow\quad Q_{necesaria} = \frac{1\ g}{cm^3} \times (0{,}5 \times 10^3\ cm^3) \times \frac{1\ cal}{g.°C} \times 80°C + 1{,}13 \times 10^6\ J$

$\therefore\quad Q_{necesaria} = 4 \times 10^4\ cal \times \frac{4{,}186\ J}{1\ cal} = 167\ 440\ J + 1{,}13 \times 10^6\ J$

Como: $Q_{térmica} = Q_{necesaria}$

$\Rightarrow\quad (0{,}4)(169{,}65 \times t) = (167\ 440 + 1{,}13 \times 10^6)\ J$

$\therefore\quad t_{tardará\ en\ hervir\ el\ agua} = 5{,}31\ h$

82. Un estanque cuya agua está a 0°C se cubre con una capa de hielo de 4,0 cm de espesor. Si la temperatura del aire permanece constante en −10°C, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que el espesor del hielo sea de 8,0 cm? (*Sugerencia*: Para resolver este problema utilice la ecuación 20.14 en la forma $\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$ y observe que el calor incremental dQ extraído del agua a través del espesor x de hielo es la cantidad necesaria para congelar un espesor dx de hielo. Es decir, $dQ = L\rho Adx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área y L es el calor latente de congelación).

Resolución :

Datos:

Espesor inicial del hielo = 4,0 cm ; $L_{fusión\ agua} = L_{cong.} = 3{,}33 \times 10^5\ J/kg$

Espesor final del hielo = 8,0 cm ; $\rho_{hielo} = 0{,}917 \times 10^3\ kg/m^3$

$T_{aire} = -10°C$; $k_{hielo} = 2\ w/m°C$

$T_{estanque} = 0°C$

Sabemos que: $\frac{dQ}{dt} = kA\frac{\Delta T}{x}$ ... (1)

Por otro lado: (por sugerencia)

$dQ = L_{solidif.}\ \rho_{hielo}\ Adx$

$$\Rightarrow\quad \int_0^t dQ = L_{solidif}\,.\,\rho_{hielo} A \int_{4{,}0\ cm}^{8{,}0\ cm} dx$$

$$\therefore\quad Q(t) = 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg} \times (0{,}917 \times 10^3\ \frac{kg}{m^3})\ (8\ cm - 4\ cm)\ \frac{(1\ m)}{10^2 cm}\ .\ A$$

De (1): $Q(t) = k.A\ \frac{(10)}{4 \times 10^{-2}}\ dt$

$$\Rightarrow \quad 12{,}21\ A \times 10^6\ \frac{J}{m^2} = A \times \frac{10}{4 \times 10^{-2}} \times 2.t$$

$$\therefore \quad t = 24\ 420\ s \equiv 6{,}78\ h$$

83. Un estudiante obtiene los siguientes datos en un experimento del método de mezclas diseñado para medir el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial del agua y calorímetro: 70°C
Masa del agua: 0,400 kg
Masa del calorímetro: 0,040 kg
Calor específico del calorímetro: 0,63 kJ/kg.°C
Temperatura inicial del aluminio: 27°C
Masa del aluminio: 0,200 kg
Temperatura final de la mezcla: 66,3°C

Emplee estos datos para determinar el calor específico del aluminio. Sus resultados deben estar dentro del 15% del valor listado en la tabla 20.1.

Resolución:

Datos: $T_{\text{inicial del agua y calorímetro}} = 70°C$
Masa del agua = 0,400 kg
Masa del calorímetro = 0,040 kg
Calor específico del calorímetro = 0,63 kJ/kg.°C
$T_{\text{inicial aluminio}} = 27°C$
Masa del aluminio = 0,200 kg
$T_{\text{final de la mezcla}} = 66{,}3°C$
Calor específico del aluminio = ?

Por calorimetría:

$$Q_{\text{ganado del aluminio}} = Q_{\text{perdido}(H_2O)} + Q_{\text{perdido del calorímetro}}$$

Entonces:

$$m_{Al}\, C_{e\,Al}\, \Delta T = m_{H_2O}\, C_e\, \Delta T + m_{calor}\, C_{e\ calor}\, \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}200\ kg)\ C_{e\,Al}\,(66{,}3 - 27)°C = (0{,}4\ kg)(4\ 186 \frac{J}{kg.°C})(70 - 66{,}3)°C$$

$$+ (0{,}040)(0{,}63 \frac{kJ}{kg.°C})(70 - 66{,}3)°C$$

$$\Rightarrow \quad 7{,}86\ kg.°C(C_{e\,Al}) = 1\ 699{,}6\ \frac{J}{kg.°C}\ (3{,}7°C)kg$$

$$\therefore \quad C_{e\,Al} = 800\ \frac{J}{kg.°C}$$

Capítulo 21

LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

MODELO MOLECULAR DE UN GAS IDEAL

1. Encuentre la velocidad rms de moléculas de nitrógeno en condiciones estándar, 0,0°C y 1,00 atm de presión. Recuerde que 1 mol de cualquier gas ocupa un volumen de 22,4 litros en condiciones estándar.

Resolución:

Datos: $T = 0°C = 273\ K$

$P = 1{,}00\ atm \quad ; \quad R = 0{,}082\ \frac{atm\,.\,L}{mol\,.\,K} \equiv 8{,}31\ \frac{J}{mol\,.\,K}$

$n = 1\ mol\ N_2 \quad ; \quad v_{rms} = ?$

$V = 22{,}4$ litros

Sabemos que: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

Como: $PV = nRT$

Además: $1\ mol\ N_2 <> 28\ g/mol \equiv 28 \times 10^{-3}\ kg/mol$

Entonces: $$v_{rms} = \sqrt{\frac{3\,(8{,}31)\,(273)}{28 \times 10^{-3}\ kg/mol}}$$

$$\therefore \quad \boxed{v^2 = 2{,}43 \times 10^5\ m^2/s^2}$$

2. Dos moles de gas oxígeno están confinadas en un recipiente de 5,00 litros a una presión de 8,00 atm. Calcule la energía cinética traslacional promedio de una molécula de oxígeno en estas condiciones. (La masa de una molécula de O_2 es $5{,}31 \times 10^{-26}$ kg).

Resolución:

Datos: $n = 2\ moles\ O_2$

$V = 5{,}00\ litros \quad ; \quad m_{O_2} = 5{,}31 \times 10^{-26}\ kg$

$P = 8{,}00\ atm$

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}nRT = N\left(\frac{1}{2}m\overline{v}^{-2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\left(8{,}00\ \text{atm}\times\frac{1{,}05\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)\left(5\ \text{litros}\frac{10^{-3}\text{m}^3}{1\ \text{litro}}\right) = 2E_K$$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,(mol)} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(8\times1{,}05\times10^5\right)\left(5\times10^{-3}\right)$$

$$\therefore \quad E_{K(mol)} = 3\ 150\ \text{J} \equiv 3{,}15\times10^3\ \text{J}$$

3. Un globo aerostático de investigación a grandes alturas contiene gas helio. A su altura máxima de 20,0 km, la temperatura exterior es de –50,0°C y la presión se ha reducido a 1/19 atm. El volumen del globo en este punto es de 800 m³. Suponiendo que el helio tiene la misma temperatura y presión que la atmósfera circundante, encuentre el número de moles de helio en el globo.

Resolución:

Datos: $h_{máx} = 2\times10^4$ m ; $V = 800$ m³ $R = 8{,}31$ J/mol.K

$T = -50°C \equiv 223$ K ; $n_{He} = ?$

$P = \frac{1}{19}$ atm ; $M_{He} = 4{,}0$ g/mol

Aplicando: PV = nRT

$$\left(\frac{1}{19}\right)\text{atm}\left(\frac{1{,}05\times10^5\text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)800\ \text{m}^3 = n\left(8{,}31\frac{\text{J}}{\text{molK}}\right)(223\ \text{K})$$

$$\therefore \quad n_{He} = 2{,}3\ \text{kmol}$$

4. Para el problema anterior, encuentre a) la masa del helio y b) el volumen del globo cuando se lanza desde el suelo a presión y temperatura estándares (1,00 atm y 0,0°C). c) ¿Qué volumen deberá tener un tanque a 27,0°C y 170 atm para que proporcione esta gran cantidad de helio?

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $n = \frac{m}{M}$

$$\Rightarrow \quad m_{He} = n\times M = (2{,}3\times10^3\ \text{mol})(4\times10^{-3}\ \text{kg/mol})$$

$$\therefore \quad m_{He} = 9{,}2\ \text{kg}$$

Parte (b)

V = ? ; P = 1,00 atm ; T = 0°C = 273 K ; R = 0,082 atm/mol.K

sabemos que: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad (1\ \text{atm})\ V = (2{,}3\times10^3\ \text{mol})\left(0{,}082\ \frac{\text{atm}\,.\,\text{L}}{\text{mol.K}}\right)(273\ \text{K})$$

$$\therefore \quad V = 51{,}5\ \text{kL} \equiv 51{,}5\ \text{m}^3$$

Parte (c)

V = ?; T = 27,0°C ≡ 300 K ; P = 170 atm ; n = 2,3 kmol

Sabemos que: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad V = \frac{n\,RT}{P} = \frac{(2{,}3\times10^3)(0{,}082)(300)}{170}$$

$$\therefore \quad V = 333\ \text{L} = 0{,}3\ \text{m}^3$$

5. Un globo específico de 4 000 cm³ de volumen contiene helio a una presión (interna) de $1{,}2\times10^5$ N/m². ¿Cuántas moles de helio hay en el globo, si cada átomo de helio tiene una energía cinética promedio de $3{,}6\times10^{-22}$ J?

Resolución:

Datos: $V = 4\ 000\ \text{cm}^3\times\frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3} \equiv 4\times10^{-3}\ \text{m}^3$

$P = 1{,}2\times10^5$ N/m²

$E_{K\,prom.c/He} = 3{,}6\times10^{-22}$ J

Sabemos que: $NE_K = \frac{3}{2}\,nRT$

Como: PV = nRT

$$\Rightarrow \quad N.E_K = \frac{3}{2}PV \quad \Rightarrow \quad N(3{,}6\times10^{-22}) = \frac{3}{2}(1{,}2\times10^5)(4\times10^{-3})$$

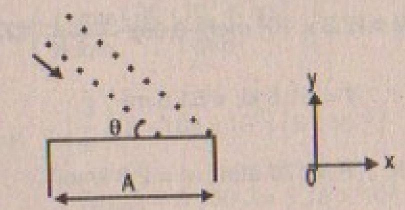
$$\therefore \quad N_{He} = 2{,}0\times10^{24}\ \text{mol}$$

En consecuencia: $n_{He} = \frac{N}{N_A} = \frac{2{,}0\times10^{24}}{6{,}023\times10^{23}} = 3{,}32$ moles

6. Durante 30 s, 500 granizos golpean una ventana de vidrio de 0,60 m² a un ángulo de 45° respecto de la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa de 5,0 g y una velocidad de 8,0 m/s. Si las colisiones son elásticas, encuentre la fuerza y la presión promedio sobre la ventana.

6A. En un tiempo *t*, *N* granizos golpean una ventana de vidrio de área *A* a un ángulo θ respecto de la superficie de la ventana. Cada granizo tiene una masa *m* y una velocidad *v*. Si las colisiones son elásticas, encuentre la fuerza y la presión promedio sobre la ventana.

Resolución :



$$F_x = \frac{N.m}{d}v_x^2 = \frac{N.m}{v\times t}\times(v\cos\theta)^2 = \frac{N.m\,v\cos^2\theta}{t}$$

$$F_y = \frac{N.m}{d}v_y^2 = \frac{N.m}{v\times t}\times(v\,\text{sen}\,\theta)^2 = \frac{N.m\;v\,\text{sen}^2\theta}{t}$$

$$\therefore \quad F_{\text{promedio}} = \frac{N.mv}{t}$$

Luego: $\quad P_{\text{promedio}} = \frac{F_{\text{prom.}}}{A} = \frac{N.mv}{A\times t}$

7. Un cilindro contiene una mezcla de gases helio y argón en equilibrio a 150°C. ¿Cuál es la energía cinética promedio de cada molécula de gas?

Resolución :

Datos: $\quad T_{He+Ar} = 150°C \equiv 423\text{ K}$

$E_{K\,prom.} = ?$

$k_B = 1{,}38\times10^{-23}\ \frac{J}{K}$

Sabemos que: $\quad N\,.\,E_{K\,prom.} = \frac{3}{2}\,nRT = \frac{3}{2}Nk_BT$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,prom.} = \frac{3}{2}(1{,}38\times10^{-23})(423) \qquad \therefore\ E_{K\,prom.} = 8{,}76\times10^{-21}\text{ J}$$

8. Calcule la velocidad rms de una molécula de H_2 de 250°C.

Resolución :

$$v_{rms\,(H_2)} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31)(523)}{2{,}02\times10^{-3}}}$$

$$\therefore \quad v_{rms(H_2)} = 2{,}54\times10^3\text{ m/s}$$

9. a) Determine la temperatura a la cual la velocidad rms de un átomo de He es igual a 500 m/s. b) ¿Cuál es la velocidad rms del He sobre la superficie del Sol, donde la temperatura es de 5 800 K?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\quad v_{rms\,(He)} = 500\text{ m/s} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}} = \sqrt{\frac{3\,(8{,}31)T}{4{,}0\times10^{-3}\text{kg/mol}}}$

$$\Rightarrow \quad (500)^2 = \frac{3(8{,}31)T\times10^3}{4{,}0} \qquad \therefore \quad T = 40{,}1\text{ K}$$

Parte (b) $\quad v_{rms\,(He\ a\ 5\,800\ K)} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}}$

$$\Rightarrow \quad v_{rms(He)} = \sqrt{\frac{3(8{,}31)(5\,800)}{4\times10^{-3}}} \qquad \therefore \quad v_{rms(He)} = 6{,}01\text{ km/s}$$

10. El helio gaseoso está en equilibrio térmico con helio líquido a 4,20 K. Determine la velocidad más probable de un átomo de helio (masa = $6{,}65\times10^{-27}$ kg).

Resolución :

Datos: $\quad T_{equi} = 4{,}20\text{ K}\ ; \quad m_{He} = 6{,}65\times10^{-27}\text{ kg}$

$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K

Sabemos que: $\quad N\,E_{K\,prom.} = \frac{3}{2}\,nRT = \frac{3}{2}\,N\,k_B\,T$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,prom.}\,c/a = \frac{3}{2}\,k_B.T = \frac{3}{2}\,(1{,}38\times10^{-23})(4{,}20)$$

$$\therefore \quad E_{K\,prom.c/a\,He} = 8{,}7\times10^{-23}\text{ J}$$

En consecuencia: $\quad \frac{1}{2}m_{He}\,.\,\bar{v}^2 = 8{,}7\times10^{-23}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(6{,}65\times10^{-27})\bar{v}^2 = 8{,}69\times10^{-23}$$

$$\therefore \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2(8{,}69)(10^4)}{6{,}65}} = 162\text{ m/s}$$

11. Si la velocidad rms de un átomo de helio a temperatura ambiente es 1 350 m/s, ¿cuál es la velocidad rms de una molécula de oxígeno (O_2) a esta temperatura? (La masa molar del O_2 es 32 y la masa molar del He es 4).

Resolución :

Datos: $\quad v_{rms\,He} = 1\,350\text{ m/s}$ (T ambiente)

$M_{O_2} = 32$ g/mol $\ ; \quad v_{rms(O_2)} = ?$

Sabemos que: $1\,350\ m/s = \sqrt{\dfrac{3RT_{amb.}}{M_{He}}}$

$$\Rightarrow\quad 1\,350 = \sqrt{\dfrac{3(8{,}31)\,T_{amb.}}{4{,}0\times10^{-3}\ kg/mol}}$$

$$\Rightarrow\quad T_{amb.} = \dfrac{(1\,350)^2\times4\times10^{-3}}{(3)\times(8{,}31)}$$

Por otro lado: $v_{rms}(O_2) = \sqrt{\dfrac{3RT_{amb.}}{M_{O_2}}} = \sqrt{\dfrac{3(8{,}31)(1\,350)^2(4)\times10^{-3}}{(3)(8{,}31)(32)(10^{-3})}}$

$$\therefore\quad v_{rms}(O_2) = 4{,}77\times10^2\ m/s$$

12. Un recipiente de 5,00 litros contiene gas nitrógeno a 27,0°C y 3,00 atm. Encuentre a) la energía cinética traslacional total de las moléculas del gas, y b) la energía cinética promedio por molécula.

Resolución:

Datos: $V_{N_2} = 5{,}0$ litros ; $T = 27°C = 300\ K$
$P = 3{,}00$ atm

Parte (a)

Sabemos que: $E_{total} = NE_{K\ prom.} = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}PV$

$$E_{total} = \left(\dfrac{3}{2}\right)(3{,}00\ atm\times\dfrac{1{,}03\times10^5}{1\ atm}N/m^2)(5\times10^{-3}\ m^3)$$

$$\therefore\quad E_{total} = 2{,}32\ kJ$$

Parte (b)

Sabemos que: $PV = nRT$

$$\Rightarrow\quad (5)(3) = n\,(0{,}082)(300\ K)$$

$$\therefore\quad n = 0{,}609\ mol$$

Luego: $N = nN_A = (0{,}609)(6{,}023\times10^{23}) = 3{,}67\times10^{23}$ mol

En consecuencia: $2{,}32\times10^3 = NE_{K\ prom.}$

$$\therefore\quad E_{K\ prom.C/M} = \dfrac{2{,}3\times10^3}{3{,}67\times10^{23}} = 0{,}63\times10^{-20}\ J$$

13. Un mol de gas xenón a 20,0°C ocupa 0,0224 m³. ¿Cuál es la presión ejercida por los átomos de Xe sobre las paredes del recipiente?

Resolución:

Datos: $n = 1$ mol X_e ; $T = 20°C = 293\ K$
$V = 0{,}0224\ m^3$; $P = ?$

$$PV = nRT \quad\Rightarrow\quad P(0{,}0224\ m^3) = (1)\left(8{,}31\dfrac{J}{mol.K}\right)(293\ K)$$

$$\therefore\quad P = 1{,}09\times10^5\ N/m^2 = 109\ kPa$$

14. a) ¿Cuántos átomos de gas helio son necesarios para llenar un globo hasta un diámetro de 30,0 cm a 20,0°C y 1,00 atm? b) ¿Cuál es la energía cinética promedio de cada átomo de helio? c) ¿Cuál es la velocidad promedio de cada átomo de helio?

Resolución:

Parte (a)

Datos: $P = 1{,}00$ atm ; $T = 20°C = 293\ K$; $R = 8{,}31\ \dfrac{J}{mol.K}$

Diámetro = 0,3 m

Aplicando: $PV = nRT$

$$\Rightarrow\quad (1{,}03\times10^5)\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)\left[\dfrac{0{,}3}{2}\right]^3 = (n)(8{,}31)(293\ K)$$

$$\therefore\quad n_{He} = 0{,}59$$

Luego: $N_{átomos} = n_{He}\,.\,N_A = 3{,}55\times10^{23}$ átomos

Parte (b)

Sabemos que: $NE_{K\ prom.} = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}PV$

$$\Rightarrow\quad E_{K\ prom.C/átomo} = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{(0{,}59)(8{,}31)(28)}{(0{,}59)(6{,}033\times10^{23})}$$

$$\therefore\quad E_{K\ prom.C/átomo} = 6{,}06\times10^{-21}\ J$$

Parte (c)

Sabemos que: $6{,}06\times10^{-21} = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow\quad 6{,}06\times10^{-21} = \dfrac{1}{2}(nM_{He})\,v^2$$

$$\Rightarrow\quad 6{,}06\times10^{-21} = \dfrac{1}{2}(0{,}59)(4\times10^{-3}\dfrac{kg}{mol})\,\overline{v}^2$$

$$\therefore\quad \overline{v}_{He} = 2{,}27\times10^{-9}\ m/s$$

CALOR ESPECÍFICO DE UN GAS IDEAL

15. Calcule el cambio en la energía interna de 3,0 mol de gas helio cuando su temperatura se incrementa en 2,0 K.

Resolución :

Datos: $n = 3{,}0$ mol ; $R = 8{,}31$ J/mol.K
$\Delta T = 2{,}0$ K ; $\Delta U = ?$

Sabemos que: $U = \dfrac{3}{2}nRT$

$\Rightarrow \quad \Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \dfrac{3}{2}(3{,}0)(8{,}31)(2{,}0)$

$\therefore \quad \Delta U = 75{,}0$ J

16. Un mol de un gas diatómico tiene una presión P y un volumen V. Al calentar el gas, su presión se triplica y su volumen se duplica. Si este proceso de calentamiento incluye dos pasos, uno a presión constante y el otro a volumen constante, determine la cantidad de calor transferido al gas.

Resolución :

Datos: $P_{inicial} = P$; $P_{final} = 3P$ $\quad C_P = \dfrac{7}{2}R$

$V_{inicial} = V$; $V_{final} = 2V$ $\quad C_V = \dfrac{5}{2}R$

$T_{inicial} = \dfrac{PV}{nR}$; $\quad T_{final} = \dfrac{6PV}{nR}$

Por la primera ley de la termodinámica: $\Delta U_{total} = Q_{total} - W_{total}$

$\Rightarrow \quad nC_V\Delta T = Q_{total} - P\int dV$

$\Rightarrow \quad Q_{total} = n\,C_v\,\Delta T + P\int dV$

$\Rightarrow \quad Q_{total} = n\left(\dfrac{5R}{2}\right)\left(\dfrac{6PV}{nR} - \dfrac{PV}{nR}\right) + P\int_V^{2V} dV$

$\Rightarrow \quad Q_{total} = \dfrac{25\,nRPV}{2\,nR} + PV$

$\therefore \quad Q_{total} = \dfrac{27}{2}PV$

17. Un mol de un gas monoatómico ideal está a una temperatura inicial de 300 K. El gas se somete a un proceso isovolumétrico en el que adquiere 500 J de calor. Después se somete a un proceso isobárico en el cual pierde esta misma cantidad de calor. Determine a) la nueva temperatura del gas, y b) el trabajo realizado sobre el gas.

17A. Un mol de un gas monoatómico ideal está a una temperatura inicial T_0. El gas experimenta un proceso isovolumétrico en el que adquiere el calor Q. Después se somete a un proceso isobárico en el cual pierde esta misma cantidad de calor. Determine a) la nueva temperatura del gas, y b) el trabajo realizado sobre el gas.

Resolución :

Datos: "Gas monoatómico"

$T_{inicial} = 300$ K ; $\quad C_V = \dfrac{3}{2}R$; $\quad C_P = \dfrac{5}{2}R$

$Q_i = 500$ J ; $\quad n = 1$ mol

Parte (a)

Inicialmente: $\Delta U = Q$ (proceso isovolumétrico)

$\Rightarrow \quad nC_v\Delta T = 500\text{ J} \quad \Rightarrow \quad (1{,}00\text{ mol})\left(\dfrac{3}{2}(R)\right)\times(T_f - 300) = 500\text{ J}$

$\therefore \quad T_f = 340{,}1$ K

Finalmente: $\Delta U = Q - W$ (proceso isobárico)

$\Rightarrow \quad nC_v\Delta T = -500\text{ J} - P\Delta V = -500\text{ J} - nR\Delta T$

$\Rightarrow \quad (1)\left(\dfrac{3}{2}R\right)(T_N - T_f) + (1)(R)(T_N - T_f) = -500\text{ J}$

Desarrollando: resulta que $T_{nueva\ del\ gas} = 316$ K

Parte (b)

De la primera ley $\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad (1)\left(\dfrac{3}{2}R\right)(316 - 340) = -500\text{ J} - W$

$\Rightarrow \quad W = -500\text{ J} + (1{,}5)(8{,}31)(24) \qquad \therefore \quad W_{total} = |200\text{ J}|$

18. Un mol de aire ($C_v = 5R/2$) a 300 K confinado en un cilindro bajo un pesado émbolo ocupa un volumen de 5,0 litros. Determine el nuevo volumen del gas si 4,4 kJ de calor se transfieren al aire.

Resolución :

Datos: $C_v = 5R/2$; $n = 1$ mol ; $T_{inicial} = 300$ K ; $V_{inicial} = 5{,}0$ litros
$Q = 4{,}4$ kJ ; $V_{final} = ?$

Sabemos que: $P_{inicial} \times V_{inicial} = n\,R\,T_{inicial}$

$\Rightarrow \quad P_{inicial} \times 5{,}0 \times 10^{-3}\ m^3 = (1{,}00\ mol)(8{,}31)(300)$

$\therefore \quad P_i = 5 \times 10^5\ N/m^2$

Por otro lado: (por la primera ley de la termodinámica)

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad nC_v\Delta T = nC_e P \frac{\Delta V}{nR} = 4{,}4\ kJ - 5 \times 10^5\ \Delta V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}(5 \times 10^5)(\Delta V) + 5 \times 10^5\ \Delta V = 4{,}4\ kJ \quad \therefore \quad V_{final} = 7{,}5 \times 10^{-3}\ m^3$$

19. Un mol de gas hidrógeno se calienta a presión constante desde 300 K hasta 420 K. Calcule a) el calor transferido al gas, b) el aumento en su energía interna, y c) el trabajo hecho por el gas.

Resolución : 19

Datos: $T_{inicial} = 300\ K$; $n = 1\ mol\ H_2$

$T_{final} = 420\ K$; $C_{p\,(H_2)} = 28{,}8\ J/mol.K$

$P = cte$; $C_{v\,(H_2)} = 20{,}4\ J/mol.K$

Parte (a) $Q_{trans.} = nC_p\Delta t$

$$\Rightarrow \quad Q_{trans.} = (1\ mol)\left(28{,}8\ \frac{J}{mol.K}\right)(420 - 300)\ K$$

$$\therefore \quad Q_{trans.} = 3{,}46\ kJ$$

Parte (b) $\Delta U = nC_v\Delta T$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = (1\ mol)\left(20{,}4\ \frac{J}{mol.K}\right)(120\ K)$$

$$\therefore \quad \Delta U = 2{,}45\ kJ$$

Parte (c)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Rightarrow \quad W = Q - \Delta U \quad \Rightarrow \quad W = 3{,}46 - 2{,}45$$

$$\therefore \quad W = 1{,}01\ kJ$$

20. En un proceso a volumen constante, 209 J de calor se transfieren a 1 mol de un gas monoatómico ideal con una temperatura inicial de 300 K. Encuentre a) el aumento en la energía interna del gas, b) el trabajo que efectúa, y c) su temperatura final.

Resolución :

Datos: $V = cte$; $C_v = \frac{3}{2}R$

$Q = 209\ J$; $n = 1\ mol$

$T_{inicial} = 300\ K$

Parte (a)

Sabemos que: $Q = nC_v\Delta T \quad \Rightarrow \quad 209 = (1\ mol)\left(\frac{3}{2}\right)(8{,}31)(T_{final} - 300\ K)$

$\therefore \quad T_{final} = 316{,}8\ K$

Luego: $\Delta U = nC_v\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta U = (1\ mol)\left(\frac{3}{2}\right)(8{,}31)(316{,}8 - 300)\ K$

$\therefore \quad \Delta U = 209{,}4\ J$

Parte (b)

Por la primera ley: $\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad 209{,}4 = 209 - W$

$\therefore \quad W = 0{,}4\ J$

Parte (c)

Por lo hallado en la parte (a)

$$T_{final} = 316{,}8\ K$$

21. ¿Cuál es la energía térmica de 100 g de gas He a 77 K? ¿Cuánta energía debe agregársele para calentarlo hasta 24°C?

Resolución :

Datos: $m_{He} = 100\ g$; $M_{He} = 4{,}0\ g/mol$

$T_{inicial} = 77\ K$; $T_{final} = 24 + 273 = 297\ K$

$\Delta U = ?$

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \Rightarrow \quad U = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{100}{4}\right)(8{,}31)(77)$$

$$\therefore \quad U = 24{,}0\ kJ$$

Por otro lado: $\Delta U = \frac{3}{2}n\,R\Delta T$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{100}{4}\right)(8{,}31)(297 - 77)$$

$$\therefore \quad \Delta U = 68{,}5\ kJ$$

22. Un recipiente tiene una mezcla de dos gases: n_1 moles del gas 1 que tiene calor específico molar C_1 y n_2 mol del gas 2 con calor específico molar C_2. a) Determine el calor específico molar de la mezcla. b) ¿Cuál es el calor específico molar si la mezcla tiene m gases con $n_1, n_2, n_3, ..., n_m$ moles, y calores específicos molares $C_1, C_2, C_3, ..., C_m$, respectivamente?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $n_{total} = n_1 + n_2 \Rightarrow C_{total} = \frac{1}{n_{total}} \cdot \frac{dU}{dT}$

Por otro lado: $dU = n_1 C_1 . dT \Rightarrow \frac{1}{C_1}\left(\frac{dU}{dT}\right) = n_1$

$dU = n_2 C_2 . dT \Rightarrow \frac{1}{C_2}\left(\frac{dU}{dT}\right) = n_2$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 = \frac{dU}{dT}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

$$\Rightarrow n_{total} = \frac{dU}{dT}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right) \therefore C_{total} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Parte (b)

Sabemos que: $n_1 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{dU}{dT}\right)$

$$n_2 = \frac{1}{C_2}\left(\frac{dU}{dT}\right)$$

$\vdots \quad \vdots$

$$\sum_{i=1}^{n=m} n_i = \sum_{i=1}^{n=m} \frac{1}{C_i}\left(\frac{dU}{dT}\right) \quad \dots (\alpha)$$

además: $n_{totales} = \frac{1}{C_{totales}}\left(\frac{dU}{dT}\right) \quad \dots (\beta)$

Luego: $C_{totales} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n=m} \frac{1}{C_i}}$

23. Una habitación de una casa bien aislada tiene un volumen de 100 m^3 y se llena con aire a 300 K. a) Encuentre la energía necesaria para aumentar la temperatura de este volumen de aire en 1,0°C. b) Si esta energía pudiera utilizarse para levantar un objeto de masa *m* hasta una altura de 2,0 m, calcule el valor de *m*.

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $PV = nRT$ (P = 1,00 atm)

$\Rightarrow (1{,}013 \times 10^5)(100) = n \times (8{,}31)(300) \therefore n_{aire} = 4{,}06 \times 10^3$ moles

por otro lado: por la primera ley de la termodinámica:

$dU = Q - W$ (V = constante)

$\Rightarrow U_{total\ necesaria} = nR\Delta T + nC_v\Delta T$

$\Rightarrow U_{necesaria} = (1\ k)\ [4{,}06 \times 10^3 \times 8{,}31 + 4{,}06 \times 10^3 \times \frac{5}{2}(8{,}31)]$

$\therefore U_{necesaria} = 4{,}06 \times 10^3 \times (8{,}31)\ [1 + 2{,}5] = 118 \times 10^3 = 118$ kJ

Parte (b)

Por conservación de energía:

$$U_{necesaria} = E_{potencial\ gravitatoria}$$

$\Rightarrow 118$ kJ $= (M)(9{,}8)(2{,}0) \quad \therefore \quad M = 6{,}03 \times 10^3$ kg

24. ¿Cuánta energía térmica tiene el aire en un cuarto de 20,0 m^3 a a) 0,0°C y b) 20,0°C? Suponga que la presión permanece en 1,00 atm.

Resolución :

Parte (a)

Datos: $V = 20{,}0$ m^3 ; $Q = ?$

$T = 0°C \equiv 273$ K ; $P = 1$ atm $\equiv 1{,}013 \times 10^5$ N/m^2

Sabemos que: $Q = nC_p\Delta T \Rightarrow Q = n\frac{7}{2}R(273\ K)$

Por otro lado: $PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T}$

Luego: $Q = \frac{7}{2}\frac{PV}{T}(273\ K) \Rightarrow Q = \frac{7}{2} \times 1{,}013 \times 10^5 \times 20$

$\therefore Q = 7\,091$ kJ

Parte (b)

Datos: $V = 20{,}0$ m^3

$T = 20°C \equiv 293$ K ; $Q = ?$

$P = 1{,}00$ atm $\equiv 1{,}013 \times 10^5$ N/m^2

Sabemos que: $Q = nC_p\Delta T \Rightarrow Q = n\,\frac{7}{2}\,R(293\ K)$

Por otro lado: $PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T}$

Luego: $Q = \frac{7}{2} \times \frac{PV}{T} \times 293\ K \Rightarrow Q = \frac{7}{2} \times 1{,}013 \times 10^5 \times 20$

$\therefore Q = 7\,091$ kJ

PROCESOS ADIABÁTICOS PARA UN GAS IDEAL

25. Dos moles de un gas ideal ($\gamma = 1{,}40$) se expande lenta y adiabáticamente desde una presión de 5,00 atm y un volumen de 12,0 litros hasta un volumen final de 30,0 litros. a) ¿Cuál es la presión final del gas? b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$; $n = 2$ moles

$P_{inicial} = 5{,}00$ atm ; $V_{inicial} = 12{,}0$ litros

$V_{final} = 30{,}0$ litros ; $P_{final} = ?$

Parte (a)

Sabemos que: $PV^{\gamma} = \text{cte}$

Entonces: $(5{,}00 \text{ atm}) \times 12^{1{,}4} = P_{final} \times 30^{1{,}4}$

$\therefore \quad P_{final} = 1{,}39$ atm

Parte (b)

Sabemos que: $PV^{\gamma} = \text{cte}$

Además: $PV = nRT \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{nRT}{P}$

Luego: $P\left(\dfrac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = \text{cte}$

$\therefore \quad P^{1-\gamma} \times T^{\gamma} = \text{cte}$

Luego: $(5{,}00 \text{ atm})(12 \text{ litros}) = (2 \text{ mol})(0{,}082 \dfrac{\text{atm} \times \text{l}}{\text{mol . K}})(T_{inicial})$

$\therefore \quad T_{inicial} = 366$ K

Hallando "T_{final}" de la condición: $P^{1-\gamma} \times T^{\gamma} = \text{cte}$

$\Rightarrow \quad (5{,}00 \text{ atm})^{1-1{,}4} \times (366)^{1{,}4} = (1{,}39 \text{ atm})^{1-1{,}4} \times T_{final}^{1{,}4}$

$\Rightarrow \quad (5{,}00 \text{ atm})^{-0{,}4} \times (366)^{1{,}4} = (1{,}39 \text{ atm})^{-0{,}4} \times T_{final}$

$\therefore \quad T_{final} = 254$ K

26. Cuatro litros de un gas ideal diatómico ($\gamma = 1{,}40$) confinado en un cilindro se someten a un ciclo cerrado. El gas está a una presión inicial de 1,0 atm y a 300 K. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente hasta su presión original y por último se comprime isobáricamente hasta su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre c) la temperatura del gas al principio de la expansión adiabática, y d) la temperatura al final del ciclo, e) ¿Cuál es el trabajo neto hecho en este ciclo?

26A. Un gas ideal diatómico ($\gamma = 1{,}40$) confiando en un cilindro se somete a un ciclo cerrado. El gas está inicialmente a P_0, V_0 y T_0. Primero, su presión se triplica bajo volumen constante. Luego se expande adiabáticamente hasta su presión original y por último se comprime isobáricamente hasta su volumen original. a) Dibuje un diagrama *PV* de este ciclo. b) Determine el volumen al final de la expansión adiabática. Encuentre c) la temperatura del gas al principio de la expansión adiabática, y d) la temperatura al final del ciclo. e) ¿Cuál es el trabajo neto hecho en este ciclo?

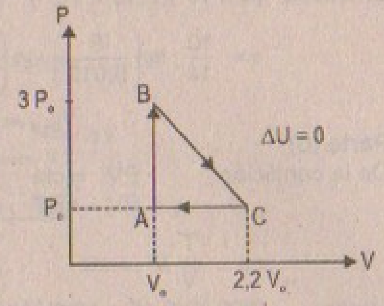
Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$

$P_{inicial} = P_0$; $V_{inicial} = V_0$

$T_{inicial} = T_0$

Parte (a)



De la condición:

$$3P_o \times V_o^{\gamma} = P_o \times V_{final}^{\gamma}$$

$\therefore \quad V_{final} = 3^{1/1{,}4} \times V_o = 2{,}2\, V_o$

Parte (b)

De lo hallado en la parte (a) $V_{final} = 2{,}2\, V_o$

Parte (c)

De la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W$

$\Rightarrow \quad 0 = Q - W \quad \therefore \quad W_{total} = Q$

Luego: $W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$

$\Rightarrow \quad W_{total} = nC_v\Delta T + 0 + n\,C_p\,.\,\Delta T$

$\Rightarrow \quad W_{total} = n \times \dfrac{5R}{2} \times \dfrac{2P_oV_o}{nR} + n \times \dfrac{7R}{2} \times \left(-1{,}2\,\dfrac{P_oV_o}{nR}\right)$

$\Rightarrow \quad W_{total} = 5\,P_o\,.\,V_o - 4{,}2\,P_o.V_o$

$\therefore \quad W_{total} = 0{,}8\,P_o.\,V_o$

27. Aire ($\gamma = 1{,}4$) a 27°C y presión atmosférica se extrae de una bomba de bicicleta que tiene un cilindro con un diámetro interno de 2,5 cm y 50,0 cm de longitud. La carrera descendente comprime al aire adiabáticamente, el cual alcanza una presión manométrica de 800 kPa antes de entrar a la llanta. Determine a) el volumen del aire comprimido, y b) la temperatura del aire comprimido. c) La bomba es de acero y tiene una pared interior cuyo espesor es de 2,00 mm. Suponga que se deja que 4,0 cm de la longitud del cilindro alcancen el equilibrio térmico con el aire. ¿Cuál será el aumento de temperatura de la pared?

Resolución:

Datos: $\gamma = 1{,}4$; $T_{inicial} = 27°C \equiv 300$ K

$P_{inicial} = P_{man} = 800 \text{ kPa}$

$P_{final} = P_{man} + P_{atm} = 9{,}013 \times 10^5 \text{ Pa}$

$\text{Volumen inicial} = \pi \dfrac{D^2}{4} . L = (3{,}1416) \times \dfrac{1}{4} \times (0{,}025)^2 (0{,}5) = 2{,}45 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

Volumen final = ?

Parte (a)

De la condición: $P.V^\gamma = \text{cte}$ (proceso adiabático)

Entonces: $(8 \times 10^5)(2{,}45 \times 10^{-4})^{1,4} = (9{,}013 \times 10^5)(V_{final})^{1,4}$

$$\Rightarrow \frac{10}{14} . \ln\left(\frac{8}{9{,}013}\right) + \ln\left(\frac{2{,}45}{10\,000}\right) = \ln (V_{final})$$

$$\therefore \quad V_{final} \approx 2{,}06 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Parte (b)

De la condición: $PV^\gamma = \text{cte}$

y : $PV = nRT$

$$\Rightarrow \frac{T}{V} V^\gamma = \text{cte} \qquad \therefore \quad T.V^{\gamma-1} = \text{cte}$$

Luego: $(300 \text{ K})(2{,}45 \times 10^{-4})^{1,4-1} = T_{final}\,(2{,}06 \times 10^{-4})^{1,4-1}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}4 \ln\left(\frac{2{,}45}{2{,}06}\right) + \ln (300) = \ln (T_{final})$$

$$\therefore \quad T_{final} = 321 \text{ K}$$

28. Durante la carrera de potencia en un motor de automóvil de cuatro tiempos, el émbolo es obligado a bajar cuando la mezcla de la gasolina y el aire se somete a una expansión adiabática reversible. Encuentre la potencia promedio generada durante la expansión suponiendo a) que el motor trabaja a 2 500 rpm, b) la presión manométrica justo antes que la expansión es de 20 atm, c) los volúmenes de la mezcla justo antes y después de la expansión son 50 y 400 cm³, respectivamente (Fig. P21.28), d) el tiempo en el que ocurre la expansión es un cuarto del ciclo total, y e) la mezcla se comporta como un gas ideal.

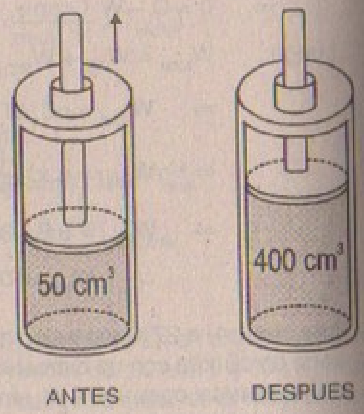


Figura P21.28

Resolución:

Potencia promedio = ?

Datos: El motor trabaja a 2500 rev/min

La presión manométrica antes es: 20,0 atm

Volumen inicial = 50,0 cm³ ; volumen final = 400 cm³

$$t_{total} = \frac{1}{4} \text{ del ciclo total}$$

La mezcla se comporta como un gas ideal.

De la condición: $P.V^\gamma = \text{cte}$

$$\Rightarrow \quad P_{inicial} \cdot V^\gamma_{inicial} = P_{final} \cdot V^\gamma_{final}$$

$$\Rightarrow \quad [(20{,}0 \text{ atm}) + 1 \text{ atm}]\,(50 \text{ cm}^3)^\gamma = (1 \text{ atm})(400 \text{ cm}^3)^\gamma$$

$$\therefore \quad \gamma = 1{,}46$$

Por otro lado: $dW = PdV \qquad \Rightarrow \quad dW = \text{cte}\,\dfrac{1}{V^\gamma}\,dV$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = P_{inicial} \cdot V^\gamma_{inicial} \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} \frac{1}{V^\gamma}\,dV$$

$$\therefore \quad W_{total} = \frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial} - P_{final} \cdot V_{final}}{\gamma - 1}$$

Reemplazando:

$$W_{total} = \frac{(21 \text{ atm})\,(50 \text{ cm}^3) - (400 \text{ cm}^3)(1 \text{ atm})}{1{,}46 - 1} \cdot \left[\frac{1{,}013 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{cm}^3}\right]$$

$$\therefore \quad W_{total} = 143 \text{ J}$$

Además: 2 500 rev —— 60 s $\qquad \therefore \quad x = \dfrac{125}{3} \text{ s}$

1 rev —— x

Luego: $$t_{expansión} = \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{125}{12} \text{ s}$$

En consecuencia:

$$\text{Potencia promedio} = \frac{W_{total}}{s} = \frac{143 \text{ J}}{\dfrac{125}{12} \text{ s}} = 13{,}73 \text{ watts}$$

29. Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1,00 atm a 20,0 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y reversible y que el gas es ideal con $\gamma = 1{,}40$, a) ¿en qué factor cambia el volumen, y b) en qué factor cambia la temperatura?

Resolución:

Datos: "Proceso adiabático reversible"

$P_{inicial} = 1 \text{ atm} \quad ; \quad \gamma = 1{,}4 \quad ; \quad P_{final} = 20{,}0 \text{ atm}$

Parte (a)

De la condición: $P.V^\gamma = \text{cte}$

$$\Rightarrow \quad P^\gamma_{inicial} \cdot V_{inicial} = P_{final} \cdot V^\gamma_{final}$$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00\text{ atm})(V_{inicial})^{1,4} = (20{,}0\text{ atm})(V_{final})^{1,4}$$

$$\therefore \quad \frac{V_{inicial}}{V_{final}} = 8{,}5$$

Parte (b)

De la condición: $P^{1-\gamma}\, T^{\gamma} = cte$

Entonces: $(P_{inicial})^{1-\gamma}\; T^{\gamma}_{inicial} = T^{\gamma}_{final}\; (P_{final})^{1-\gamma}$

$$\Rightarrow \quad (1{,}00\text{ atm})^{1-1,4} \times T_{inicial}{}^{1,4} = (20\text{ atm}) \times T^{1,4}_{final}$$

$$\therefore \quad \frac{T_{inicial}}{T_{final}} = 0{,}42 \quad \text{ó} \quad \frac{T_{final}}{T_{inicial}} = 2{,}35$$

30. Gas helio a 20,0°C se comprime reversiblemente sin perder calor hasta un quinto de su volumen. a) ¿Cuál es su temperatura después de la compresión? b) ¿Cuál es si el gas es aire seco (77% N_2, 23% O_2)?

Resolución:

Parte (a)

"Gas helio" $\quad T_{inicial} = 20°C = 293\text{ K}$

$V_{inicial} = 5\, V_{final} \quad ; \quad \gamma_{helio} = 1{,}67$

De la condición: $PV^{\gamma} = cte$

Además: $PV = nRT$

Entonces: $\dfrac{nRT}{V} \times V^{\gamma} = cte \quad \therefore \quad \dfrac{T.V^{\gamma}}{V} = cte$

Luego: $T_{inicial}\; V^{\gamma-1}_{inicial} = T_{final}\; V^{\gamma-1}_{final}$

$$\Rightarrow \quad (293\text{ K})(V_{inicial})^{\gamma-1} = T_{final}\left(\frac{1}{5}\, V_{inicial}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \quad (293\text{ K})\; 5^{\gamma-1} = T_{final}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 861\text{ K}$$

Parte (b)

"Aire seco" (77% N_2, 23% O_2) entonces $\gamma = 1{,}4$ de la condición: $TV^{\gamma-1} = cte$

$$\Rightarrow \quad (293\text{ K})(V_{inicial})^{\gamma-1} = T_{final} \times \left(\frac{1}{5}\, V_{inicial}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \quad (293\text{ K})(1)^{0,4} = T_{final} \times (0{,}2)^{0,4}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 558\text{ K}$$

31. El aire en un nubarrón se expande conforme se eleva. Si su temperatura inicial era de 300 K, y no se pierde calor en la expansión, ¿cuál es la temperatura cuando se duplica el volumen inicial?

Resolución:

$T_{inicial} = 300\text{ K} \qquad V_{inicial} = \dfrac{1}{2}\, V_{final} \quad ; \quad \gamma_{aire} = 1{,}4$

$T_{final} = \, ?$

De la condición: $PV^{\gamma} = cte$

Por otro lado: $PV = nRT \;\Rightarrow\; P = \dfrac{nRT}{V}$

Luego: $nRT \times \dfrac{V^{\gamma}}{V} = cte \quad \therefore \quad TV^{\gamma-1} = cte$

Luego: $300\text{ K} \times V^{\gamma-1}_{inicial} = T_{final}\,(2\, V_{inicial})^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad (300\text{ K}) = T_{final}\,(2)^{\gamma-1}$$

$$\therefore \quad T_{final} = 227\text{ K}$$

32. ¿Cuánto trabajo es necesario para comprimir 5,00 moles de aire a 20,0°C y 1,00 atm hasta 1/10 del volumen original mediante a) un proceso isotérmico y b) un proceso adiabático reversible? c) ¿Cuáles son las presiones finales en los dos casos?

Resolución:

Datos: $n = 5{,}00$ moles ; $V_{inicial} = 10\, V_{final}$

$T = 20°C$; $W = \, ?$

$P = 1{,}00\text{ atm}$

Parte (a)

En un proceso isotérmico: $T = cte$

Sabemos que: $dW = P.dV = \dfrac{nRT}{V}\, .\, dV$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\, dV$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = (5)(8{,}31)(293\text{ K})\, \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore \quad W_{total} = -28\text{ kJ (compresión)}$$

Parte (b)

En un proceso "adiabático reversible" se cumple que:

$PV^{\gamma} = CTE \qquad \gamma_{aire} = 1{,}4$

Sabemos que: $dW = P.dV$

$$\Rightarrow \quad dW = \frac{CTE}{V^{\gamma}}\, .\, dV$$

$$\Rightarrow \quad dW = P_{inicial} \cdot V^{\gamma}_{inicial} \times \frac{1}{V^{\gamma}}\, .\, dV$$

$$\therefore \quad W_{total} = P_{inicial} \cdot V^{\gamma}_{inicial} \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} \frac{1}{V^{\gamma}}\, dV$$

Luego: $$W_{total} = \frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial} - P_{final} \cdot V_{final}}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{(1{,}00 \text{ atm})V_{inicial} - P_{final} \times (0{,}1)V_{inicial}}{1{,}4 - 1} \quad \ldots (\alpha)$$

Por otro lado:

$$\frac{(1{,}013 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{1 \text{ atm}} (1{,}00 \text{ atm})\, V_{inicial} = (5)(8{,}31)(293 \text{ K})$$

$$\therefore \quad V_{inicial} = 0{,}12 \text{ m}^3$$

Además: $$P_{inicial} \times V^{\gamma}_{inicial} = P_{final} \times (0{,}1)^{\gamma} \times V^{\gamma}_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}00 \text{ atm} = P_{final} \times (0{,}1)^{1{,}4}$$

$$\therefore \quad P_{final} = 25{,}1 \text{ atm}$$

Reemplazando datos en (α)

$$W_{total} = \frac{(1{,}00 \text{ atm})(0{,}12 \text{ m}^3) - (0{,}1)(25{,}1 \text{atm})(0{,}12 \text{ m}^3)}{(0{,}4)} \times \left[\frac{1{,}013 \times 10^5 \text{N/m}^2}{1 \text{ atm}}\right]$$

En consecuencia: $W_{total} = -45{,}89$ kJ (compresión)

Parte (c)

En el proceso isotérmico: $P_{inicial} \times V_{inicial} = P_{final} \times P_{final}$

Entonces: $$1 \text{ atm} \times V_{inicial} = P_{final} \times \frac{1}{10} V_{inicial}$$

$$\therefore \quad P_{final} = 10{,}0 \text{ atm}$$

En el proceso "adiabático reversible"; la presión final es la hallada en la parte (b)

$$\therefore \quad P_{final} = 25{,}1 \text{ atm}$$

33. Un mol de un gas diatómico ideal ocupa un volumen de un litro a una presión de 0,10 atm. El gas experimenta un proceso en el que la presión es proporcional al volumen, y al final del proceso, se encuentra que la velocidad del sonido en el gas se ha duplicado a partir de este valor inicial. Determine la cantidad de calor transferido al gas.

33A. Un mol de un gas monoatómico ocupa un volumen V_0 a una presión P_0. El gas experimenta un proceso en el que la presión es proporcional al volumen, y al final del proceso se encuentra que la velocidad del sonido en el gas se ha duplicado a partir de este valor inicial. Determine la cantidad de calor transferido al gas.

Resolución : 33 ≡ 33A

Datos: $n_{gas\ diatómico} = 1$; $V_{inicial} = 1L$; $P_{inicial} = 0{,}10$ atm

Además: $\frac{P}{V}$ = constante

Nos piden: $Q_{transfiriendo\ al\ gas} = ?$

Por la ley de gases tenemos que:

$$P.\,V = n.R.T$$

$$\Rightarrow (0.10\text{atm})(1.00\text{L}) = (1\text{mol})(0{,}082\ \frac{\text{atm.L}}{\text{mol.K}})\, T_{inicial}$$

$$\therefore \quad T_{inicial} = 1{,}22 \text{ K}$$

Por otro lado:

Se sabe que: (velocidad del sonido de un gas)^2 = C^2 = K. R.T.

Entonces:

$$\div \begin{cases} C_{inicial} = \sqrt{R.K}\,.\sqrt{T_{inicial}} \\ C_{final} = 2\,C_{inicial} = \sqrt{K.R}\,.\sqrt{T_{final}} \end{cases}$$

Resulta que:

$$2 = \sqrt{\frac{T_{final}}{T_{inicial}}} \qquad \therefore \quad T_{final} = 4\,T_{inicial} = 4(1{,}22 \text{ K}) = 4{,}88 \text{ K}$$

Por otro lado:

$$\frac{P_{inicial}}{V_{inicial}} = \frac{P_{final}}{V_{final}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{final} = \frac{P_{inicial} \cdot V_{final}}{V_{inicial}}}$$

Luego; de la ley de gases se cumple que:

$$\left(\frac{P_{inicial} \cdot V_{final}}{V_{inicial}}\right) . V_{final} = \left(\frac{P_{inicial} \cdot V_{inicial}}{T_{inicial}}\right)(4\,T_{inicial})$$

$$\Rightarrow V_{final}^2 = 4\,V$$

$$\therefore\ V_{final} = 2\,V_{inicial} = 2(1{,}00\text{ L}) = 2{,}0\text{ L}$$

Luego por la primera ley se cumple que:

$$Q_{gas} = \Delta U + W = n.\,C_v\,(T_{final} - T_{inicial}) + \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} P\,.\,dv$$

$$\Rightarrow\quad Q_{gas} = nC_v\,(T_{final} - T_{inicial}) + \frac{P_{inicial}}{V_{inicial}} \int_{V_{inicial}}^{V_{final}} V\,.\,dv$$

$$\Rightarrow\quad Q_{gas} = (1)\left(\frac{5}{2}\right) R\,(4{,}88 - 1{,}22) + \left(\frac{0{,}10}{1{,}0}\right)\left(\frac{1}{2}\right) V^2 \Big|_{1{,}0L}^{2{,}0L}$$

$$\Rightarrow\quad Q_{gas} = (1)\left(\frac{5}{2}\right)(0{,}082)\,(3{,}66) + \frac{(0{,}1)}{(1{,}0)}\,(0{,}5)\,[(4) - (1)]$$

$$\therefore\quad Q_{transferido\ al\ gas} = 0{,}9003\text{ atm. L} \approx 0{,}93\text{ J}$$

LA EQUIPARTICIÓN DE LA ENERGÍA

34. Si una molécula tiene *f* grados de libertad, demuestre que un gas compuesto de ese tipo de moléculas tiene las siguientes propiedades: 1) su energía térmica total es *fnRT*/2; 2) su calor específico molar a volumen constante es *fR*/2; 3) su calor específico molar a presión constante es $(f + 2)R/2$; y 4) la razón $\gamma = C_p/C_v = (f + 2)/f$.

Resolución :

Datos: " f " grados de libertad

Parte (a)

Por demostrar que: $U_{total} = \dfrac{f\,nRT}{2}$

Por definición: $U_{total} = 3N\left(\dfrac{1}{2}k_BT\right) + 2N\left(\dfrac{1}{2}k_BT\right)$

$$\Rightarrow\quad U_{total} = fN\,\frac{k_BT}{2} = \frac{f\,nRT}{2} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}\left(\frac{f\,nRT}{2}\right) \quad \therefore\quad C_v = \frac{fR}{2} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (c)

Como: $C_p - C_v = R$

$$\Rightarrow\quad C_p = R + \frac{fR}{2} = \frac{R}{2}\,(f + 2) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (d)

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{R}{2}(f+2)}{\frac{f\,R}{2}} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{R\,(f+2)}{f.R}$$

$$\therefore\quad \gamma = \frac{f+2}{f} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

35. Un recipiente de 5,00 litros contiene 0,125 moles de un gas ideal a 1,50 atm. ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de una sola molécula?

Resolución :

Datos: $V = 5{,}00$ litros ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{23}\ \dfrac{J}{mol.K}$

$n = 0{,}125$ moles ; $R = 8{,}31\ \dfrac{J}{mol.K}$

$P = 1{,}00$ atm

$E_K = ?$

$$E_K = \frac{3}{2}k_BT \quad \text{(por molécula)}$$

$$\Rightarrow\quad E_{K\,prom} = \frac{3}{2}\,(1{,}38 \times 10^{-23})\left[\frac{1{,}015\times10^5 \times 5\times10^{-3}}{(0{,}125)(8{,}31)}\right]$$

$$\therefore\quad E_{K\,prom} = 1{,}51 \times 10^{-20}\text{ J}$$

36. Al revisar las magnitudes de C_V y C_P para gases diatómicos y poliatómicos en la tabla 21,2, encontramos que los valores aumentan con las masas moleculares crecientes. Brinde una explicación cuantitativa de esta observación.

Resolución :

Sabemos que: $n = \dfrac{m}{\overline{M}} \Rightarrow n\times\overline{M} = m$ (inversamente proporcionales

Además: $PV = nRT \Rightarrow \dfrac{PV}{R} = nT$ (inversamente proporcionales)

Luego: $C_V = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{dU}{dT}$

En consecuencia:

A mayor $\overline{M}$, menor n $\Rightarrow$ T creciente y por lo tanto "C_v" mayor, aumenta.

37. En un modelo burdo (Fig. P21.37) de una molécula diatómica giratoria de cloro (Cl_2), los dos átomos de Cl están separados por $2{,}0 \times 10^{-10}$ m y giran alrededor de su centro de masa con velocidad angular $\omega = 2{,}0 \times 10^{12}$ rad/s. ¿Cuál es la energía cinética rotacional de una molécula de Cl_2, que tiene una masa molar de 70?

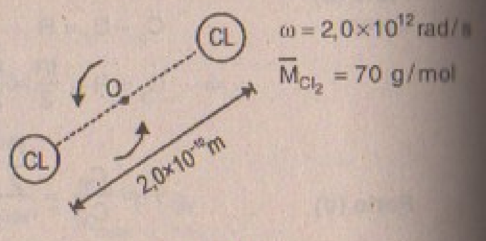


Figura P21.37

Resolución:

Datos: $\omega = 2{,}0 \times 10^{12}$ rad/s $M_{Cl_2} = 70$ g/mol

Sabemos que: $E_{K\,rotacional} = \dfrac{1}{2} I_O \cdot \omega^2$

Entonces: $E_{K\,rotacional} = \dfrac{1}{2} (mr^2)\omega^2$

$\Rightarrow \quad E_{K\,rotacional} = \dfrac{1}{2}(70)(1{,}0 \times 10^{-10})^2 \times (2{,}0 \times 10^{12})^2$

$\therefore \quad E_{K\,rotacional} = 700$ kJ

38. Considere 2 moles de un gas diatómico ideal. Encuentre la capacidad calorífica total a volumen constante y a presión constante si a) las moléculas giran pero no vibran, y b) las moléculas giran y vibran.

Resolución:

Datos: n = 2 moles

Parte (a)

Cuando giran y no vibran,se cumple que:

$$U_{total} = \frac{5}{2} NRT \Rightarrow C_v = \frac{1}{n}\frac{d}{dT}\left(\frac{5}{2} nRT\right) = \frac{5}{2}R$$

Luego: $C_p = \dfrac{5R}{2} + R \quad \therefore \quad C_p = \dfrac{7}{2}R$

Parte (b)

Cuando giran y vibran,se cumple que:

$$U_{total} = \frac{5}{2}nRT + 3nRT = \frac{11}{2} nRT$$

$$\Rightarrow \quad C_v = \frac{1}{n} \times \frac{d}{dT}\left(\frac{11}{2} nRT\right) = \frac{11}{2}R$$

Luego: $C_p = R + \dfrac{11}{2}R = \dfrac{13}{2}R$

LA LEY DE DISTRIBUCIÓN DE BOLTZMANN
DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES MOLECULARES

39. El calor latente de vaporización para el agua a temperatura ambiente es 2 430 J/g. a) ¿Cuánta energía cinética posee cada molécula de agua que se evapora antes de que este proceso ocurra? b) Encuentre la velocidad promedio antes de la evaporación de una molécula de agua que se evapora. c) ¿Cuál es la temperatura efectiva de estas moléculas? ¿Por qué estas moléculas no lo queman?

Resolución:

Parte (a)

En una molécula de agua hay 18 g $N = n \times N_A$

Entonces: $Q = 18\text{ g} \times 2\,430 \dfrac{J}{g} \quad \therefore \quad Q = 43{,}74$ kJ

Como: $dU = dQ - dW = dQ - 0$

$\Rightarrow \quad U = 43{,}74\text{ kJ} = N.E_{K(molécula)} \quad \therefore \quad E_{K(molécula)} = 7{,}27 \times 10^{-20}$ J

Parte (b)

Sabemos que: $7{,}27 \times 10^{-20}\text{ J} = \dfrac{1}{2} m_{H_2O} \times \bar{v}^2$

$\Rightarrow \quad 7{,}27 \times 10^{-20} = \dfrac{1}{2}(18 \times 10^{-3}) \times \bar{v}^2$

$\therefore \quad \bar{v} = 28{,}42 \times 10^{-10}$ m/s

Parte (c)

Sabemos que: $28{,}42 \times 10^{-10} \dfrac{m}{s} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$

$\Rightarrow \quad (28{,}42 \times 10^{-10})^2 = \dfrac{3RT}{M_{H_2O}}$

$\Rightarrow \quad (28{,}42 \times 10^{-10})^2 \times 18 \times 10^{-3} \dfrac{g}{mol} = (3)\dfrac{(8{,}31)}{mol.K} J \times T$

$\therefore \quad T = 0{,}58 \times 10^{-20}$ K

No lo queman porque es una temperatura que tiende a "cero".

40. Quince partículas idénticas tienen las siguientes velocidades: una tiene 2,0 m/s; dos, 3,0 m/s; tres, 5,0 m/s; cuatro, 7,0 m/s; tres, 9,0 m/s; dos, 12,0 m/s. Encuentre a) la velocidad promedio, b) la velocidad rms, y c) la velocidad más probable de estas partículas.

Resolución:

Datos: 1 partícula $\Rightarrow$ 2,0 m/s
3 partículas $\Rightarrow$ 9,0 m/s

2 partículas	$\Rightarrow$	3,0 m/s
3 partículas	$\Rightarrow$	5,0 m/s
4 partículas	$\Rightarrow$	7,0 m/s
2 partículas	$\Rightarrow$	12,0 m/s

Parte (a)

$$v_{prom.} = \frac{1(2)+3(9)+2(3)+3(5)+4(7)+2(12)}{15}$$

$$\therefore \quad v_{promedio} = 6,8 \text{ m/s}$$

Parte (b)

Sabemos que: $U_{total} = N \times E_{K\,prom.} = 15 \times \frac{1}{2} m\overline{v}^2$

Por otro lado: $E_{total} = \frac{1}{2}m(2)^2 + 3\left(\frac{1}{2}m(9)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(3)^2\right)$

$$+ 3\left(\frac{1}{2}m(5)^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}m(7)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(12)^2\right)$$

Entonces: $15 \times \frac{1}{2} m\overline{v}^2 = 412 \text{ m}$

$$\Rightarrow \quad V_{rms} = \sqrt{\frac{412 \times 2}{15}} \approx 7,41 \text{ m/s}$$

Parte (c)

Vemos y observamos que la mayor cantidad de partículas tienen una velocidad de 7,0 m/s entonces dicha velocidad es la "más probable".

41. Se informa que sólo hay una partícula por metro cúbico en las profundidades del espacio. Utilizando la temperatura promedio de 3,0 K y suponiendo que la partícula es H_2 con un diámetro de 0,20 nm, a) determine la trayectoria libre media de la partícula y el tiempo promedio entre choques. b) Repita la parte a) suponiendo que sólo hay una partícula por centímetro cúbico.

Resolución:

Datos: $n_V = 1 \text{ mol/m}^3$; $T = 3,0$ K ; $M_{H_2} = 2$ g/mol

$d_{H_2} = 0,20 \times 10^{-9}$ m

Parte (a) $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_V} \quad \Rightarrow \quad \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2} \times (3,1416)\left(0,20 \times 10^{-9}\right)^2 \times (1)}$

$$\therefore \quad \ell = 5,63 \times 10^{18} \text{ m}$$

Sabemos que: $f = \sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n_V$

Entonces: $\dfrac{1}{f} = t_{promedio} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \overline{v} n_v}$

Pero: $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}} = \sqrt{\dfrac{(3)(8,31)(3)}{0,002}} \approx 193,4$ m/s

En consecuencia: $T_{promedio} = \dfrac{1}{\sqrt{2} \times (3,1416)(1)} \approx 1,16 \times 10^{-3}$ s

42. La composición química de la atmósfera cambia ligeramente con la altitud debido a que las masas de las diversas moléculas son diferentes. Emplee la ley de las atmósferas para determinar cómo cambia la proporción entre las moléculas de oxígeno y nitrógeno entre el nivel del mar y 10 km. Suponga una temperatura de 300 K y considere que las masas son iguales a 32 u para el oxígeno (O_2) y 28 u para el nitrógeno (N_2).

Resolución:

Datos: Masa de N_2 = 28 u ; T = 300 K ; 1u = $1,66 \times 10^{-27}$ kg

Masa de O_2 = 32 u ; h = 10 km

Sabemos que: $n(y) = n_o e^{\frac{-mg(y)}{k_B \cdot T}}$

Entonces: $n_{(10\,km)} = n_o e^{\frac{-4,65 \times 10^{-26} \times (9,8)\left(10^4\right)}{1,38 \times 10^{-23}(300)}}$

$$\therefore \quad n_{N_2}(10 \text{ km}) = 0,33\, n_o$$

Por otro lado: $n_{O_2}(10 \text{ km}) = n_o e^{\frac{-5,3 \times 10^{-26} \times (9,8)\left(10^4\right)}{1,38 \times 10^{-23} \times (300)}}$

$$\therefore \quad n_{O_2}(10 \text{ km}) = 0,285\, n_o$$

En consecuencia: $\dfrac{n_{O_2}}{n_{N_2}} = \dfrac{0,285\, n_0}{0,33\, n_0} = 0,864$

43. a) Encuentre la proporción de velocidades para los dos isótopos del cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl, a medida que se difunden por el aire. b) ¿Cuál isótopo se mueve más rápido?

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27}$ kg

Por la ley de distribución de velocidades moleculares:

$$\overline{v} = 1,60 \times \sqrt{\frac{k_B \cdot T}{m}}$$

Entonces para: ^{35}Cl $35\ u = 5{,}81 \times 10^{-26}$ kg

Entonces: $$\bar{v}_{(^{35}Cl)} = \frac{1{,}60}{\sqrt{5{,}81\times10^{-26}}}\times\sqrt{k_BT}$$

Para: ^{37}Cl $37\ u = 6{,}1 \times 10^{-26}$ kg

Entonces: $$\bar{v}_{(^{37}Cl)} = \frac{1{,}60}{\sqrt{6{,}1\times10^{-26}}}\times\sqrt{k_BT}$$

En consecuencia: $$\frac{\bar{v}_{(^{35}Cl)}}{\bar{v}_{(^{37}Cl)}} = \frac{\dfrac{1{,}60\times\sqrt{k_BT}}{\sqrt{5{,}81\times10^{-26}}}}{\dfrac{1{,}60\times\sqrt{k_BT}}{\sqrt{6{,}1\times10^{-26}}}} \Rightarrow \frac{\bar{v}_{(^{35}Cl)}}{\bar{v}_{(^{37}Cl)}} = 1{,}02$$

Parte (b)
se mueve más rápido: ^{35}Cl

44. Demuestre que la velocidad más probable de una molécula de gas está dada por la ecuación 21.29. Obsérvese que la velocidad más probable corresponde al punto donde la pendiente de la curva de distribución de velocidades, dN_v/dv, es cero.

Resolución:

Sabemos que: $$N_v = 4\pi.N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$$

Sea: $$A = 4\pi.N\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}$$

$$B = -mv^2/2k_BT$$

Entonces: $$v_{mp} = \frac{dN_v}{dv} = 0 \Rightarrow v_{mp} = \frac{d}{dv}[A.v^2.e^B] = 0$$

$$\Rightarrow v_{mp} = \frac{d}{dv}(A.v^2).e^B + \frac{d}{dv}(e^B)Av^2$$

$$\Rightarrow v_{mp} = 2A.v.e^B + \frac{d}{dv}(B)e^BAv^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{d(B)}{dv}v$$

Reemplazando: $$-2 = v.\frac{d}{dv}\left[-\frac{m}{2k_BT}.v^2\right]$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{-vm}{2k_BT}(2v)$$

$$\therefore v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} = 1{,}41\times\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$ l.q.q.d.

45. A qué temperatura la velocidad promedio de los átomos de helio sería igual a a) la velocidad de escape de la Tierra, $1{,}12 \times 10^4$ m/s y b) la velocidad de escape de la Luna, $2{,}37 \times 10^3$ m/s? (Véase el capítulo 14 para un análisis de la velocidad de escape, y observe que la masa de un átomo de helio es $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg).

Resolución:

Datos: Masa de helio = $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Parte (a)

Por Maxwell: $$\bar{v} = 1{,}60\times\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = 1{,}60\times\sqrt{\frac{1{,}38\times10^{-23}\times T}{6{,}65\times10^{-27}}} = \underbrace{1{,}12\times10^4\ \text{m/s}}_{\text{Por dato}}$$

$$\therefore T = 2{,}37\times10^4\ K$$

Parte (b)

Por Maxwell: $$\bar{v} = 1{,}60\times\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = 1{,}60\times\sqrt{\frac{1{,}38\times10^{-23}\times T}{6{,}65\times10^{-27}}} = \overbrace{2{,}37\times10^3\ \text{m/s}}^{\text{Por dato}}$$

$$\therefore T = 1{,}06\times10^3\ K$$

46. Un gas está a 0°C. ¿A qué temperatura debe calentarse para duplicar la velocidad rms de sus moléculas?

Resolución:

Sabemos que: $v_{rms} = ,173 \times \sqrt{k_BT/m}$

$$\Rightarrow v_{rms(0°C)} = 1{,}73\times\sqrt{\frac{(1{,}38\times10^{-23})(273)}{m}}$$

Luego: $$2v^{rms}_{(0°C)} = 1{,}73\times\sqrt{\frac{(1{,}38\times10^{-23})(T)}{m}}$$

Entonces: $$2\,(1{,}73)\times\sqrt{\frac{(1{,}38\times10^{-23})(273)}{m}} = 1{,}73\times\sqrt{\frac{(1{,}38\times10^{-23})(T)}{m}}$$

$\therefore\quad T = 33\ K$

TRAYECTORIA LIBRE MEDIA

47. En un sistema de ultraalto vacío, se mide una presión igual a $1{,}00\times10^{-10}$ torr (donde 1 torr = 133 Pa). Si las moléculas de gas tienen un diámetro de $3{,}00\times10^{-10}$ m y la temperatura es de 300 K, encuentre a) el número de moléculas en un volumen de $1{,}00\ m^3$, b) la trayectoria libre media de las moléculas, y c) la frecuencia de choque, suponiendo una velocidad promedio de 500 m/s.

Resolución :

Datos: $P = 1{,}00\times10^{-10}$ torr ; 1 torr ≡ 133 N/m²

$D_{molécula} = 3{,}00\times10^{-10}$ m ; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$

$T = 300$ K

Parte (a)

Sea: $V = 1{,}00\ m^3$

Entonces: $n_V = \dfrac{N}{V}$

Por otro lado: $PV = Nk_BT \quad\Rightarrow\quad \dfrac{P}{k_BT} = \dfrac{N}{V} = n_V$

Luego: $$N_{moléculas} = \frac{PV}{k_B T} = \frac{1{,}00\times10^{-10}\,\text{torr}\times\dfrac{133\ N/m^2}{1\ \text{torr}}\times1{,}00\ m^3}{1{,}38\times10^{-23}\ \dfrac{J}{K}\times300K}$$

$\therefore\quad N_{moléculas} = 3{,}21\times10^{12}$ moléculas

Parte (b)

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V}$

$$\Rightarrow\quad \ell = \frac{1}{\sqrt{2}\times(3{,}1416)\times1\,(3{,}00\times10^{-10})^2\times\dfrac{3{,}21\times10^{12}\ \text{mol}}{1{,}00\ m^3}}$$

$\therefore\quad \ell = 778$ km

Parte (c)

Asumiendo $\bar{v} = 500$ m/s

Entonces: $f = \pi\times d^2\times\bar{v}\times n_V$

$$\Rightarrow\quad f = (3{,}1416)(3{,}00\times10^{-10})^2\times500\times\frac{3{,}21}{1{,}00}\times10^{12}$$

$\therefore\quad f_{choque} = 6{,}42\times10^{-4}\ s^{-1}$

48. Muestre que la trayectoria libre media para las moléculas de un gas ideal es $\ell = \dfrac{k_BT}{\sqrt{2}\,\pi d^2P}$ donde *d* es el diámetro molecular.

Resolución :

Por demostrar que: $\ell = \dfrac{k_B\,T}{\sqrt{2}\,\pi\,d^2P}$

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\pi\,d^2\times n_V}$

Además: $PV = nRT = N\,k_B\,T \quad\Rightarrow\quad \dfrac{P}{k_B\,T} = \dfrac{N}{V} = n_V$

luego: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{P}{k_BT}}\quad\therefore\quad \ell = \dfrac{k_B\,.\,T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times P}$ l.q.q.d.

49. En un tanque lleno de oxígeno, cuántos diámetros moleculares *d* (en promedio) viajará una molécula de oxígeno (a 1,00 atm y 20,0°C) antes de chocar con otra molécula de O_2? (El diámetro de la molécula de O_2 es aproximadamente $3{,}60\times10^{-10}$ m).

Resolución :

Datos: $P = 1{,}00$ atm ; $T = 20°C = 293$ K

$D_{O_2} = 3{,}60\times10^{-10}$ m ; $d_{MOLECULARES} = ?$

Supongamos que hay "N" moléculas, entonces habrá N veces "d" diámetros, por otro lado:

$PV = nRT$

$\Rightarrow\quad \dfrac{P}{RT} = \dfrac{n}{V} = n_V \quad\therefore\quad n_V = \dfrac{1{,}00}{(0{,}082)(293)} = 4{,}16\times10^{-2}\ \dfrac{mol}{m^3}$

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{N}{V}}$

$$\Rightarrow\quad N\times d = \frac{V}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N} = \frac{nRT}{P}\times\frac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N} = \left(\frac{N}{N_A}\right)\left(\frac{RT}{P}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times N}\right)$$

Reemplazando:

$$N = \frac{(8{,}31)(293)}{\left(6{,}023\times10^{23}\right)\left(1{,}013\times10^{5}\right)(3{,}6)^3\times10^{-30}\times\sqrt{2}\times\pi} \qquad \therefore\ N = 193 \text{ diámetros}$$

50. Gas argón a presión atmosférica y 20,0°C se confina en un recipiente de 1,00 m³. El diámetro efectivo de una esfera sólida de un átomo de argón es $3{,}10\times10^{-10}$ m. a) Determine la trayectoria libre media ℓ. b) Encuentre la presión cuando ℓ = 1,00 m. c) Encuentre la presión cuando $\ell = 3{,}10\times10^{-10}$ m.

Resolución :

Datos: $P_{Ar} = 1{,}00 \text{ atm} \equiv 1{,}013\times10^5 \text{ N/m}^2$

$T = 20°C \equiv 293 \text{ K}$; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K

$d_{Ar} = 3{,}10\times10^{-10}$ m ; $V = 1{,}00 \text{ m}^3$

Parte (a)

Sabemos que: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V} \Rightarrow \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times(3{,}1416)\times\left(3{,}1\times10^{-10}\right)^2\times\dfrac{N}{V}}$

Como: $\dfrac{P}{k_B T} = \dfrac{N}{V} = n_V \Rightarrow \dfrac{N}{V} = \dfrac{1{,}013\times10^5}{1{,}00}$

Luego: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times(3{,}1416)\left(3{,}1\times10^{-10}\right)^2\times1{,}013\times10^5}$

$\therefore\ \ell = 2{,}31\times10^{13}$ m

Parte (b)

Sea: ℓ = 1,00 m

Entonces: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\times n_V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{P}{k_B T}}$

$\Rightarrow \dfrac{k_B . T}{\ell\times\left(\sqrt{2}\times\pi\times d^2\right)} = P \Rightarrow P = \dfrac{\left(1{,}38\times10^{-23}\right)\times293}{(1{,}00)\left(\sqrt{2}\right)(3{,}1416)\times\left(3{,}1\times10^{-10}\right)^2}$

$\therefore\ \ell = 9{,}47\times10^{-3}\ \text{N/m}^2$

Parte (c)

Si: $\ell = 3{,}10\times10^{-10}$ m $\quad k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K

Como: $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times n_V}$

Pero: $n_V = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{k_B . T}$

$\Rightarrow \ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times\dfrac{P}{k_B T}} = \dfrac{k_B . T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2\times P}$

$\Rightarrow \ell\times P = \dfrac{k_B . T}{\sqrt{2}\times\pi\times d^2}$

$\Rightarrow P = \dfrac{\left(1{,}38\times10^{-23}\ \dfrac{J}{K}\right)\times293\text{ K}}{\left(3{,}10\times10^{-10}\text{m}\right)\left(\sqrt{2}\right)(3{,}1416)\times\left(3{,}1\times10^{-10}\right)^2\text{m}^2}$

$\therefore\ P = 3{,}05\times10^7\ \text{N/m}^2$

ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS

51. Se encuentra que la constante *b* que aparece en la ecuación de estado de Van der Waals para el oxígeno mide 31,8 cm³/mol. Suponiendo una forma esférica, estime el diámetro de la molécula.

Resolución :

Datos: $b = 31{,}8\ \text{cm}^3/\text{mol}$

$n = 1{,}00$ mol de O_2

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{mol}} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{d}{2}\right]^3$$

Sabemos que: $\dfrac{V}{n} = b = 31{,}8\ \dfrac{\text{cm}^3}{\text{mol}}$

pero: $\dfrac{V}{n} = \dfrac{4}{3}\pi\times r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left[\dfrac{d}{2}\right]^3$

$\Rightarrow 31{,}8\ \dfrac{\text{cm}^3}{\text{mol}} = \dfrac{4}{3}(3{,}1416)\ \dfrac{\left(d^3\right)}{8}\times(6{,}023\times10^{23}\text{ part.})$

$\therefore\ d \approx 0{,}46\times10^{-7}\ \text{cm} \equiv 46\ \text{nm}$

52. Muestre que el trabajo realizado al expandir 1 mol de un gas de Van der Waals desde un volumen inicial V_i hasta un volumen V_f a presión constante es

$$W = RT\ln\left(\frac{V_f - b}{V_i - b}\right) + a\left(V_f^{-1} - V_i^{-1}\right)$$

Resolución :

Datos: $n = 1$ mol

Por demostrar que: $W_{total} = RT\ln\left(\dfrac{V_f - b}{V_i - b}\right) + a(V_f^{-1} - V_i^{-1})$

Por la ecuación de estado de Van Der Walls sabemos que:

$$\left(P + \frac{na}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (n = 1)$$

$$\Rightarrow \quad P + \frac{na}{V^2} = \frac{RT}{V-b} \qquad \therefore \quad P = \frac{RT}{V-b} - \frac{1a}{V^2}$$

Por otro lado:

Sabemos que: por definición

$$W_{total} = \int P\,dV$$

Entonces a presión constante:

$$W_{total} = P\int_{V_i}^{V_f} dV$$

Luego. (reemplazando) $\quad W_{total} = \left(\dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}\right)\displaystyle\int_{V_i}^{V_f} dV$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V-b}\,dV - a\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V^2}\,dV$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\ln(V-b)\Big|_{V_i}^{V_f} + \frac{a}{V}\Big|_{V_i}^{V_f}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = RT\ln(V_f - b) - RT\ln(V_i - b) + \frac{a}{V_f} - \frac{a}{V_i}$$

$$\therefore \quad W_{total} = RT\ln\left[\frac{V_f - b}{V_i - b}\right] + a(V_f^{-1} - V_i^{-1}) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

53. Una mezcla de dos gases será esparcida por un filtro a tasas proporcionales a sus velocidades rms. Si las moléculas de los dos gases tienen masas m_1 y m_2, muestre que la razón de sus velocidades rms (o la razón de sus tasas de difusión) es

$$\frac{v_{1\,(rms)}}{v_{2\,(rms)}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Resolución :

Por demostrar que: $\dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$

Sea: $n_1 = n_2$ entonces:

$$(v_1)\,rms = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}} \quad y \quad v_2\,(rms) = \sqrt{\frac{3RT}{M_2}}$$

Como: $\dfrac{m}{M} = n$

Entonces: $\dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{3RT \times n_1}{m_1}}{\dfrac{3RT \times n_2}{m_2}}} \quad \therefore \quad \dfrac{(v_1)\,rms}{(v_2)\,rms} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}} \qquad$ l.q.q.d.

54. Un cilindro que contiene n moles de un gas ideal experimenta un proceso adiabático reversible. a) Partiendo de la expresión $W = \int P\,dV$ y utilizando PV^{γ} = constante, demuestre que el trabajo realizado es

$$W = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)(P_iV_i - P_fV_f)$$

b) A partir de la ecuación de la primera ley en forma diferencial pruebe que el trabajo realizado también igual a $nC_V(T_i - T_f)$. Demuestre que este resultado es consistente con la ecuación del inciso a).

Resolución :

Por demostrar que: $\quad W = \left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)(P_iV_i - P_fV_f)$

Sabemos que: $\quad W = \int P\,dV$

Además: $\quad P.V^{\gamma} = cte$

Sabemos que: $\quad W = \displaystyle\int \frac{cte}{V^{\gamma}}\,.\,dV$

$$\Rightarrow \quad W = cte\int \frac{1}{V^{\gamma}}\,dV = P_1V_1^{\gamma}\int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

$$\Rightarrow \quad W = P_iV_i^{\gamma} \times V^{1-\gamma}\Big|_{V_1 = V_i}^{V_2 = V_f}$$

$$\therefore \quad W = \left(\frac{1}{\gamma-1}\right)(P_i\,V_i - P_f\,V_f) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Sabemos que: $P.V^{\gamma} = cte$

Además: $PV = nRT \Rightarrow T = \dfrac{PV}{nR}$

En un proceso adiabático reversible se cumple que: $dQ = 0$

Entonces por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = dQ - dW = 0 - dW$$

Como: $dU = nC_v \,.\, dT$

$$\Rightarrow \quad dW = -nC_v\, dT$$

$$\therefore \quad W_{total} = nC_v\,(T_i - T_f) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

55. Veinte partículas cada una de masa *m* y confinada a un volumen *v*, tienen las siguientes velocidades: dos tienen velocidad *v*, tres, 2*v*, cinco, 3*v*, cuatro, 4*v*, tres, 5*v*, dos, 6*v*, una, 7*v*. Encuentre a) la velocidad promedio, b) velocidad rms, c) la velocidad más probable, d) la presión que ejercen sobre las paredes del recipiente, y e) la energía cinética promedio por partícula.

Resolución :

Parte (a) $v_{promedio} = \dfrac{2(v)+3(2v)+5(3v)+4(4v)+3(5v)+2(6v)+1(7v)}{20}$

$$\therefore \quad v_{promedio} = 3{,}65\ v$$

Parte (b) $E_{K\,total} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}m(2v)^2\right) + 5\left(\frac{1}{2}m(3v)^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}m(4v)^2\right)$

$$+\ 3\left(\frac{1}{2}m(5v)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}m(6v)^2\right) + \frac{1}{2}m(7v)^2$$

$$\therefore \quad E_{K\,total} = 159{,}5\ m.v^2$$

Por otro lado sabemos que: $E_{total} = N \times \dfrac{1}{2}\, m\, v^2$

$$\Rightarrow \quad 20 \times \frac{1}{2}\, m\, v^2 = 159{,}5\ m\, v^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{159{,}5}{10} \times v^2} \qquad \therefore \quad v_{rms} = 3{,}99\ v\ m/s$$

Parte (c)

Como la mayor cantidad de partículas que ocupan un volumen "V" es de "5", entonces la velocidad más probable es de 3,00 v

Parte (d)

Sabemos que: $P_{total} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{N}{V} \times E_{K\,prom/mol} \quad \Rightarrow \quad P_{total} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{N}{V} \times (2\ mv^2)$

$$\Rightarrow \quad P_{total} = \frac{2}{3} \times \frac{(20)}{V} \times (2\ mv^2)$$

$$\therefore \quad P_{total} = 27\ m\bar{v}^2/V$$

Parte (e) $E_{K\,(partícula)} = \dfrac{1}{2}\ mv^2$

$$\Rightarrow \quad E_{K\,(partícula)} = \frac{1}{2}\ m\left(\sqrt{\frac{159{,}5 \times v^2}{10}}\right)$$

$$\therefore \quad E_{K\,(partícula)} = 2\ m\ v^2$$

56. Un recipiente contiene $1{,}00 \times 10^4$ moléculas de oxígeno a 500 K. a) Elabore una gráfica exacta de la función de distribución de velocidades de Maxwell contra la velocidad con puntos en intervalos de velocidad de 100 m/s. b) A partir de esta gráfica, encuentre la velocidad más probable. c) Calcule las velocidades promedio y rms para las moléculas y marque estos puntos sobre su gráfica. d) Según esta gráfica, estime la fracción de moléculas con velocidades en el intervalo de 300 m/s a 600 m/s.

Resolución :

Datos: $N = 1{,}00 \times 10^4$ moléculas ; $T = 500$ K ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

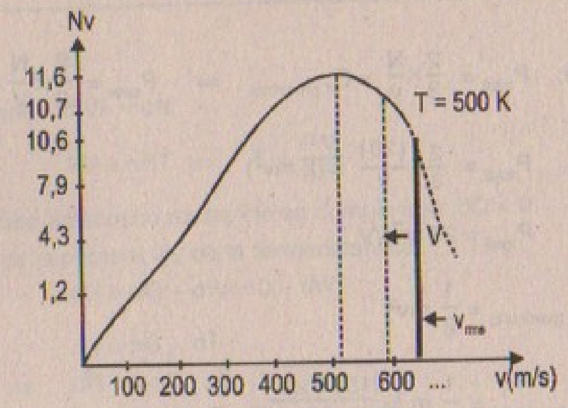
Parte (a)

Sabemos que: $N_v = 4\pi.N\left(\dfrac{m}{2\pi\, k_B\, T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$

Por otro lado: Masa de O_2 = 32 umas = $32 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg

Tabulando:

v = 100 m/s	N_v = 1,2 moléc /m.s^{-1}
v = 200 m/s	N_v = 4,3 moléc /m.s^{-1}
v = 300 m/s	N_v = 7,9 moléc /m.s^{-1}
v = 400 m/s	N_v = 10,6 moléc /m.s^{-1}
v = 500 m/s	N_v = 11,6 moléc /m.s^{-1}
v = 600 m/s	N_v = 10,7 moléc /m.s^{-1}



Parte (b)

Por la ley de distribución de Maxwell:

$$\frac{dNv}{dV} = v_{mp} = 0 \Rightarrow v_{mp} = 1,41 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

Luego: $$v_{mp} = 1,41 \times \sqrt{\frac{1,38\times10^{-23}\times500}{5,9\times10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v_{mp} = 508,7 \text{ m/s}$$

Parte (c)

Por la ley de distribución de Maxwell:

$$v_{rms} = 1,73 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad v_{rms} = 1,73 \times \sqrt{\frac{1,38\times10^{-23}\times500}{5,3\times10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v_{rms} = 624,2 \text{ m/s}$$

Por otro lado: $$v = 1,60 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \Rightarrow v = 1,60 \times \sqrt{\frac{1,38\times10^{-23}\times(500)}{5,3\times10^{-26}}}$$

$$\therefore \quad v = 577,3 \text{ m/s}$$

57. Un metro cúbico de hidrógeno atómico a 0°C y presión atmosférica contiene aproximadamente $2,7 \times 10^{25}$ átomos. El primer estado excitado del átomo de hidrógeno tiene una energía de 10,2 eV arriba del nivel más bajo de energía llamado el estado base. Con el factor de Boltzmann encuentre el número de átomos en el primer estado excitado a 0°C y a 10 000°C.

Resolución :

Datos: $V_{H_2} = 1 \text{ m}^3$; T = 0°C ≡ 273 K

P = 1,00 atm ≡ $1,013 \times 10^5$ N/m²

N = $2,7 \times 10^{25}$ átomos

1 eV = $1,60 \times 10^{-19}$ J

Por dato: E_2 (arriba) – E_1 (base) = 10,2 eV

Por Boltzman: $$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = e^{-(E_2-E_1)/k_B.T}$$

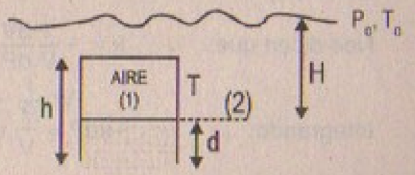
$$\Rightarrow \quad n(E_2) = 2,7 \times 10^{25} \times e^{-\frac{(10,2)(1,6\times10^{-19})}{(273)(1,38\times10^{-23})}}$$

$$\therefore \quad n(E_2) = 0 \quad a \quad 0°C$$

58. En un día en el cual la presión atmosférica es 1,00 atm y la temperatura es 20,0°C, una campana de buceo en forma de un cilindro de 4,0 m de altura, cerrada en el extremo superior, se sumerge en el agua para auxiliar en la construcción del cimiento subterráneo de una torre de un puente. El nivel del agua dentro de la campana asciende hasta 1,5 m de la parte superior, y la temperatura disminuye a 8,0°C. a) Determine la presión del aire dentro de la campana. b) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua se encuentra la campana? (En el uso real, se bombea aire dentro de la campana forzando el agua a salir con el fin de que haya más espacio para los trabajadores de la construcción).

58A. En un día en el cual la presión atmosférica es P_0 y la temperatura es T_0, una campana de buceo en forma de cilindro de altura h, cerrada en el extremo superior, se sumerge en el agua para auxiliar en la construcción del cimiento subterráneo de una torre de un puente. El agua dentro de la campana asciende hasta una distancia $d < h$ de la parte superior, y la temperatura disminuye a T. a) Determine la presión del aire dentro de la campana. b) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua se encuentra la campana?

Resolución :



Parte (a)

$$P_{aire} = P_0 e^{-M_{aire}.g(h-d)/k_B T}$$

(Ley de las atmósferas)

$$\therefore \quad P_{aire} = P_0 e^{-mgh/k_B T} \cdot e^{mgd/k_B.T}$$

Parte (b)

Por el principio de la Hidrostática: $P_{(1)} = P_{(2)}$

$$\Rightarrow \quad P_{aire} = P_{(2)} = P_o e^{-m_{H_2O} gH/k_B.T_o}$$

$$\Rightarrow \quad P_o e^{-\frac{m_A g(h-d)}{k_B.T}} = P_o e^{-\frac{m_{H_2O} gH}{k_b.T_o}}$$

$$\therefore \quad H = \frac{T_o}{T}\times\frac{m_{aire}}{m_{H_2O}}\times(h-d)$$

En consecuencia:

La campana se encontrará a: $H-(h-d) = h-d\left(\frac{T_o}{T}\times\frac{m_{aire}}{m_{H_2O}}-1\right)$

59. El oxígeno a presiones muy arriba de 1 atm se vuelve tóxico para las células del pulmón. ¿Qué proporción, en peso, entre el gas helio (He) y el oxígeno (O_2) debe usar un buzo que va a descender a una profundidad de 50,0 m en el océano?

Datos incorrectos

60. La compresibilidad, *k*, de una sustancia se define como el cambio fraccionario en el volumen de esa sustancia para un cambio de presión determinado:

$$k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

a) Explique por qué el signo negativo de esta expresión asegura que k siempre será positiva. b) Muestre que si un gas ideal se comprime isotérmicamente, su compresibilidad está dada por $k_1 = 1/P$. c) Muestre que si un gas ideal se comprime adiabáticamente, su compresibilidad está dada por $k_2 = 1/\gamma\ P$. d) Determine valores para k_1 y k_2 para un gas monoatómico ideal a una presión de 2,00 atm.

Resolución:

Parte (a)

Nos dicen que: $k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$

Integrando: $-kdP = \frac{1}{V}dV \quad \Rightarrow \quad -k\int dP = \int \frac{1}{V}dV$

$$\therefore \quad -kP\Big|_{P_i}^{P_f} = \ln(V)\Big|_{V_i}^{V_f}$$

entonces: $k = \dfrac{\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)}{P_i - P_f}$

Sabemos que: $P \frac{1}{\alpha} V$ (debido a que PV = nRT)

Entonces si: $V_f > V_i \quad \Rightarrow \quad \ln(V_f/V_i) > 0$

Luego: $P_i - P_f = \frac{cte}{V_i} - \frac{cte}{V_f} = \frac{(V_f - V_i)\,cte}{V_f V_i} > 0$

En consecuencia: $k = -\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dP} > 0$ l.q.q.d.

Parte (b)

Por dato: $PV = cte$ ... (α)

Por demostrar que: $k_1 = \frac{1}{P}$

Derivando (α): $dPV + PdV = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{P}.dP = -\frac{1}{V}dV$

como: $k = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dP}\right)$

$\therefore \quad k = \frac{1}{P}$ l.q.q.d.

Parte (c)

Por condición: $P.V^{\gamma} = cte$ ... (β)

Por demostrar que: $k_2 = \frac{1}{\gamma P}$

Derivando (β): $V^{\gamma}.d\gamma + P\gamma dV^{\gamma} = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{P\gamma}dP = -\frac{dV^{\gamma}}{V^{\gamma}} = -\frac{1}{V}dV$$

Como: $k_2 = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$

$$\Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{dP} \times \left(-\frac{1}{V} dV \right) = \frac{1}{dP} \times \left(+\frac{1}{P.\gamma} dP \right)$$

$$\therefore \quad k_2 = \frac{1}{\gamma P} \qquad \text{l.q.q.d}$$

Parte (d)

para: $P = 2{,}00$ atm ; $\gamma_{monoatómico} = 1{,}67$

Entonces: $$k_1 = \frac{1}{2{,}00 \text{ atm}} = 0{,}5 \text{ atm}^{-1} \equiv 0{,}49 \times 10^{-5} \frac{m^2}{N}$$

$$k_2 = \frac{1}{(1{,}67)(2{,}00 \text{ atm})} = 0{,}3 \text{ atm}^{-1} \equiv 0{,}3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$$

61. Un mol de gas que obedece la ecuación de estado de Van der Walls se comprime isotérmicamente. A cierta temperatura crítica, T_c, la isoterma tiene un punto de pendiente cero, como en la figura 21.17. Es decir, en $T = T_c$,

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$$

Empleando la ecuación 21.32 y estas condiciones, muestre que en el punto crítico, $P_c = a/27b^2$, $V_c = 3b$, y $T_c = 8a/27\ Rb$.

Resolución :

Datos: $n = 1{,}00$ mol ; $T = $ cte

Por dato: $$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$$

Por la ecuación de Van Der Walls:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right)(V - b) = RT = \text{cte (isoterma)}$$

$$\therefore \quad P = \frac{\text{cte}}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}$$

Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\text{cte}}{V-b} \right) - \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{a}{V^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{\text{cte}}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \qquad \therefore \quad \frac{2a}{V^3} = \frac{RT}{(V-b)^2} \quad \dots (\alpha)$$

Por otro lado: $$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{\partial P}{\partial V} \right] = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{\partial\, \text{cte}}{V-b} \right] - \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{a}{V^2} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{-\text{cte}}{(V-b)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{2a}{V^3} \right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{RT}{(V-b)^3} = \frac{3a}{V^4} \quad \dots (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) resulta que: $\boxed{V_C = 3b}$ l.q.q.d.

Reemplazando (α) y (β) en la ecuación de estado resulta que:

$$P_C = \frac{\text{cte}}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{2a}{V^3}(V-b) - \frac{a}{V^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_C = \frac{a}{27\, b^2}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Por último: reemplazando (α) y (β) en la ecuación de estado resulta que:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right)(V - b) = RT$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{27\, b^2} + \frac{a}{\underbrace{V^2}_{9b^2}} \right)(3b - b) = RT_C$$

$$\therefore \quad T_C = \frac{8\, a}{27\, Rb} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

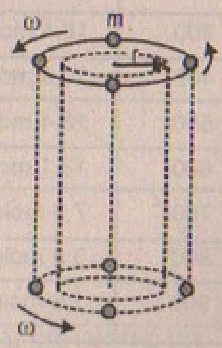
62. Considere las partículas en una centrífuga de gas, un dispositivo con el cual se separan partículas de diferentes masas haciéndolas girar en una trayectoria circular de radio *r* a una velocidad angular ω. La fuerza central que actúa sobre una partícula es $mr\omega^2$. a) Analice cómo puede emplearse una centrífuga de gas para separar partículas de diferente masa. b) Muestre que la densidad de las partículas como una función de *r* es

$$n(r) = n_0\, e^{-m\, r^2 \omega^2 / 2\, k_B T}$$

Resolución :

Parte (a)

Se podría utilizar manteniéndolas enlazadas unas a otras y haciéndolas girar a un eje fijo.



Parte (b)

Por la ley de las atmósferas:

$$n(y) = n_o\, e^{-\frac{mgy}{k_B T}} \Rightarrow n(r) = n_o\, e^{-\frac{mg(r)}{k_B T}} = n_o e^{-\frac{E_{total}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow n(r) = n_o\, e^{-\frac{E_{rotac}}{k_B T}}$$

$$\therefore \quad n(r) = n_o\, e^{-\frac{1}{2}I_o\,\omega^2/k_B.T} = n_o e^{-\frac{mr^2.\omega^2}{2k_B.T}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

63. Considere un sistema de $1,00 \times 10^4$ moléculas de oxígeno a una temperatura T. Escribe un programa con el que pueda calcular la función de distribución de Maxwell N_v como una función de la velocidad de las moléculas y la temperatura. Con su programa evalúe N_v para velocidad que varían de $v = 0$ a $v = 2\ 000$ m/s (en intervalos de 100 m/s) a temperaturas de a) 300 K, y b) 1 000 K. c) Elabore gráficas de sus resultados (N_v contra v) y con la gráfica en $T = 1\ 000$ K calcule el número de moléculas que tienen velocidades entre 800 m/s y 1 000 m/s en $T = 1\ 000$ K.

Resolución :

Parte (a)

Datos: $N = 1,00 \times 10^4$ moléculas de O_2 ; masa de $O_2 = 5,3 \times 10^{-26}$ kg

$T = 300$ K ; $v = 0$ m/s $\wedge$ $v = 2\ 000$ m/s (intervalos de 100 m/s)

$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K

Sabemos que: $N_v = 4\pi N \left(\dfrac{m}{2\pi k_B . T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

v(m/s)	N_v (moléc/m/s)
0	0
100	3,4 moléc/m/s
200	11,3 moléc/m/s
300	18,4 moléc/m.s^{-1}
400	20,9 moléc/m.s^{-1}
500	18,4 moléc/m.s^{-1}
600	13,1 moléc/m.s^{-1}
700	7,8 moléc/m.s^{-1}
800	3,9 moléc/m.s^{-1}
900	1,6 moléc/m.s^{-1}

1000	0,6 moléc/m.s^{-1}
1100	0,2 moléc/m.s^{-1}
1200	0,05 moléc/m.s^{-1}
1300	0,01 moléc/m.s^{-1}
1400	tiende a cero
1500	" " "
1600	" " "
1700	" " "
1800	" " "
1900	" " "
2000	" " "

Parte (b)

A $\quad T = 1\ 000$ K $\quad m_{O_2} = 5,3 \times 10^{-26}$ kg

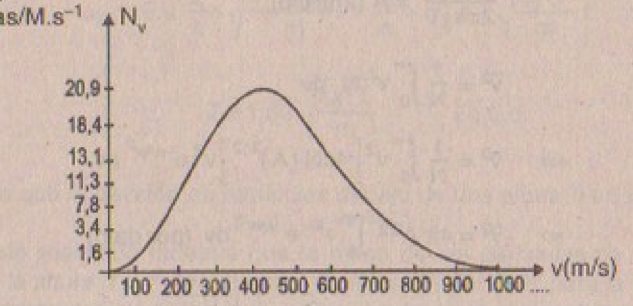
Sabemos que: $\quad N_v = 4\pi N\left(\dfrac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m.v^2}{2k_B.T}}$

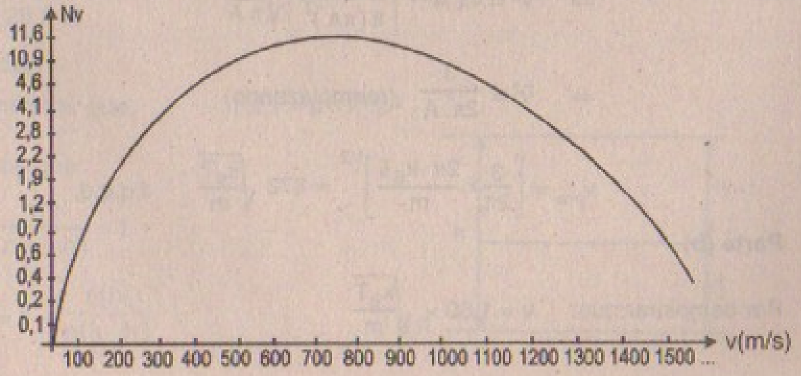
v(m/s)	N_v(moléc/m/s^{-1})
0	0 moléc/m.s^{-1}
100	0,6 moléc/m.s^{-1}
200	2,2 moléc/m.s^{-1}
300	4,6 moléc/m.s^{-1}
400	7,1 moléc/m.s^{-1}
500	9,3 moléc/m.s^{-1}
600	10,9 moléc/m.s^{-1}
700	11,6 moléc/m.s^{-1}
800	11,4 moléc/m.s^{-1}
900	10,4 moléc/m.s^{-1}

1 000	8,9 moléc/m.s^{-1}
1 100	7,3 moléc/m.s^{-1}
1 200	5,6 moléc/m.s^{-1}
1 300	4,1 moléc/m.s^{-1}
1 400	2,8 moléc/m.s^{-1}
1 500	1,9 moléc/m.s^{-1}
1 600	1,2 moléc/m.s^{-1}
1 700	0,7 moléc/m.s^{-1}
1 800	0,4 moléc/m.s^{-1}
1 900	0,2 moléc/m.s^{-1}
2 000	0,1 moléc/m.s^{-1}

Parte (c)

Moléculas/M.s^{-1}





64. Verifique las ecuaciones 21.27 y 21.28 para las velocidades rms y promedio de las moléculas de un gas a una temperatura T. Observe que el valor promedio de v^n es

$\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^n\,N v dv$ y use las integrales

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^2} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Resolución :

Datos: $\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^2} \qquad \int_0^\infty x^4\, e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Parte (a)

Por demostrar que: $\bar{v}_{rms} = 1{,}73 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

De la condición: $\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^n\, N_v\, dv$

Entonces, como: $N_v = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

Sea: $\frac{m}{2\pi k_B T} = A$ (artificio)

Luego: $\overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 . N_v\, dv$

$$\Rightarrow \quad \overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2\left[4\pi N\,(A)^{3/2}\right]v^2\, e^{-\pi A v^2}\, dv$$

$$\Rightarrow \quad \overline{v^2} = 4\pi\, A^{3/2}\int_0^\infty v^4 .\, e^{-\pi A v^2} .dv \quad \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{v^2} = 4\pi\, A^{3/2}\left[\frac{3}{8\,(\pi A)^2}\right]\sqrt{\frac{\pi}{\pi A}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{v^2} = \frac{3}{2\pi . A} \quad \text{(reemplazando)}$$

$$\therefore \quad v_{rms} = \left[\frac{3}{2\pi}\times\frac{2\pi . k_B T}{m}\right]^{1/2} = 1{,}73\sqrt{\frac{k_B T}{m}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $v = 1{,}60 \times \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

De la condición: $\overline{v^n} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^n\, N_v\, dv$

Entonces, como: $N_v = 4\pi . N\left(\frac{m}{2\pi\, k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B.T}$

Sea: $\frac{m}{2\pi k_B T} = B$ (artificio)

Luego: $\bar{v} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v\, N_v\, dv$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{1}{N}\cdot\int_0^\infty v\left[4\pi N (B)^{3/2}\right] v^2 . e^{-\pi B v^2} dv$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{1}{N}(4\pi N)B^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-\pi B v^2} dv \quad \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = 4\pi B^{3/2}\times\left[\frac{1}{2\pi^2 .\, B^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{2}{\pi\times B^{1/2}} \quad \text{(reemplazando)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{2}{\pi}\times\sqrt{\frac{2\pi\, k_B . T}{m}} = \frac{2}{\pi}\times\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{k_B . T}{m}}\right)$$

$$\therefore \quad \bar{v} = 1{,}60\sqrt{\frac{k_B . T}{m}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

65. a) Muestre que la fracción de partículas debajo de una altura h en la atmósfera es $f = 1 - e^{-mgh/k_B T}$

b) Con este resultado muestre que la mitad de las partículas se encuentran por debajo de la altura $h' = k_B T \ln(2)/mg$. ¿Cuál es el valor de h' para la Tierra? (Suponga una temperatura de 270 K y recuerda que la masa molecular promedio para el aire es 28,8 u).

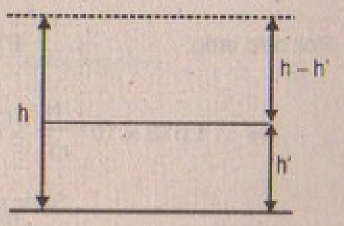
Resolución :

Por demostrar que: $f = 1 - e^{-mgh/k_B.T}$

Sabemos que:

$$\frac{n(h)}{n(h')} + \frac{n(h)}{n(h-h')} = 1$$

$$\Rightarrow \quad f = 1 - \frac{n(h)}{n(h-h')}$$



$$\Rightarrow \quad f = 1 - \frac{n_o e^{-mgh/k_B.T}}{n_o e^{-g(h-h')/k_B.T}} \qquad \Rightarrow \quad f = 1 - \frac{e^{-\frac{mgh}{k_B.T}}}{e^{-mgh/k_BT} \cdot e^{mgh'/k_BT}}$$

Entonces: $f = 1 - e^{-mgh'/k_B.T}$

En particular: $h = h'$

$\therefore \quad f = 1 - e^{-mgh'/k_B.T}$ l.q.q.d.

Parte (b)

De la condición: $1 - e^{-mgh'/k_B.T} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2} = e^{-mgh'/k_B.T}$

$$\Rightarrow \quad \ln(1) = \ln(2) - \frac{mgh'}{k_BT}$$

$$\therefore \quad h' = \frac{k_B.T \times \ln(2)}{mg} \quad \text{l.q.q.d.}$$

Si: $T = 270$ K ; masa del aire $= 4{,}78 \times 10^{-26}$ kg ; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

Entonces: $h' = \dfrac{1{,}38 \times 10^{-23} \times \ln(2)}{4{,}78 \times 10^{-26} \times 9{,}8} \quad \therefore \quad h' = 5{,}47$ km

66. En volumen, el aire se compone aproximadamente de 78% de nitrógeno (N_2), 21% de oxígeno (O_2) y 1% de otros gases. Ignore el 1% de otros gases y a) con esta información encuentre la masa de un metro cúbico de aire en condiciones estándar (1,00 atm, 0,0°C). b) Dado este resultado, calcule la fuerza de elevación sobre un globo lleno de helio con un volumen de 1,00 m³ a una presión de 1,00 atm. c) Muestre que un globo lleno de helio tiene 92,6% de la fuerza de elevación de un globo similar lleno de hidrógeno.

Resolución:

Datos: Aire = 78% N_2 + 21% O_2 + 1% (otros)

Parte (a)

$V = 1{,}00\ m^3$; $P = 1{,}00$ atm $T = 0°C \equiv 273$ K

$$\overline{M}_{aire} = 0{,}78\ \overline{M}_{N_2} + 0{,}21\ M_{O_2} = 0{,}78\left(28 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}\right) + 0{,}21\left(36 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{M}_{aire} = 29{,}4 \times 10^{-3}\ kg/mol$$

Por otro lado: $PV = nRT = \dfrac{m_{aire}}{M_{aire}} \times R \times T$

$$\Rightarrow \quad 1{,}013 \times 10^5\ \frac{N}{m^2} \times (1{,}00\ m^3) = \frac{\text{masa aire}}{29{,}4 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{mol}} \times 8{,}31\ \frac{J}{mol.K} \times 273\ K$$

$\therefore$ masa aire = 1,3 kg

Parte (b) $F_{elevación\ aire} = \text{Masa aire} \cdot g \quad \Rightarrow \quad F_{elev/aire} = 1{,}3 \times (9{,}8)$

$\therefore \quad F_{aire} = 12{,}74$ N

Parte (c)

Si la $F_{elev\ aire/helio} = 12{,}74$ N —— 100%

$F_{elev\ aire/hidrógeno} = 0{,}88$ N —— x

Sabemos que: $F_{elev\ aire/hidrógeno} = \rho_{hidrógeno} \cdot g \cdot V$

$= 8{,}99 \times 10^{-2} \times (9{,}8)(1) = 0{,}88$ N

$\therefore \quad x = 7{,}4\%$

En consecuencia: $F_{helio} = 92{,}6\%\ F_{hidrógeno}$

67. Hay aproximadamente 10^{59} neutrones y protones en una estrella promedio y casi 10^{11} estrellas en una galaxia ordinaria. Las galaxias tienden a formarse en cúmulos de (en promedio) casi 10^3 galaxias, y hay más o menos 10^9 cúmulos en la parte conocida del universo. a) De manera aproximada, ¿cuántos neutrones y protones hay en el universo conocido? b) Suponga que toda esta materia estuviera comprimida en una esfera de materia nuclear de modo que cada partícula nuclear ocupara un volumen de 10^{-45} m³ (casi el "volumen" de un neutrón o protón). ¿Cuál sería el radio de esta esfera de materia nuclear? c) ¿Cuántos moles de partículas nucleares hay en el universo observable?

Resolución:

Datos: Hay: 10^{50} (n° + p°) en una estrella (en promedio)

10^{11} estrellas en una galaxia (en promedio)

10^9 cúmulos en todo el universo (en promedio)

Parte (a)

En una galaxia hay aproximadamente 10^{61} (n° + P)

En parte conocida del universo hay aproximadamente 10^{21} galaxias

Entonces:

1 galaxia ———— 10^{61} (n + p) Aprox.

10^{21} ———— x

$\therefore$ $x = 10^{82}$ (n + p) aproximadamente

Parte (b)

Sabemos que: $n_{n+p} = 10^{82}$

Además por dato: $V_n + V_p = 10^{-45}\ m^3$

Entonces: $n_{(n+p)} \times V_{(n+p)} = V_{total} = V_{esfera\ comprimida}$

$$\Rightarrow \quad 10^{82} + 10^{-45} = \frac{4}{3}\pi \times radio^3$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3{,}1416}\right) \times 10^{37} = radio^3$$

$\therefore$ Radio de la esfera de materia nuclear $= 1{,}3 \times 10^{12} \approx 10^{12}$ m

Parte (c)

Sabemos que: $N = n \times N_A$

$\Rightarrow \quad 10^{82} = n\,(6{,}023 \times 10^{29})$

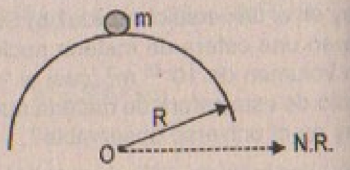
$\therefore \quad n_{moles} = 10^{58}$ moles de partículas

68. a) Si tiene suficiente energía cinética, ¿una molécula en la superficie de la Tierra puede escapar de la gravitación terrestre. Utilizando la conservación de la energía, demuestre que la energía cinética mínima necesaria para escapar es mgR, donde m es la masa de la molécula, g es la aceleración en la caída libre de la superficie, y R es el radio de la Tierra. b) Calcule la temperatura a la cual la energía cinética de escape mínima sea igual a diez veces la energía cinética promedio de una molécula de oxígeno.

Resolución:

Parte (a)

Por la conservación de la energía:



$E_{M\,inicial} = E_{M\,final}$

$U_{P\,inicial} = E_{K\,final}$

$\Rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{esc} = E_{K\,mínima}$

$\therefore \quad E_{K\,mínima} = mgR$

Parte (b)

Sabemos que: $E_{K\,molécula} = \frac{3}{2}\, k_B T$

Por dato: $E_{K\,mínima} = 10\, E_{K\,molécula}$

$\Rightarrow \quad mgR = 10\left(\frac{3}{2}\, k_B T\right) \qquad \therefore \quad T = \frac{mgR}{15 k_B}$

69. Mediante el empleo de rayos láser múltiples, los físicos han sido capaces de enfriar átomos de sodio y confinarlos en una pequeña región. En un experimento la temperatura de los átomos se redujo a $2{,}4 \times 10^{-4}$ K. a) Determine la velocidad rms de los átomos de sodio a esta temperatura. Los átomos pueden confinarse por alrededor de 1,0 s. La trampa tiene una dimensión lineal cercana a 1,0 cm. b) Aproximadamente ¿cuánto tardaría un átomo en escapar de la región donde quedan atrapados si no hubiera el efecto de confinamiento?

Resolución:

Parte (a)

$T = 2{,}4 \times 10^{-4}$ K; masa del sodio = 23 umas ; 1 UM = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg

Sabemos que: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{(3)(1{,}38\times10^{-23})(2{,}4\times10^{-4})}{(23)(1{,}66\times10^{-27})}}$

$\therefore \quad v_{rms(Na)} = 0{,}510$ m/s

Parte (b)

$v \times t = L$

$\Rightarrow \quad 0{,}510$ m/s $\times\, t = 0{,}01$ m

$\therefore \quad t = 19{,}6 \times 10^{-3} \approx 20$ ms

70. Para un gas maxwelliano, utilice una computadora o una calculadora programable para encontrar el valor numérico de la razón $\{N_v(v) / N_v(v_{mp})\}$ para los siguientes valores de v: $v = (v_{mp}/50)$, $(v_{mp}/10)$, $(v_{mp}/2)$, $2v_{mp}$, $10v_{mp}$, $50v_{mp}$. Proporcione sus resultados hasta tres cifras significativas.

Resolución:

En este problema se debe utilizar una calculadora tipo "HP" para poder hallar los resultado más rápidos mediante la función de distribución de Maxwell.

Capítulo 22

MÁQUINAS TÉRMICAS Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

1. Una máquina térmica absorbe 360 J de energía térmica y realiza 25 J de trabajo en cada ciclo. Encuentre a) la eficiencia de la máquina y b) la energía térmica liberada en cada ciclo.

Resolución :

Parte (a) Eficiencia = $e = \dfrac{W_{neto}}{Q_{entra}}$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{25\ J}{360\ J} = 0{,}069 \text{ ó } 6{,}9\%$$

Parte (b)

Sabemos que: $\quad e = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{Q_{entra}} \Rightarrow \quad 0{,}069 = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{360}$

$$\therefore \quad |Q_{sale}| = 335\ J$$

2. Una máquina térmica efectúa 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30% . En cada ciclo, ¿cuánta energía térmica se a) absorbe y b) libera?

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\quad e = \dfrac{W_{neto}}{Q_{entra}} \Rightarrow \quad 30\% = 0{,}3 = \dfrac{200\ J}{Q_{entra}}$

$$\therefore \quad Q_{entra} = 666{,}7\ J$$

Parte (b)

Por otro lado: $\quad e = 1 - \dfrac{Q_{sale}}{666{,}7} \quad \Rightarrow \quad 0{,}3 = 1 - \dfrac{|Q_{sale}|}{666{,}7}$

$$\therefore \quad |Q_{libera\ o\ sale}| = 466{,}7\ J$$

3. El calor que absorbe una máquina es tres veces mayor que el trabajo que realiza a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? b) ¿Qué fracción del calor absorbido es liberado hacia el deposito frío?

Resolución :

Parte (a)

Por dato: $Q_{absorbe} = 1/3\ W_{realiza}$

Entonces: $e = \dfrac{W_{realiza}}{Q_{absorbe}} = \dfrac{1}{3} \equiv 33{,}3\%$

Parte (b)

Sabemos que: $e = 1 - \dfrac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}}$

$$\therefore \quad \frac{|Q_{liberado}|}{Q_{absorbido}} = \frac{2}{3}$$

4. Determine el cambio en la energía interna de un sistema que a) absorbe 500 cal de energía térmica mientras efectúa 800 J de trabajo externo, b) absorbe 500 cal de energía térmica mientras 500 J de trabajo externo se efectúan sobre el sistema, y c) se mantiene a un volumen constante mientras se extraen 1 000 cal del sistema.

Resolución :

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 500\ \text{cal} \times \left(\frac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) - 800\ \text{J}$$

$$\therefore \quad \Delta U = 1\ 293\ \text{J}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 500\ \text{cal} \times \left(\frac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) - 500\ \text{J}$$

$$\therefore \quad \Delta U = 1\ 593\ \text{J}$$

Parte (c)

A volumen constante

Entonces: $\Delta U = Q - 0 = 1\ 000\ \text{cal} \left(\dfrac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) = 4\ 186\ \text{J}$

5. Un gas ideal se comprime a la mitad de su volumen original mientras su temperatura se mantiene constante. a) Si 1 000 J de energía se extraen del gas durante la compresión, ¿cuánto trabajo se realiza sobre el gas? b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas durante la compresión?

Resolución :

Parte (a)

Por la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U = Q - W \qquad$ (a T = cte)

$\Rightarrow \quad 0 = Q - W \qquad \therefore \quad Q = W = 1\ 000\ \text{J} = 1{,}00\ \text{kJ}$

Parte (b)

Por la primera ley $\Delta U = 0$

6. Una máquina particular tiene una salida de potencia de 5,0 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8 000 J de energía térmica en cada ciclo, encuentre a) el calor absorbido en cada ciclo, y b) el tiempo para cada ciclo.

Resolución :

Datos: Potencia de salida = 5,0 kW ; $|Q_{libera}| = 8\ 000$ J

Eficiencia = 25%

Parte (a)

Sabemos que: Eficiencia $= \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbido}}$

$$\Rightarrow \quad e = 0{,}25 = \frac{Q_{abs.} - Q_{libera}}{Q_{absorbido}} = 1 - \frac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbido}}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido/ciclo} = \frac{8\ 000}{0{,}75} = 10{,}7\ \text{kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que: Potencia $= \dfrac{W_{neto}}{\text{segundo}} = \dfrac{Q_{absorbido} - Q_{libera}}{\text{tiempo}}$

$$\Rightarrow \quad 5{,}0 \times 10^3 = \frac{10{,}7\times10^3 - 8\times10^3}{t}$$

$\therefore \quad$ tiempo/ciclo = 0,54 s

7. Una máquina absorbe 1 600 J de un depósito caliente y expulsa 1 000 J hacia un depósito frío en cada ciclo. a) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina? b) ¿Cuánto trabajo se efectúa en cada ciclo? c) ¿Cuál es la salida de potencia de la máquina si cada ciclo dura 0,30 s?

Resolución:

Parte (a) $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbido}}$

$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{-1\,000\text{ J}}{1\,600\text{ J}}$ (por dato)

$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}375$ ó $37{,}5\%$

Parte (b)

$W_{neto} = Q_{absorbido} - |Q_{libera}| \quad \Rightarrow \quad W_{neto} = 1\,600 - 1\,000 = 600\text{ J} = 0{,}6\text{ kJ}$

Parte (c)

En un tiempo: 0,30 s

$\text{Potencia} = \dfrac{W_{neto}}{t} = \dfrac{600\text{ J}}{0{,}30} \quad \therefore \quad \text{Potencia} = 2\text{ kW}$

LA MÁQUINA DE CARNOT

8. Una máquina térmica opera entre dos depósitos a 20°C y 300°C. ¿Cuál es la eficiencia máxima posible para esta máquina?

Resolución:

Datos: $T_f = 20°C = 293\text{ K}$

$T_c = 300°C = 573\text{ K}$

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{293\text{ K}}{573\text{ K}}$

$\therefore \quad e = 0{,}49$ ó 49%

9. Una central eléctrica trabaja con una eficiencia de 32% durante el verano, cuando el agua de mar para enfriamiento está a 20°C. La planta utiliza vapor a 350°C para accionar las turbinas. Suponiendo que la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal, ¿Cuál es la eficiencia de la planta en el invierno cuando el agua de mar se encuentra a 10°C?

Resolución:

Datos: $T_{verano} = 20°C \equiv 293\text{ K}$; $T_c = 350°C \equiv 623\text{ K}$

$T_{invierno} = 10°C \equiv 283\text{ K}$; Eficiencia planta (invierno) = ?

$T_{\text{eficiencia de la planta (verano)}} = 0{,}32$

Por condición: $\dfrac{\text{eficiencia de la planta}}{\text{eficiencia ideal}} = k$

$\Rightarrow \quad \dfrac{0{,}32}{1 - \dfrac{293\text{K}}{623\text{K}}} = k \quad \therefore \quad k = 0{,}604$

Luego: $\dfrac{\text{Eficiencia de la planta}}{\left(1 - \dfrac{283\text{ K}}{623\text{ K}}\right)} = 0{,}604$

$\therefore \quad$ Eficiencia de la planta en invierno $= 0{,}330$ ó 33%

10. Una máquina de Carnot tiene una salida de potencia de 150 kW. La máquina opera entre dos depósitos a 20°C y 500°C. a) ¿Cuánta energía térmica se absorbe por hora? b) ¿Cuánta energía térmica se pierde por hora?

Resolución:

Datos: Potencia = 150 kW

$T_f = 20°C$; $T_c = 500°C$

Parte (a)

Sabemos que: $150 \times 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{s}} = \dfrac{W_{neto}}{t}$

Por otro lado: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{20 + 273}{500 + 273}$

$\therefore \quad e = 0{,}62$

Luego: $0{,}62 = \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbe}} = \dfrac{150 \times 10^3}{Q_{absorbe}}\text{ J/s}$

$\therefore \quad Q_{absorbe/s} = 242 \times 10^3\text{ J}$

En consecuencia:

En una hora se absorbe: 871,2 MJ (por 3 600 s)

ó 871,2 MW.h

Parte (b)

Sabemos que: $0{,}62 = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{Q_{absorbe}} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|}{242 \times 10^3\text{ J/s}}$

$\Rightarrow \quad |Q_{libera/s}| = 92 \times 10^3\text{ J/s} = 92\text{ kW}$

En consecuencia:

En una hora se libera ó se pierde: 331,2 MJ (por 3600 s) ó 331,2 MW.h

11. Se ha propuesto una central eléctrica que aprovecharía el gradiente de temperatura del océano. El sistema operará entre 20°C (temperatura del agua superficial) y 5°C (temperatura del agua a una profundidad cercana a 1km). a) ¿Cuál es la eficiencia máxima de un sistema con estas características? b) Si la salida de potencia de la planta es 75 MW, ¿cuanta energía térmica se absorbe por hora? c) ¿Qué factor compensatorio hace interesante esta propuesta a pesar del valor calculado en el inciso a)?

Resolución:

Parte (a)

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow e = 1 - \dfrac{5{,}0°C + 273}{20°C + 273}$

$\therefore \quad e = 0{,}0512$ ó $5{,}12\%$

Parte (b)

Por dato: $\text{Potencia} = 75 \times 10^6 \ \dfrac{J}{s} = \dfrac{W_{neto}}{t}$

Entonces: $0{,}0512 = \dfrac{W_{neto/s}}{Q_{absorbido}} = \dfrac{75 \times 10^6 J/s}{Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido/s} = 1\,465 \ MJ/s \equiv 1\,465 \ MW$

En consecuencia:

En una hora se absorbe: 5,27 TJ (por 3 600 s) ó 5,274 TWh

12. Una máquina térmica opera en un ciclo de Carnot entre 80°C y 350°C. De un depósito caliente absorbe $2{,}0 \times 10^4$ J de energía térmica por ciclo. La duración de cada ciclo es de 1,0 s.a) ¿Cuál es la máxima salida de potencia de esta máquina? b) ¿Cuánta energía térmica expulsa en cada ciclo?

Resolución:

Datos: $T_f = 80°C$; $T_c = 350°C$; 1 ciclo = 1,00 s

$Q_{absorbido/ciclo} = 2{,}0 \times 10^4$ J/ciclo

Parte (a)

Sabemos que: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_C} = \dfrac{W_{neto}}{Q_{absorbido}}$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = \frac{W_{neto}}{t} = \frac{Q_{abs}}{t}\left(\frac{T_c - T_f}{T_c}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Potencia/ciclo} = 2{,}0 \times 10^4 \ \frac{J}{s} \times \left(\frac{623 - 353}{623}\right) = 8{,}67 \ kW$$

Parte (b)

Por otro lado: $e = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{|Q_{libera}|/t}{Q_{absorbe}/t}$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{353}{623} = 1 - \frac{\dfrac{|Q_{libera}|}{t}}{2{,}0 \times 10^4 \ J/s}$$

$$\therefore \quad \frac{|Q_{libera}|}{t} = 1{,}13 \times 10^4 \ J/s$$

En consecuencia:

En un ciclo se libera: $1{,}13 \times 10^4$ J

13. Una de las máquinas más eficientes jamás construida (42%) opera entre 430°C y 1 870°C. a) ¿Cuál es su máxima eficiencia teórica? b) ¿Cuánta potencia entrega la máquina si absorbe $1{,}4 \times 10^5$ J de energía térmica cada segundo?

Resolución:

Parte (a) $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{[430 + 273]}{1\,870 + 273}$

$\therefore \quad e_{máxima} = 0{,}672$ ó $67{,}2\%$

Parte (b)

Sabemos que: $\text{potencia} = \dfrac{W_{neto}}{t} = e \times \dfrac{Q_{absorbido}}{t}$

$$\Rightarrow \quad \text{Potencia} = (0{,}420) \times 1{,}4 \times 10^5 \ \frac{J}{s}$$

$$\therefore \quad \text{Potencia} = 58{,}80 \ kW$$

14. En una turbina entra vapor a 800°C y se expulsa a 120°C. ¿Cuál es la eficiencia máxima de esta turbina?

Resolución :

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \Rightarrow \text{Eficiencia} = 1 - \frac{[120+273]}{800+273}$

$\therefore$ Eficiencia = 0,634 ó 63,4%

15. La eficiencia de una central nucleoeléctrica de 1 000 MW es 33%; esto es, 2 000 MW de calor se liberan al ambiente por cada 1 000 MW de energía eléctrica producida. Si se utilizara un río de 10^6kg/s de tasa de flujo para transportar el exceso de energía térmica, ¿Cuál sería el aumento de la temperatura promedio del río?

Resolución :

Datos: Potencia producida = 1 000 MW

$$\frac{Q_{liberado}}{t} = 2\,000\text{ MW}; \quad \frac{M_{H_2O}}{t} = 10^6\ \frac{kg}{s} \quad ; \ \Delta T = ?$$

Sabemos que: $\frac{W_{total\ producido}}{t} = 1\,000\text{ MW}$

Por otro lado: $\frac{Q_{liberado}}{t} = \frac{Q_{exceso}}{t} = 2\,000\text{ MW}$

$$\Rightarrow \quad M_{H_2O} \times C_{H_2O} \times \frac{\Delta T}{t} = 2\,000\text{ M}\frac{J}{s}$$

$$\Rightarrow \quad 10^6\ \frac{kg}{s} \times 4\,186\ \frac{J}{kg°C} \times \Delta T = 2\,000\text{ M}\ \frac{J}{s} \quad \therefore \quad \Delta T = 0{,}478°C$$

16. En el punto A en un ciclo de Carnot, 2,30 moles de un gas monoatómico tienen una presión de 1 400 kPa, un volumen de 10,0 litros y una temperatura de 720 K. Se expande isotérmicamente hasta el punto B y después se expande adiabáticamente hasta el punto C, donde su volumen es 24,0 litros. Una compresión isotérmica lo lleva hasta el punto D, donde su nuevo volumen es 15,0 litros. Un proceso adiabático regresa al gas al punto A. a) Determine todas las presiones, volúmenes y temperaturas desconocidas llenando la siguiente tabla.

	P	V	T
A	1 4000 kPa	10,0 litros	720 K
B			
C		24,0 litros	
D		15,0 litros	

b) Encuentre el calor agregado, el trabajo realizado y el cambio en la energía interna para cada una de las etapas, AB, BC, CD y DA. c) Demuestre que $W_{neto}/Q_{en} = 1 - T_c / T_A$, la eficiencia de Carnot.

Resolución :

Datos: n = 2,36 moles de gas monoatómico

$$C_p = \frac{5}{2}R\ ;\ C_V = \frac{3}{2}R\ ;\ \gamma = 1{,}67$$

a) A → B (expansión isotérmica) b) B → C (expansión adiabática)

c) C → D (compresión isotérmica) d) D → A (proceso adiabático)

Parte (a)

$P_A = 1{,}4 \times 10^3$ kPa $V_A = 10{,}0$ litros $T_A = T_B = 720$ K

Entonces: $P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow P_A \cdot V_A / V_B = P_B$ ... (1)

$T_B \cdot V_B^{\gamma-1} = T_C \cdot V_C^{\gamma-1}$ ... (2)

Además: $T_D \cdot V_D^{\gamma-1} = T_A \cdot V_A^{\gamma-1}$ ... (3)

De (3): $T_D = \frac{T_A \cdot V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} = \frac{720 \times (10{,}0)}{(15{,}0)^{1{,}67-1}}$

$\therefore$ $T_D = T_C = 544{,}6$ K

De (2): $(720\text{ K}) \cdot V_B^{1{,}67-1} = 544{,}6 \times (24\text{ litros})^{1{,}67-1}$

$\therefore$ $V_B = 15{,}8$ litros

Luego de (1) $\frac{1{,}4 \times 10^3\text{ kPa} \times 10\text{ litros}}{15{,}8\text{ litros}} = P_B$ $\therefore$ $P_B = 886$ kPa

En consecuencia:

El cuadro queda de la siguiente manera:

*	P (kPa)	V (litros)	T (K)
A	1400 kPa	10,0 litros	720 K
B	886 kPa	15,8 litros	720 K
C	440,8 kPa	24,0 litros	554,6 K
D	711,4 kPa	15,0 litros	544,6 K

Parte (b)

$$\Delta U_{A\to B} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = {}_{+}W_{AB} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{AB} = W_{AB} = (2{,}36)(8{,}31)(720)\ \ln\left(\frac{15{,}8}{10}\right) = 6{,}46\ \text{kJ (compresión)}$$

En: B $\to$ C

$$Q_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{BC} = -W_{BC}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = \frac{P_B \cdot V_B - P_C \cdot V_C}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = \frac{(886\ \text{kPa})(15{,}8\ \text{litros}) - (440{,}8\ \text{kPa})(24\ \text{litros})}{1{,}67 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{BC} = 5{,}1\ \text{MPa} \times \text{litros}\ \frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3} \times \frac{10^3\text{cm}^3}{1\ \text{litro}}$$

$$\therefore \quad W_{BC} = 5{,}1\ \text{kJ}$$

Luego: $\quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 5{,}1\ \text{kJ}$ (compresión)

En C $\to$ D

$$\Delta U_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{CD} = W_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{CD} = W_{CD} = nRT\ \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = (2{,}36)(8{,}31)(554{,}6)\ \ln\left(\frac{15}{24}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{CD} = W_{CD} = 5{,}1\ \text{kJ (compresión)}$$

En D $\to$ A

$$Q_{DA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{DA} = -W_{DA}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = \frac{P_D \cdot V_D - P_A \cdot V_A}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = \frac{(711{,}4\ \text{kPa})(15\text{litros}) - (1400\ \text{kPa})(10\ \text{litros})}{1{,}67 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} = -4{,}96\ \text{MPa} \times \text{litros}\ \frac{10^3\text{cm}^3}{1\ \text{litro}} \times \frac{1\ \text{m}^3}{10^6\text{cm}^3}$$

$$\therefore \quad \Delta U_{DA} = W_{DA} = 4{,}96\ \text{kJ (expansión)}$$

Parte (c)

Por demostrar que: $\dfrac{W_{neto}}{Q_{abs.}} = 1 - \dfrac{T_C}{T_A}$ (eficiencia de Carnot)

Sabemos que en un ciclo de Carnot $\Delta U_{ABCDA} = 0$

$$\Rightarrow \quad Q_{ABCDA} = W_{neto}$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$\Rightarrow \quad W_{neto} = Q_{AB} + 0 + Q_{CD} + 0$$

Pero: $\quad Q_{AB} = Q_{absorbe}$

$\qquad\quad Q_{CD} = Q_{libera}$

$$\Rightarrow \quad \text{De la hipótesis:} \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs.} + Q_{libera}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{|\ Q_{libera}|}{Q_{absorbe}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{nRT_C . \ln(V_D / V_C)}{nRT_A . \ln(V_B / V_A)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{T_C}{T_A} \times \frac{\ln(V_D / V_C)}{\ln(V_B / V_A)} \quad \ldots (\alpha)$$

De la relación en la parte (a) de (2) y (3).

Dividiendo (3) por (2)

Resulta que: $\quad \dfrac{T_D \cdot V_D^{\gamma-1}}{T_C \cdot V_C^{\gamma-1}} = \dfrac{T_A \cdot V_A^{\gamma-1}}{T_B \cdot V_B^{\gamma-1}}$

Como: $\quad T_A = T_B \ \wedge \ T_C = T_D \ \Rightarrow \ \ln\left(\dfrac{V_D}{V_C}\right) = -\ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right) \ \ldots (\beta)$

En consecuencia: (β) en (α)

$$\Rightarrow \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 + \frac{T_C}{T_A} \times \frac{\ln(V_D / V_C)}{-\ln(V_D / V_C)}$$

$$\therefore \quad \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{T_C}{T_A} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

17. Una máquina de vapor trabaja en un clima frío donde la temperatura de escape es 0°C. a) Calcule la máxima eficiencia teórica de la máquina utilizando una temperatura de vapor de entrada de 100°C. b) Si, en vez de eso, se usa vapor sobrecalentado a 200°C, encuentre la máxima eficiencia posible.

Resolución :

Parte (a)

Sabemos que: $\text{Eficiencia (e)} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad e = 1 - \dfrac{0°C + 273}{100°C + 273}$

$\therefore \quad E_{máx} = 0{,}268$

Parte (b) $\quad e_{máx} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad e_{máx} = 1 - \dfrac{0°C + 273}{200°C + 273}$

$\therefore \quad e_{máx} = 0{,}423$

18. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia de 25% cuando la temperatura del depósito caliente es de 500°C. Si deseamos mejorar la eficiencia hasta 30%, ¿cuál sería la temperatura del depósito caliente, suponiendo que todo lo demás permanece inalterado?

Resolución :

Datos: $\quad \text{Eficiencia}_i = 25\% \qquad T_{ci} = 500\,°C = 773\ K$

$\quad \text{Eficiencia}_f = 30\% \qquad T_{cf} = ?$

Sabemos que: $\text{eficiencia} = 0{,}25 = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{T_f}{500°C + 273}$

$\Rightarrow \quad T_f = 579{,}75\ K$

Por otro lado:

Si: $\quad \text{Eficiencia} = 0{,}3 \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3 = 1 - \dfrac{573{,}75\ K}{T_{c\ final}}$

$\therefore \quad T_{c\,final} = 828{,}2\ K$

19. Una máquina 20% eficiente se utiliza para acelerar un tren desde el reposo hasta 5,0 m/s. Se sabe que una máquina ideal (de Carnot) con los mismos depósitos frío y caliente aceleraría al mismo tren desde el reposo hasta una velocidad de 6,5 m/s empleando la misma cantidad de combustible. Si la máquina emplea aire a 300 K como un depósito frío, encuentre la temperatura del vapor que sirve como depósito caliente.

Resolución :

Sabemos que: $\quad 0{,}2 = \dfrac{W_{máquina/tren}}{Q_{absorbido}} = \dfrac{M_{tren}\cdot(5{,}0)^2}{2Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido} = \dfrac{M_{tren}\times(5{,}0)^2}{2(0{,}2)} \quad \ldots (1)$

Por otro lado: $\quad \dfrac{W_{máquina\ de\ Carnot/tren}}{Q_{absorbido}} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = \dfrac{M_{tren}(6{,}5)^2}{2Q_{absorbido}}$

$\therefore \quad Q_{absorbido} = \dfrac{T_c \times M_{tren}(6{,}5)^2}{2(T_c - T_f)} \quad \ldots (2)$

(1) = (2) donde $T_f = 300\ K$

$\dfrac{M_{tren}(5{,}0)^2}{2(0{,}2)} = \dfrac{T_c \times M_{tren}\times(6{,}5)^2}{2(T_c - T_f)} \quad \therefore \quad T_c = 453\ K$

EL MOTOR DE GASOLINA

20. Un motor de gasolina tiene una relación de compresión de 6 y usa un gas para el cual $\gamma = 1{,}4$. a) ¿Cuál es la eficiencia del motor si opera en un ciclo de Otto idealizado? b) Si la eficiencia real es de 15%, ¿qué fracción del combustible se desperdicia como resultado de la fricción y de las inevitables pérdidas térmicas? (Suponga combustión completa de la mezcla aire-combustible).

Resolución :

Datos: $\quad \dfrac{V_1}{V_2} = 6\ ; \ \gamma = 1{,}4\ ;$

Parte (a)

Sabemos que en un ciclo de Otto:

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{(6)^{1,4-1}}$$

$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}512 \ \text{ó}\ 51{,}2\%$

Parte (b)

Si la eficiencia real = 15%

Entonces: $\frac{15\%}{51{,}2\ \%} = 0{,}293$ (fracción de combustible que se desperdicia)

21. Un motor de gasolina de 1,6 litros con una relación de comprensión de 6,2 tiene una salida de potencia de 102 CP. Si el motor opera en un ciclo de Otto idealizando, encuentre el calor absorbido y expulsado por el motor cada segundo. Suponga que la mezcla aire-combustible se comporta como un gas ideal.

Resolución :

Datos: Volumen de gasolina = 1,6 litros ; $\gamma = 1{,}4$

$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = 6{,}2$ 1 CP = 746 W

Salida de potencia = 102 CP

Sabemos que: $\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = 6{,}2$

$\Rightarrow \frac{V_{final}}{1{,}6\ \text{litros}} = 6{,}2 \quad \therefore \quad V_{final} = 6{,}2 \times 1{,}6 = 9{,}92$ litros

Por otro lado:

$$\text{Eficiencia en un ciclo de Otto} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{(6{,}2)^{1{,}4-1}}$$

$\therefore$ Eficiencia = 0,52

Como: $\text{Eficiencia} = 0{,}52 = \frac{W_{neto}(1/t)}{Q_{abs}(1/t)}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}52 = \frac{\text{Potencia}}{Q_{abs/t}} = \frac{102\ \text{CP}}{Q_{abs/t}} \times \frac{746\ \text{W}}{1\ \text{CP}}$$

$\therefore \quad Q_{absorbido/s} = 146$ kW

Además: $0{,}52 = 1 - \frac{Q_{libera/s}}{Q_{absorbe/s}} \Rightarrow 0{,}52 = 1 - \frac{Q_{libera/s}}{Q_{absorbe/s}}$

$\therefore \quad Q_{libera/s} = 70$ kW

22. En un cilindro de un motor de automóvil, justo después de la combustión, el gas se confina en un volumen de 50 cm³ y tiene una presión inicial de $3{,}0 \times 10^6$ Pa. El émbolo se mueve hacia afuera a un volumen final de 300 cm³ y el gas se expande sin perder calor. Si $\gamma = 1{,}40$ para el gas, ¿cual es la presión final?

Resolución : 22

Datos: $V_{inicial} = 50{,}0\ \text{cm}^3$; $V_{final} = 300\ \text{cm}^3$

$P_{inicial} = 3{,}0 \times 10^6$ Pa $\quad \gamma = 1{,}4$

$P_{final} = ?$

En un proceso adiabático (Q = 0) se cumple que:

$P \cdot V^{\gamma} = \text{cte}$

$\Rightarrow \quad P_{inicial} \cdot V_{inicial}^{\gamma} = P_{final} \cdot V_{final}^{\gamma}$

$\Rightarrow \quad (3{,}0 \times 10^6\ \text{Pa}) \times (50{,}0)^{1{,}4} = P_{final} \times (300\ \text{cm}^3)^{1{,}4}$

$\therefore \quad P_{final} = 2{,}43 \times 10^5$ Pa

23. ¿Cuánto trabajo hace el gas en el problema 22 al expandirse en $V_1 = 50\ \text{cm}^3$ a $V_2 = 300\ \text{cm}^3$?

Resolución :

Datos: $V_1 = 50{,}0\ \text{cm}^3$; $V_2 = 300\ \text{cm}^3$

$W_{total} = ?$

En un proceso adiabático se cumple que:

$$W_{total} = \frac{P_1 \cdot V_1 - P_2 \cdot V_2}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = \frac{3{,}0\times10^6\times(50{,}0) - 2{,}43\times10^5\times(300)}{1{,}4-1}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = 19{,}3 \times 10^7\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \text{cm}^3 \times \frac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3}$$

$\therefore \quad W_{total} = 193$ J

BOMBAS DE CALOR Y REFRIGERADORES

24. Un refrigerador ideal o bomba de calor ideal es equivalente a una máquina de Carnot que funciona a la inversa. Es decir, se absorbe calor Q_f de un deposito frío y se libera calor Q_c hacia el depósito caliente. a) Demuestre que el trabajo que debe suministrarse para operar el refrigerador o la bomba es:

$$W = \frac{T_c - T_f}{T_f} . Q_f$$

b) Muestre que el coeficiente de rendimiento del refrigerador ideal es:

$$CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Resolución:

Parte (a)

Por demostrar que: $W = \frac{T_c - T_f}{T_f} . Q_f$

Sabemos que en un ciclo de Carnot se cumple que:

$$1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{W}{Q_c} \Rightarrow \frac{T_c - T_f}{T_c} = \frac{W}{Q_c}$$

como la bomba ideal ó refrigerador trabaja a la inversa se tiene que:

$$\frac{T_c - T_f}{T_f} = \frac{W}{Q_f}$$

$$\therefore \quad W = \frac{T_c - T_f}{T_f} \times Q_f \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

Por demostrar que: $CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

Sabemos que: $CDR = \frac{Q_f}{W} \Rightarrow CDR = \frac{Q_f}{\left(\frac{T_c - T_f}{T_f}\right) \times Q_f}$

$$\therefore \quad CDR = \frac{T_f}{T_c - T_f} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

25. Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento igual a 5. Si en cada ciclo el refrigerador absorbe 120 J de energía térmica de un depósito frío, encuentre a) el trabajo hecho en cada ciclo, y b) la energía térmica liberada hacia el depósito caliente.

Resolución:

Datos: CDR (refrigerador) = 5

$Q_f = 120$ J

Parte (a)

Sabemos que: $CDR\ (refrig) = \frac{Q_f}{W} \Rightarrow 5 = \frac{120\ J}{W}$

$$\therefore \quad W_{realiza} = 24\ J$$

Parte (b)

Sabemos que: $W_{realiza} = Q_c - Q_f \Rightarrow 24\ J = Q_c - 120\ J$

$$\therefore \quad Q_{libera} = 144\ J = Q_c$$

26. ¿Cuál es el coeficiente de rendimiento de una bomba de calor que lleva calor de los exteriores a – 3°C hacia el interior de una casa a 22°C? (Sugerencia: La bomba de calor realiza el trabajo W, mismo que también está disponible para calentar la casa).

Resolución:

Datos: $T_f = -3°C \equiv 270$ K

$T_c = 22°C \equiv 295$ K

Sabemos que: $CDR\ (\text{bomba de calor}) = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

$$\Rightarrow \quad CDR\ (\text{bomba de calor}) = \frac{295\ K}{295\ K - 270\ K}$$

$$\therefore \quad CDR\ (\text{bomba de calor}) = 11{,}8$$

27. ¿Cuánto trabajo se requiere, utilizando un refrigerador de Carnot, para extraer 1,0 J de energía térmica de gas helio a 4,0 K y liberar esta energía térmica en un medio a temperatura ambiente (273 K)?

27.A ¿Cuánto trabajo se requiere, utilizando un refrigerador de Carnot, para extraer helio a T_f Q joules de energía térmica y liberar esta energía térmica en un medio a temperatura ambiente a T_f?

Resolución:

Datos: "Refrigerador de Carnot"

T_f y Q $\quad T_c \quad W = ?$

Sabemos que: $CDR\ (refrig.) = \frac{Q}{W}$

Así también: $CDR\ (refrig.)\ Carnot = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

Igualando: $\dfrac{Q}{W} = \dfrac{T_c}{T_c - T_f} \Rightarrow W = \dfrac{(T_c - T_f)}{T_c} . Q$

$\therefore \quad W = \dfrac{\Delta T}{T_c} . Q$

ENTROPÍA

28. ¿Cuál es el cambio de entropía cuando 1 mol de plata (108 g) se funde a 961°C?

Resolución:

Datos: n = 1,00 mol Ag ; m_{Ag} = 108 g ; T = 961°C ; $Q_{fusión} = 8,82 \times 10^4$ J

Sabemos que: $dS = \dfrac{dQ_f}{T}$

$$\Rightarrow \int_i^f dS = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_f \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_f$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{T} . Q_f$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{961° + 273} \times m_{Ag} . L_f = \frac{1}{1\,234\ K} \times 108 \times 10^{-3} kg \times 8{,}82 \times 10^4 \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 7{,}72 \ \frac{J}{K}$$

29. ¿Cuál es la reducción de entropía en 1 mol de gas helio que se ha enfriado a 1atm desde la temperatura ambiente de 293 K hasta 4 K? (C_p del helio = 21 J/mol.K)

Resolución:

Datos: ΔS = ? ; n_{He} = 1,00 mol ; P = 1,00 atm

$T_{inicial}$ = 293 K ; T_{final} = 4 K ; C_p (helio) = 21 J/mol.K

Sabemos que $L_{fusión(He)} = 5{,}23 \times 10^3$ J/kg

Por otro lado:

$$\div \begin{cases} P . V_{inicial} = n\,R\,T_{inicial} \\ P . V_{final} = n\,R\,T_{final} \end{cases}$$

$$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{T_{final}}{T_{inicial}}$$

Como: $\Delta S = \displaystyle\int_i^f \frac{dQ_r}{T} = nC_v \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

Por dato: C_p (He) = 21 J/mol.K $\Rightarrow C_V$ (He) = 12,69 $\dfrac{J}{mol.K}$

Luego: (reemplazando datos)

$$\Delta S = (1\ mol)\left(12{,}69\ \frac{J}{mol K}\right) \ln\left(\frac{4\ K}{293\ K}\right) + (1{,}00\ mol)\left(8{,}31\ \frac{J}{mol K}\right) \ln\left(\frac{4\ K}{293\ K}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 12{,}69\ \frac{J}{K}\ (-4{,}293878) + \left(8{,}31\ \frac{J}{K}\right)(-4{,}293878)$$

$$\therefore \quad \Delta S = -90{,}2\ \frac{J}{K} \quad \text{(reducción en la entropía)}$$

30. Una congeladora hermética tiene una temperatura inicial de 25°C y 1,0 atm. El aire se enfría después hasta –18°C. a) ¿Cuál es el cambio de entropía del aire si el volumen se mantiene constante? b) ¿Cuál sería el cambio si la presión se mantuviera en 1 atm durante el enfriamiento?

Resolución:

Datos: P_i = 1,00 atm ; $T_{inicial}$ = 25°C ; T_{final} = –18°C ; $C_{V\,aire} = \dfrac{5}{2}R$

Parte (a)

Por hallar ΔS = ? a volumen constante

Sabemos que: $\Delta S = n\,C_V \ln\left(\dfrac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + nR\ln\left(\dfrac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

$$\Delta S = nC_V \ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right) + 0 \quad \text{(volumen = cte)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = (1{,}00\ mol)\left(\frac{5}{2}(R)\right) . \ln\left(\frac{-18 + 273}{25 + 273}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S = -3{,}24\ \frac{J}{K} \quad \text{(para una mol de aire)}$$

Hay una reducción en la entropía.

Parte (b)

$P = 1$ atm = cte $\qquad \Delta S = ?$

Sabemos que: $\Delta S = n\,.\,C_V\,.\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Por otro lado: $\div \begin{cases} P\,.\,V_{inicial} = n\,R\,.\,T_{inicial} \\ P\,.\,V_{final} = n\,R\,.\,T_{final} \end{cases}$

$$\frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{T_{final}}{T_{inicial}}$$

Luego: $\Delta S = n \times \frac{5}{2} R \times \ln\left(\frac{-18+273}{25+273}\right) + n \times R \times \ln\left(\frac{-18+273}{25+273}\right)$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{5}{2}(8{,}31)(n) \times (0{,}15583) + n(8{,}31)\,(-0{,}15583)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = -29{,}085\ n\ J/K$$

Para $n = 1{,}00$ mol de aire

Entonces: $\qquad \Delta S = -29{,}085\ \frac{J}{K}$ (reducción en la entropía)

31. Calcule el cambio de entropía de 250 g de agua que se calienta lentamente de 20°C a 80°C. (Sugerencia: advierta que $dQ = mc\ dT$).

Resolución :

Datos: $\quad m_{H_2O} = 250$ g ; $C_{H_2O} = \frac{1\ \text{cal}}{\text{g.°C}}$

$T_{inicial} = 20°C \equiv 293$ K ; $\quad 1$ cal $\equiv 4{,}186$ J

$T_{final} = 80°C \equiv 353$ K ; $\quad \Delta S = ?$

Sabemos que: $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_i^f mC.\frac{dT}{T}$ (por sugerencia)

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m\,.\,C\,.\int_i^f \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O}\,.\,C_{H_2O}\,.\ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 250\ g \times \frac{1\ cal}{g°C} \times \ln\left(\frac{353\ K}{233\ K}\right) \times \frac{4{,}186\ J}{1\ cal}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 195\ \frac{J}{K}$$

32. Una bandeja de hielo contiene 500 g de agua a 0°C. Calcule el cambio de entropía del agua cuando a medida que se congela lentamente a 0°C.

Resolución :

Datos: $\quad m_{hielo} = 500$ g ; $\quad C_{hielo} = 0{,}5$

$T = 0°C \equiv 273$ K

Sabemos que: $\Delta S = \frac{dQ_r}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{mC\Delta T}{T} = \frac{Q_{trans.}}{T}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{m_{hielo} \times L_{fusión}}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{(0{,}5\,kg) \times 3{,}39 \times 10^5\ \frac{J}{kg}}{273\ K}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 1{,}665 \times 10^5\ \frac{J}{K}$$

33. Una herradura de hierro de 1 kg se toma de un horno a 900°C y se sumerge en 4,0 kg de agua a 10°C. Si no se libera calor en los alrededores, determine el cambio de entropía total.

Resolución :

Datos: $\quad m_{hierro} = 1{,}00$ kg ; $\quad T_{inicial(Fe)} = 900°C \equiv 1\,173$ K ; $\quad C_H = 0{,}107\ \frac{cal}{g.°C}$

$m_{agua} = 4{,}00$ kg ; $\quad T_{inicial} = 10°C \equiv 283$ K ; $\quad C_{H_2O} = \frac{1\ cal}{g.°C}$

$\Delta S = ?$

Por calorimetría: $Q_{ganado\,(H2O)} = Q_{perdido\,(Fe)}$

$$\Rightarrow \quad m_{H_2O}\,.\,C_{H_2O}\,.\,\Delta T = m_{Fe}\,.\,C_{Fe}\,.\,\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad (4{,}0\ kg) \times \left(1{,}00\frac{cal}{g.°C}\right) \times (T_E - 10°C) = (1{,}00\ kg) \times \left(0{,}107\frac{cal}{g.°C}\right) \times (900°C - T_E)$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 32{,}2°C \equiv 306{,}2\ K$$

Por otro lado:

Sabemos que: $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_{total}}{T} = \int_{T_1}^{T_E} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_E} \frac{dQ_2}{T}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} \cdot \int_{T_{x_1}}^{T_E} \frac{dT}{T} + m_{hierro} \cdot C_{Fe} \cdot \int_{T_{I_2}}^{T_E} \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = m_{H_2O} \cdot C_{H_2O} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + m_{Fe} \cdot C_{Fe} \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_{I_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 4{,}00\ kg \times \frac{J}{kg.°C} \cdot \ln\left(\frac{306{,}2\ K}{283\ K}\right) + 1{,}00\ kg \times 448\ \frac{J}{kg.°C} \times \ln\left(\frac{306{,}2\ K}{1\,173\ K}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = 1\,319{,}3\ \frac{J}{°C} - 601{,}7\ \frac{J}{°C}$$

$$\therefore \quad \Delta S = 717\ \frac{J}{°C} \equiv 717\ \frac{J}{K}$$

34. A una presión de 1 atm, helio líquido hierve a 4,2 K. El calor latente de evaporación es 20,5 kJ/kg. Determine el cambio de entropía (por kilogramo) que produce de la evaporación.

Resolución:

Datos: $P = 1{,}00\ atm$; $L_{vap.} = 20{,}5\ \frac{J}{kg}$; $T_{vap.} = 4{,}2\ K$

$\Delta S = ?$

Sabemos que: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q_{vap.}}{T_{vap.}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T} \times m_{He} \times L_{vap.}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{4{,}2K} \times 1\ kg \times 20{,}5\ \frac{kJ}{kg}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{(X\ kilogramo)} = 4{,}88\ \frac{kJ}{K}$$

35. La superficie del Sol está aproximadamente a 5 700 K y la temperatura de la superficie de la Tierra es de casi 290 K. ¿Qué cambio de entropía ocurre cuando 1 000 J de energía térmica se transfieren del Sol a la Tierra?

Resolución:

Datos: $T_{Sol} = 5\,700\ K$; $T_{Tierra} = 290\ K$

$Q_{Sol-Tierra} = 1000\ J$; $\Delta S_{univ.} = ?$

Sabemos que: $\Delta S_{univ} = \frac{Q_{Ganado \times Tierra}}{T_{Tierra}} - \frac{Q_{Liberado \times Sol}}{T_{Sol}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{univ.} = \frac{1\,000 J}{290\ K} - \frac{1\,000 J}{5\,700 K}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{univ.} = 3{,}448\ \frac{J}{K} - 0{,}1754\ \frac{J}{K}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{univ} = 3{,}27\ \frac{J}{K}$$

36. Un iceberg de 100 000 kg a −5°C se desprende de la capa de hielo polar y flota por el océano a 5°C. ¿Cuál es el cambio final de entropía del sistema cuando el iceberg se ha fundido por completo? (El calor específico del hielo es 2 010 J/kg.°C)

Resolución:

Datos: $M_{iceberg} = 10^5\ kg$; $T_{iceberg} = -5°C \equiv 268\ K$

$T_{océano} = 5\ °C \equiv 278\ K$; $c_{hielo} = 2\,010\ \frac{J}{kg.°C}$

$L_{fusión\ agua} = 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$; $\Delta S_{sistema} = ?$

Sabemos que: $Q_{absorbido\ iceberg} = Q_{perdido \times océano}$

Entonces:

$$Q_{absorbido \times iceberg} = M_{iceberg} \times C_H \times \Delta T + Q_{trans.} + Q_{adquirido}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{absorbido \times iceberg} = 10^5\ kg \times 2\,010\ \frac{J}{kg.°C} \times (0°C + 5°C) + 10^5\ kg \times 3{,}33 \times 10^5\ \frac{J}{kg}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido \times iceberg} = |Q_{liberado \times océano}| = 3{,}43 \times 10^{10}\ J$$

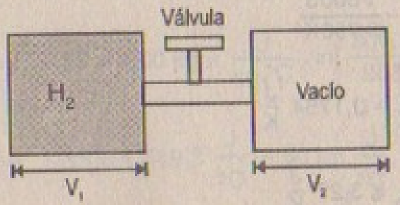
Luego: $\Delta S_{sistema} = \frac{Q_{absorbido \times iceberg}}{T_{iceberg}} - \frac{Q_{liberado \times océano}}{T_{océano}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{sistema} = \frac{3{,}43\times10^{10}\,J}{268\,K} - \frac{3{,}43\times10^{10}\,J}{278\,K}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{sistema} = 4{,}62\ \frac{MJ}{K}\ \text{(aumenta)}$$

37. Un mol de gas H_2 está contenido en el lado izquierdo del recipiente mostrado en la figura P22.37, el cual tiene volúmenes iguales a la izquierda y a la derecha. En el lado derecho se ha hecho vacío. Cuando la válvula se abre, el gas fluye hacia el lado derecho. ¿Cuál es el cambio de entropía final? ¿Cambia la temperatura del gas?

Resolución :



Volumen 1 = volumen 2
$n = 1{,}00$ mol (H_2)
$\Delta S = ?$

Por la primera ley de la termodinámica:

$$dQ = dU + dW \quad (V = cte)$$

$$\Rightarrow \quad dQ = dU$$

Pero como es un proceso irreversible, lo convertimos a reversible; entonces: a T ambiente y constante:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dW}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{T}\int dW = \frac{1}{T} nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV \quad \dots(1)$$

Como: $V_{inicial} = H_2$ (ocupa toda la molécula)

$\Rightarrow \quad V_{final} = 2\,V_{inicial} = H_2$ (ocupa toda la molécula cuando se abre la válvula)

Luego: (1)

$$\Delta S = nR\ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right) = 1\ \text{mol} \times 8{,}31\ \frac{J}{mol.K}\ .\ln\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S = 5{,}76\ \frac{J}{K}$$

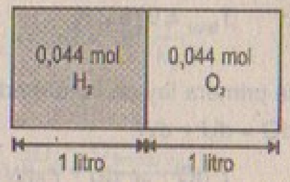
No cambia la temperatura (se produce un proceso isotérmico).

38. Un recipiente de 2,0 litros está dividido en dos partes iguales como se indica en la figura P22.38. El lado izquierdo contiene gas H_2 y en lado derecho hay gas O_2.

Ambos gases están a temperatura ambiente y a presión atmosférica. La división se elimina y se deja que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento de entropía?

Resolución :

Datos: $V_{total} = 2{,}0$ litros
$T_{ambiente}$
$P = 1{,}00$ atm
$\Delta S = ?$



Manteniéndose la temperatura constante y a presión atmosférica, por la primera ley de la termodinámica se cumple que:

$$dQ_T = dW_T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total} = \int \frac{dW_{total}}{T} = \frac{1}{T}\, n_{total}\,.\,RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV$$

Como el volumen inicial que ocupa cada molécula es de 1 litro, entonces al mezclarse cada molécula ocupará todo el recipiente es decir 2 litros. Luego:

$$\Delta S_{total} = (0{,}044\ \text{mol}\ H_2 + 0{,}044\ \text{mol}\ O_2)\left(8{,}31\,\frac{J}{mol.K}\right)\times\ln\left(\frac{2\ \text{litros}}{1\ \text{litro}}\right)$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 0{,}506\ J/K$$

39. Un mol de un gas monoatómico ideal, inicialmente a una presión de 1 000 atm y un volumen de 0,025 m³, se calienta hasta un estado final donde la presión es 2,000 atm y el volumen es 0,040 m³. Determine el cambio de entropía en este proceso.

Resolución :

Datos: $n = 1$ mol gas monoatómico ; $C_v = \frac{3}{2}R$; $R = 8{,}31$ J/mol.K

$P_{inicial} = 1{,}00$ atm ; $P_{final} = 2{,}00$ atm

$V_{inicial} = 0{,}025\ m^3$; $V_{final} = 0{,}040\ m^3$

$\Delta S = ?$

Por la ley de los gases ideales:

$$P_{inicial}\cdot V_{inicial} = n\,.\,R\,.\,T_{inicial}$$

$$\Rightarrow \quad T_{inicial} = \frac{P_{inicial}\times V_{inicial}}{n\,.\,R} = \frac{1{,}00\ atm\times0{,}025\ m^3}{1\ mol\times8{,}31\frac{J}{mol.K}}\times\frac{1{,}013\times10^5\ N/m^2}{1\ atm}$$

$$\therefore \quad T_{inicial} = 304{,}7\ K$$

Por otro lado: $P_{final}\cdot V_{final} = n.R\,T_{final}$

$$\Rightarrow \quad T_{final}=\frac{P_{final}\cdot V_{final}}{nR}=\frac{2{,}00\ \text{atm}\times 0{,}040\ \text{m}^3}{1\ \text{mol}\times 8{,}31\ \text{J/mol.K}}\times\frac{1{,}013\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}$$

$$\therefore \quad T_{final}=975{,}2\ \text{K}$$

Luego, por la primera ley de la termodinámica:

$$dQ = dU + dW$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\int\frac{dU}{T}+\int\frac{dW}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = n\,C_v.\ln\left(\frac{T_{final}}{T_{inicial}}\right)+nR\ \ln\left(\frac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$$

Reemplazando datos resulta que:

$$\Delta S = 18{,}4\ \text{J/K}$$

40. Un mol de un gas diatómico ideal, inicialmente a una presión P y volumen V, se expande hasta tener una presión 2P y un volumen 2V. Si durante la expansión la presión se mantiene directamente proporcional al volumen, determine el cambio de entropía en el proceso.

Resolución:

Por la ley de gases: $\dfrac{T_{final}}{T_{inicial}}=\dfrac{2P\times 2V}{P\ .\ V}=4$

Luego:

Sabemos que: $\Delta S = n\,C_V\ .\ \ln\left(\dfrac{T_{final}}{T_{inicial}}\right)+nR\ .\ln\left(\dfrac{V_{final}}{V_{inicial}}\right)$

Por dato: $n = 1$; $V_{inicial} = V$;

$V_{final} = 2V$

Entonces: $\Delta S=\dfrac{3}{2}\ R\ \ln(4)+R\ \ln(2)$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 34{,}56\ \text{J/K}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

41. Un cubo de hielo de 18 g a 0,0°C se calienta hasta que se convierte en vapor. a) ¿Cuánto aumenta la entropía? b) ¿Cuánta energía se requirió para evaporar el cubo de hielo?

Resolución:

Datos: $m_{hielo} = 18\ \text{g}$; $T_{inicial} = 0°\text{C}$

$C_{H_2O}=1\,\dfrac{\text{cal}}{\text{g.°C}}$; $L_{fusión}=3{,}33\times10^5\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

$L_{vaporiz.}=2{,}26\times10^6\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

Parte (a)

$$\Delta S_{total}=\int\frac{dQ_r}{T}=\frac{Q_{trans/fusión}}{T}+\int\frac{dQ_r}{T}+\frac{Q_{trans/vap}}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total}=\frac{5\,884\ \text{J}}{273\ \text{K}}+18\ \text{g}\times\frac{1\ \text{cal}}{\text{g.°C}}\int_{0°C}^{100°C}\frac{dT}{T}+\frac{m_{H_2O}\cdot L_{vap.}}{373\ \text{K}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{total}=21{,}96\ \frac{\text{J}}{\text{K}}+18\ \text{g}\ \frac{1\ \text{cal}}{\text{g.°C}}\ \ln\left(\frac{373\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)+\frac{18\times10^{-3}\text{kg}\times\left(2{,}26\times10^6\ \text{J/kg}\right)}{373\ \text{K}}$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 154{,}5\ \text{J/K}$$

Parte (b)

$$Q_{trans/fusión}=m_{hielo}\cdot L_{fusión}=18\times10^{-3}\ \text{kg}\times 3{,}33\times10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\therefore \quad Q_{trans/fusión} = 5\,994\ \text{J}$$

$$Q_{requerido}=m_{H_2O}\ .\ C\ .\ \Delta T = 18\ \text{g}\times\frac{1\ \text{cal}}{\text{g°C}}\times 100°\text{C}\times\left(\frac{4{,}186\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{requerido\ (F-V)} = 7\,534{,}8\ \text{J}$$

$$Q_{trans/vap}=\ .\ L_{vap.}=18\times10^{-3}\ \text{kg}\times 2{,}26\times10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\therefore \quad Q_{trans/vap.} = 40\,680\ \text{J}$$

En consecuencia:

$$Q_{total\ requerida} = 5\,994\ \text{J} + 7\,534{,}8\ \text{J} + 40\,680\ \text{J}$$

$$\therefore \quad Q_{total\ requerida} = 54{,}2\ \text{kJ}$$

42. Si una máquina de Carnot con 35% de eficiencia se opera en sentido contrario de modo que se integre a un refrigerador, ¿Cual sería el coeficiente de rendimiento del refrigerador?

Resolución:

Datos: $e = 35\%$; CDR (refrig) = ?

Sabemos que: $e=0{,}35=1-\dfrac{T_f}{T_c}=\dfrac{T_c-T_f}{T_c}$ ... (α)

$$\Rightarrow \frac{T_f}{T_c} = 0{,}65 \qquad \ldots (\beta)$$

Por otro lado: $\quad \text{CDR (refrig.)} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f} \qquad \ldots (\theta)$

Entonces: de (θ)

$$\text{C.D.R. (refrig.)} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{\frac{T_c - T_f}{T_c}} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{1 - \frac{T_f}{T_c}} \Rightarrow \text{CDR (refrig)} = \frac{0{,}65}{0{,}35} \quad (\text{de } \alpha \text{ y } \beta)$$

$$\therefore \quad \text{CDR (refrig.)} = 1{,}86$$

43. Una casa pierde energía térmica por las paredes exteriores y el techo a razón de 5 000 J/s = 5 kW cuando la temperatura interior es de 22°C y la exterior de –5°C. Calcule la potencia eléctrica requerida para mantener el interior en 22°C en los siguientes dos casos: a) La potencia eléctrica se usa en calefactores de resistencia eléctrica (los cuales convierten toda la electricidad suministrada en energía térmica). b) La potencia eléctrica se usa para operar el compresor de una bomba de calor (la cual tiene un coeficiente de rendimiento igual a 60% del valor del ciclo de Carnot)

Resolución:

Datos: $T_{int} = 22°C$; $Q_{libera} = 5\,000\ \dfrac{J}{s} = 5{,}00$ kW

$T_{ext} = -5{,}0°C$

Parte (a)

Sabemos que: $\dfrac{W}{t}$ = Potencia

$$\Rightarrow \frac{Q_{suministrado}}{t} = \text{Potencia} \quad \text{(por dato)}$$

$$\Rightarrow 5\,000\ \frac{J}{s} = \text{Potencia}$$

$$\therefore \quad \text{Potencia eléctrica} = 5{,}00 \text{ kW}$$

Parte (b)

Por dato: CDR (bomba de calor) × 60% = 1/e

Entonces:

Sabemos que: $\text{CDR (bomba de calor)} = \dfrac{Q_{entrega/t}}{W_{realizado/t}} \times (1/60)\% = \dfrac{1}{e}$

$$\Rightarrow \frac{Q_{entrega/t}}{\text{Potencia}} = \frac{1}{e} \times \frac{100}{60}$$

$$\Rightarrow 500\ \frac{J}{s} \times \frac{100}{60} \times \left[1 - \frac{268 \text{ K}}{295 \text{ K}}\right] = \text{Potencia}$$

$$\Rightarrow \frac{50\,000}{60}\ \frac{J}{s} \times \frac{(295 - 268) \text{ K}}{295 \text{ K}} = \text{Potencia}$$

$$\therefore \quad \text{Potencia eléctrica requerida} = 763 \text{ W}$$

44. Calcule el aumento de la entropía del universo cuando usted añade 20 g de crema a 5°C a 200 g de café a 60°C. El calor específico de la crema y el café es 4,2 J/g.°C.

Resolución:

Datos: $M_{crema} = 20{,}0$ g $\quad \wedge \quad T = 5°C \equiv 278$ K

$M_{café} = 200$ g $\quad \wedge \quad T = 60°C \equiv 333$ K

$C_{café} = C_{crema} = 4{,}2\ \dfrac{J}{g°C}$

$\Delta S = ?$

Por calorimetría: $\quad Q_{ganado\ crema} = Q_{perdido\ café}$

$$\Rightarrow M_{crema} \cdot C_{crema} \cdot \Delta T = M_{café} \cdot C_{café} \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow 20{,}0 \text{ g} \times \frac{J}{g°C} \times (T_E - 5°C) = 200 \text{ g} \times \frac{J}{g°C} \times (60°C - T_E)$$

$$\therefore \quad T_{equilibrio} = 32{,}5\ °C \equiv 305{,}5 \text{ K}$$

Luego:

$$\Delta S_{total} = \int_{T_1}^{T_E} m_1 C_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{T_E} m_2 C_2 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \Delta S_{total} = M_{crema} \cdot C_{crema} \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + M_{café} \cdot C_{café} \cdot \ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S_{total} = 20{,}0 \text{ g} \times 4{,}2\ \frac{J}{g°C} \times \ln\left(\frac{305{,}5 \text{ K}}{278 \text{ K}}\right) + 200 \text{ g} \times 4{,}2 \frac{J}{g°C} \times \ln\left(\frac{305{,}5 \text{K}}{333 \text{ K}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S_{total} = 7{,}924\ \frac{J}{°C} + (-72{,}4 \frac{J}{°C})$$

$$\therefore \quad \Delta S_{total} = 64{,}5\ \frac{J}{°C} \equiv 64{,}5\ \frac{J}{K}$$

45. Un mol de un gas monoatómico ideal se somete al ciclo que se muestra en la figura P22.45. El proceso AB es una expansión isotérmica reversible. Calcule a) el trabajo neto hecho por el gas, b) la energía térmica entregada al gas, c) la energía térmica expulsada por el gas, d) la eficiencia del ciclo.

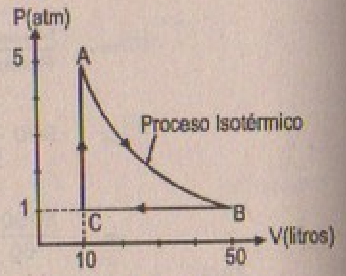


Figura P22.45

Resolución:

Datos: $n = 1{,}00$ mol de gas monoatómico

AB = expansión isotérmica reversible

Parte (a)

$$W_{total} = W_{BC} + \cancel{W_{CA}}^{\,0} + W_{AB} = W_{BC\ (P\,=\,cte)} + W_{AB\ (T\,=\,cte)}$$

Entonces:

$$W_{BC} = P \times \Delta V = 1 \text{ atm} \times (10 - 50) \text{ litros} \times \frac{1{,}013 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}} \times \frac{10^3 \text{cm}^3}{1 \text{ litro}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3}$$

$$\therefore \quad W_{BC} = -4{,}05 \text{ kJ (compresión)}$$

Además: $W_{AB} = nRT \times \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ a $T = $ cte, donde $T_A = T_B = T$

Por otro lado: $P_A . V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{P_A . V_A}{nR}$

Luego: $W_{AB} = nR\left(\frac{P_A . V_A}{nR}\right) \times \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

$$\Rightarrow \quad W_{AB} = 5 \text{ atm} \times 10 \text{ litros} \times \ln\left(\frac{50}{10}\right) \times \frac{1{,}013 \times 10^5 \text{N/m}^2}{1 \text{ atm}} \times \frac{10^3 \text{cm}^3}{1 \text{ litro}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3}$$

$$\therefore \quad W_{AB} = 8{,}152 \text{ kJ (expansión)}$$

En consecuencia:

$$W_{neto} = W_{BC} + W_{AB} = -4{,}05 \text{ kJ} + 8{,}152 \text{ kJ}$$

$$\therefore \quad W_{neto} = 4{,}1 \text{ kJ}$$

Parte (b)

Sabemos que:

$$T_A = T_B = \frac{P_A . V_A}{nR} = \frac{5 \text{ atm} \times 10 \text{ litros}}{1 \text{ mol} \times 0{,}080 \frac{\text{atm . litros}}{\text{mol . K}}} = 609{,}76 \text{ K}$$

$$T_C = \frac{P_C . V_C}{nR} = \frac{1 \text{ atm} \times 10 \text{ litros}}{1 \text{ mol} \times 0{,}080 \frac{\text{atm . litro}}{\text{mol . K}}} = 122 \text{ K}$$

Luego: $Q_{entregado \times gas} = Q_{CA} + Q_{AB} = Q_{CA} + 8{,}152$ kJ

$$Q_{entregado \times gas} = n . C_v \Delta T + 8{,}152 \text{ kJ}$$

$$Q_{entregado \times gas} = 1 \text{ mol} \times \frac{3}{2} R\ (609{,}76 \text{ K} - 122 \text{ K}) + 8{,}152 \text{ kJ}$$

$$\therefore \quad Q_{entregado \times gas} = 14{,}2 \text{ kJ}$$

Parte (c) $Q_{expulsado \times gas} = Q_{BC} = n . C_p . \Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{expulsado \times gas} = 1 \text{ mol} \times \frac{5}{2} R \times (122 \text{ K} - 609{,}76 \text{ K})$$

$$\therefore \quad Q_{expulsado \times gas} = |-10{,}1 \text{ kJ}|$$

Parte (d)

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{Q_{exp.}}{Q_{entrega}} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{10{,}1 \text{ kJ}}{14{,}2 \text{ kJ}}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 28{,}8\%$$

46. Empleando un refrigerador de Carnot ideal, ¿cuánto trabajo se requiere para cambiar 0,50 kg de agua de la llave a 10°C en hielo a –20°C? Suponga que el compartimiento de la congeladora se mantiene en –20°C y que el refrigerador libera calor en un cuarto a 20°C.

Resolución:

Datos: $m_{H_2O} = 0{,}5$ kg $\wedge$ $T_i = 10°C \rightarrow T_f = -20°C$

$W = ?$; $L_{fusión} = 3{,}33 \times 10^5$ J/kg

$$Q_{total\ requerido} = Q_{pierde} + Q_{trans.} + Q_{ganado}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{total\ requerido} = m_{H_2O} . C . (\Delta T) + m_{H_2O} . L_{fusión} + m_{hielo} . C_H . \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad |Q_{total\ requerido}| = |0{,}5 \text{ kg} + 4\,186 \frac{\text{J}}{\text{kg.°C}} . (0 - 10)°C + 0{,}5 \times (3{,}33 \times 10^5) \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$+ (0{,}5) . (2\,030 \frac{\text{J}}{\text{kg.°C}})(-20°C)|$$

$$\therefore \quad Q_{total\ requerido} = 208{,}33 \text{ kJ}$$

Como: $\frac{Q_f}{|Q_c|} = \frac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad |Q_c| = \frac{Q_f \cdot T_c}{T_f}$

$$\therefore \quad |Q_c| = 208{,}33 \text{ kJ} \times \left(\frac{293 \text{ K}}{253 \text{ K}}\right) = 241{,}3 \text{ kJ}$$

En consecuencia: $|W_{requerido}| = -Q_{total\ req.} + |Q_c|$

$$\Rightarrow \quad |W_{requerido}| = |Q_c| - Q_{total\ requerido}$$

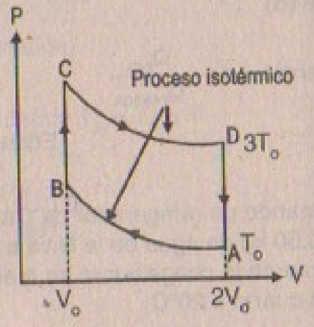
$$\Rightarrow \quad |W_{requerido}| = 241{,}3 \text{ kJ} - 208{,}33 \text{ kJ}$$

$$\therefore \quad |W_{requerido}| = 32{,}97 \text{ kJ}$$

47. La figura P22. 47 representa n moles de un gas ideal monoátomico que sigue un ciclo reversible compuesto de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_0$ y T_0, y dos procesos a volumen constante. En función de n, R y T_0 determine para cada ciclo, a) la energía térmica neta que se transfiere al gas, y b) la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo.

Resolución :

Datos: n, R



Parte (a)

Sabemos que:

$$Q_{total} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

Entonces:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nR\,T_o \ln\left(\frac{V_o}{2\,V_o}\right) \qquad \text{(proceso isotérmico)}$$

$$Q_{BC} = n \cdot C_v\,\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right) \times (3T_o - T_o) \qquad \text{(proceso isovolumétrico)}$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = nR\,(3T_o) \ln\left(\frac{2V_o}{V_o}\right) \qquad \text{(proceso isotérmico)}$$

$$Q_{DA} = n\,C_v\,\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right) \times (T_o - 3T_o) \qquad \text{(proceso isovolumétrico)}$$

En consecuencia:

$$Q_{total} = -nRT_o \ln(2) + 3nRT_o + 3nRT_o \ln(2) - 3nRT_o$$

$$\therefore \quad Q_{total} = 2nRT_o \ln(2)$$

Parte (b)

Sabemos que por la primera ley de la termodinámica:

$$Q_{total} = W_{total} = 2nRT_o \operatorname{Ln}(2)$$

Además:

$$Q_{absorbe} = Q_{BC} + Q_{CD} = 3nRT_o + 3nRT_o \ln(2)$$

Entonces:

$$\text{Eficiencia} = \frac{W_{total}}{Q_{absorbe}} = \frac{2nRT_o \cdot \operatorname{Ln}(2)}{nRT_o\,(3 + 3\operatorname{Ln}(2))}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}273$$

48. Un congelador ideal (de Carnot) tiene una temperatura constante de 260 K, mientras que el aire externo tiene una temperatura constante de 300 K. suponga que el aislamiento del congelador no es perfecto de modo que un poco de calor fluye hacia su interior a razón de 0,15 W. Determine la potencia promedio del motor del congelador necesaria para mantener constante la temperatura del congelador.

Resolución :

Datos: $T_f = 260$ K ; $T_c = 300$ K ; $\frac{|Q_C|}{t} = 0{,}15$ W

Potencia promedio = ?

Sabemos que: Potencia promedio $= \frac{W_{total}}{t} = \frac{|Q_c| - Q_f}{t}$

Por otro lado: $\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c} \Rightarrow Q_f = Q_c \times \frac{T_f}{T_c}$

$$\therefore \quad \frac{Q_f}{t} = \frac{Q_c}{t} \times \frac{T_f}{T_c} = 0{,}15 \text{ W} \times \frac{260 \text{ K}}{300 \text{ K}}$$

En consecuencia:

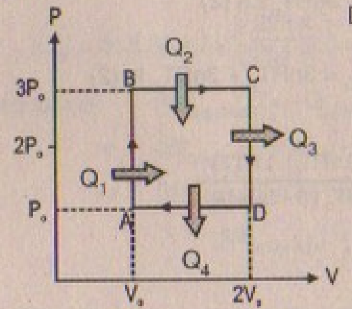
$$\text{Potencia promedio} = \frac{|Q_c|}{t} - \frac{Q_f}{t} = 0{,}15 \text{ W} - 0{,}15 \text{ W}\left(\frac{260}{300}\right)$$

$$\therefore \quad \text{Potencia promedio} = 0{,}02 \text{ watts}$$

49. Un mol de un gas ideal monoatómico se somete al ciclo reversible que se muestra en la figura P22.49. En el punto A, la presión, el volumen y la temperatura son P_0, V_0 y T_0, respectivamente. En función de R y T_0, encuentre a) el calor total que entra al sistema por ciclo, b) el calor total que sale del sistema por ciclo, c) la eficiencia de

una máquina que opera en este ciclo reversible, y d) la eficiencia de una máquina que opera en un ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas extremas.

Resolución:



Datos: "n" moles de gas monoatómico

$T_A = T_0$

$C_V = \frac{3}{2}R$

$C_p = \frac{5}{2}R$

n = 1,00 mol

Parte (a)

$Q_{\text{total que entra}} = Q_{AB} + Q_{BC}$ (según gráfico)

$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que entra}} = n\,C_v\,\Delta T + n\,C_p\,\Delta T \quad \ldots (1)$

Por otro lado:

$$T_B = \frac{3P_o V_o}{nR} \;;\; T_C = \frac{6P_o V_o}{nR} \;;\; T_D = \frac{2P_o V_o}{nR} \;;\; T_A = \frac{P_o V_o}{nR} = T_0$$

Luego de (1):

$$Q_{\text{total que entra}} = n \times \frac{3}{2}R \times \left(\frac{3P_oV_o}{nR} - \frac{P_oV_o}{nR}\right) + n \times \frac{5}{2}R\left(\frac{6P_oV_o}{nR} - \frac{3P_oV_o}{nR}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{entra}} = 3R\,\frac{P_oV_o}{R} + \frac{15}{2}\,\frac{P_oV_o}{R} = 10{,}5\,RT_0 \text{ (ya que: } P_oV_o = RT_o)$$

Parte (b)

$Q_{\text{total que sale}} = Q_{CD} + Q_{DA}$ (según gráfico)

$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que sale}} = n\,C_v\,\Delta T + n\,C_p\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad Q_{\text{total que sale}} = n \times \frac{3}{2}R\left(\frac{2P_oV_o}{nR} - \frac{6P_oV_o}{nR}\right) + n \times \frac{5}{2}R \times \left(\frac{P_oV_o}{nR} - 2\frac{P_oV_o}{nR}\right)$$

$$\therefore \quad Q_{\text{total que sale}} = 8{,}5\,RT_o$$

Parte (c)

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{Q_{\text{total que sale}}}{Q_{\text{total que entra}}} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{8{,}5\,RT_o}{10{,}5\,RT_o}$$

$\therefore \quad$ Eficiencia = 0,190

Parte (d)

$$T_A = \frac{P_o V_o}{nR} \;;\quad T_C = \frac{6\,P_o V_o}{nR} \quad \text{(temperaturas extremas)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_A}{T_C} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{\frac{P_o V_o}{nR}}{\frac{6\,P_o V_o}{nR}}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{1}{6} = 0{,}833$$

50. Un mol de un gas ideal se expande isotérmicamente, a) si el gas duplica su volumen, muestre que el trabajo de expansión es W = RTln2. b) Puesto que la energía interna de U de un gas ideal depende sólo de su temperatura, no hay cambio en U durante la expansión. Se concluye con base en la primera ley que la energía térmica absorbida por el gas durante la expansión se convierte por completo en trabajo. ¿Por qué esto no viola la segunda Ley?

Resolución:

Parte (a)

n = 1 mol ; $V_{\text{inicial}} = V$ $\quad V_{\text{final}} = 2V$; T = cte

por demostrar que: $\quad W = RT\ln(2)$

Sabemos que por la primera ley: $\Delta U = 0 \quad (T = \text{cte})$

$$\Rightarrow \quad Q = W = \int P\,.\,dV = \int \frac{nRT}{V}\,.\,dV \quad (n = 1)$$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{total}} = RT\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV$$

$$\therefore \quad W_{\text{total}} = RT\ln\Big|_V^{2V} = RT\ln(2) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Parte (b)

No viola la segunda ley, porque debido a que no hay aumento o disminución en la temperatura, el aumento o disminución en la entropía sí varía; debido a que hay calor absorbido por el sistema.

En consecuencia:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{1}{T}\,dW = \frac{1}{T}\int RT\,\frac{1}{V}\,dV$$

$$\therefore \quad \Delta S = R.\ln(2) \qquad \text{(no depende de T)}$$

51. Un sistema compuesto de n moles de un gas ideal se somete a un proceso isobárico reversible de un volumen V_0 a un volumen $3V_0$. Calcule el cambio de entropía del gas. (Sugerencia: imagine que el sistema va del estado inicial al estado final primero a lo largo de una trayectoria isotérmica; y después a lo largo de una trayectoria adiabática; no hay cambio de entropía a lo largo de la trayectoria adiabática).

Resolución:

Datos: P = cte ; $V_{inicial} = V_0$; $V_{final} = 3V_0$; $\Delta S = ?$; n moles

Sabemos que en un proceso reversible se cumple que:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T}$$

Por otro lado: Por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = dQ_r - dW$$

$$\Rightarrow \quad dQ_r = dU + dW = n\,C_v\,dT + P.dV$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dQ_r}{T} = \int n.C_v \frac{dT}{T} + \int \frac{nRT}{VT}.dV$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = n\,.\,C_v \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T}\,dT + nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\,dV$$

Por la ley de gases sabemos que:

$$V_0 = \text{cte}\;T_{inicial} \quad \Rightarrow \quad T_{inicial} = \text{cte}\,.\,V_0$$

$$3V_0 = \text{cte}\,.\,T_{final} \quad \Rightarrow \quad T_{final} = \text{cte}\,.\,(3V_0)$$

Luego: $$\Delta S = n\,.\,C_v \ln(T)\Big|_{\text{cte}.V_0}^{\text{cte}.3V_0} + nR\ln(V)\Big|_{V_0}^{3V_0}$$

$$\therefore \quad \Delta S = n\,(C_p - R)\ln(3) + nR\ln(3)$$

$$\therefore \quad \Delta S = n\,C_p \ln(3)$$

52. Una central eléctrica tiene una eficiencia total de 15%. La planta entregará 150 MW de potencia a una ciudad, y sus turbinas utilizan carbón como combustible. El carbón quemado produce el vapor que acciona las turbinas. Este vapor luego se condensa en agua a 25°C al pasar a través de serpentines de enfriamiento que están en contacto con el agua de un río. a) ¿cuántas toneladas métricas de carbón consume la planta diariamente (1 ton métrica = 10^3 kg)? b) ¿Cuál es el costo total del combustible por año si el precio a la entrega es de 8 dólares/ton métrica? c) Si el agua del río se suministra a 20°C, ¿a qué tasa mínima debe fluir sobre los serpentines de enfriamiento para que su temperatura no exceda de 25°C?)(nota: el calor de combustión del carbón es de 33 kJ/g).

Resolución:

Datos: e = 15% ; Potencia de la planta = 150 MW

$c_{comb.carbón} = 33$ kJ/g

Parte (a)

Sabemos que eficiencia = $\dfrac{\text{Potencia}}{\dfrac{Q_{absorbe}}{t}}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}15 = \frac{150\ \mathrm{M}\frac{J}{s}}{\frac{Q_{absorbe}}{t}} = \frac{150\,\frac{MJ}{s}}{\frac{M_{carbón}}{t} \times 33\,\frac{kJ}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M_{carbón}}{t} = \frac{150\,\frac{MJ}{s}}{(0{,}15)\left(33\ \frac{kJ}{g}\right)\left(\frac{10^3 g}{1kg} \times \frac{10^3 kg}{1\ ton}\right)}$$

Luego se consumen en un segundo = 0,03 ton/s

En consecuencia en un día se consumirán = 2 618,2 ton/día

Parte (b)

En un día el costo total del combustible es: 2 618,2 × \$ 8 = \$ 20 945,4

En consecuencia:

En un año el costo total del combustible será:

$20 945,4 × 365 = $ 7 645 083 dólares

Parte (c)

Sabemos que: $\dfrac{Q_{abs/t}}{Q_{f/t}} = \dfrac{T_c}{T_f} = \dfrac{293\ K}{298K}$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_f}{t} = \left(\frac{298\ K}{293K}\right) \times \frac{Q_{abs}}{t} = \frac{298}{293} \times \frac{150\ MJ}{0{,}03 \times 10^6 \times (0{,}15)(33)} = 1{,}03\ kJ/s$$

53. Una planta de potencia, que tiene una eficiencia de Carnot, produce 1 000 MW de potencia eléctrica a partir de turbinas a las que llega el vapor a 500 K y que expulsan agua a 300 K hacia un río que fluye. Si el agua aguas abajo está 6 K más caliente debido a la salida de la planta de potencia, determine la tasa de flujo del río.

53.A Una planta de potencia, que tiene una eficiencia de Carnot, produce una potencia eléctrica P (en MW) a partir de turbinas a las que llega el vapor a T_c, y que expulsan agua a T_f hacia un río que fluye. Si el agua aguas abajo esta ΔT más caliente debido a la salida de la planta de potencia, determine la tasa de flujo del río.

Resolución:

Datos: P = Potencia (en MW) ; T_c ; T_f ; ΔT

Nos piden $\dfrac{dm}{t} = ?$

Sabemos que: $\dfrac{W}{Q_{abs.}} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c}$ (eficiencia de Carnot)

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{W}{t}}{\frac{Q_{abs.}}{t}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{P}{Q_{abs.}} \times t$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido} = \frac{P \times t \times T_c}{T_c - T_f}$$

De la relación: $\dfrac{Q_{abs.}}{Q_{expulsa}} = \dfrac{T_c}{T_f} \Rightarrow Q_{expulsa} = \left| \dfrac{T_f}{T_c} \times \dfrac{P \times t \times T_c}{T_f - T_c} \right|$

Luego: $d_{m_{rio}} \times C_{RIO} \times \Delta T = Q_{expulsa} = \dfrac{T_f \times P \times t}{t(T_f - T_c)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm_r}{t} \times C_{rio} \times \Delta T = \frac{T_f \times P \times t}{t(T_f - T_c)}$$

$$\therefore \quad \text{Tasa del flujo} = \left| \frac{dm_r}{t} \right| = \frac{T_f \times P}{|T_f - T_c| \cdot C_{rio}} \times \frac{1}{\Delta T}$$

54. Suponga que usted trabaja en una oficina de patentes y que una inventora llega con usted afirmando que su máquina térmica, la cual emplea agua como sustancia de trabajo, tiene una eficiencia termodinámica de 0,61. Ella explica que la máquina opera entre depósitos de calor a 4°C y 0°C. Es un dispositivo muy complicado, con muchos émbolos, engranes y poleas, y el ciclo implica congelación y fusión. ¿Su afirmación de que e = 0,61 amerita una seria consideración? Explique.

Resolución:

Datos: $e = 0,61 \quad T_f = 0°C = 273\ K$

$T_c = 4°C = 277\ K$

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{Q_f}{Q_c}$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia } (e) = 1 - \frac{273\ K}{277\ K}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia } (e) = 0,01$$

Conclusión:

Al afirmar la inventora que la máquina termodinámica tiene una eficiencia de 0,61 que es mucho mayor a la eficiencia (0,01) no está considerando realmente las pérdidas de energía por fricción, en los embolos, engranajes y poleas.

55. Una máquina diesel idealizada opera en un ciclo conocido como el *ciclo diesel de aire estándar*, que se muestra en la figura P22.55. El combustible se rocía dentro del cilindro en el punto de máxima comprensión, B. La combustión ocurre durante la expansión B→C, la cual se aproxima como un proceso isobárico. El resto del ciclo es el mismo que en el motor de gasolina, descrito en la figura 22.11. Demuestre que la eficiencia de una máquina que opera en este ciclo diesel idealizado es

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

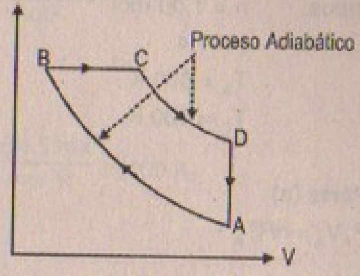


Figura P22.55

Resolución:

Por demostrar que:

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)$$

Sabemos que: Eficiencia (e) = $\dfrac{W_{total}}{Q_{absorbe}}$

Por otro lado: $W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

Entonces: $W_{AB} = -\Delta U_{AB} = n\,C_v\,(T_A - T_B)$

$W_{BC} = \int P\,.\,dV = n\,C_p\,(T_C - T_B) - n\,C_v\,(T_C - T_B)$

$W_{CD} = n\,C_v\,(T_C - T_D)$

Luego: $W_{total} = n\,C_v\,(T_A - T_B) + n\,(T_C - T_B)(C_p - C_v) + n\,C_v\,(T_C - T_D)$ ... (1)

Por otro lado: $Q_{total\ que\ absorbe} = Q_{BC} \quad (T_C > T_B)$

$\Rightarrow \quad Q_{total\ que\ absorbe} = n\,C_p\,(T_C - T_B)$

De (1): $W_{total} = n\,C_p\,(T_C - T_B) + n\,C_v\,(T_A - T_D)$

Entonces: Eficiencia (e) = $\dfrac{n\,C_p\,(T_C - T_B) + n\,C_v\,(T_A - T_D)}{n\,C_p\,(T_C - T_B)}$

$$\Rightarrow \quad e = 1 + \frac{C_v}{C_p}\frac{(T_A - T_D)}{(T_C - T_B)}$$

Como: $\dfrac{C_p}{C_v} = \gamma$

En consecuencia:

$$\text{Eficiencia } (e) = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

56. Un mol de un gas ideal ($\gamma = 1{,}4$) se somete al ciclo de Carnot descrito en la figura 22.9. En el punto A, la presión es de 25 atm y la temperatura de 600 K en el punto C, la presión es 1atm y la temperatura es 400 K. a) Determine las presiones y volúmenes en los puntos A, B, C y D. b) Calcule el trabajo neto efectuado por ciclo. c) Determine la eficiencia de una maquina que opera en este ciclo.

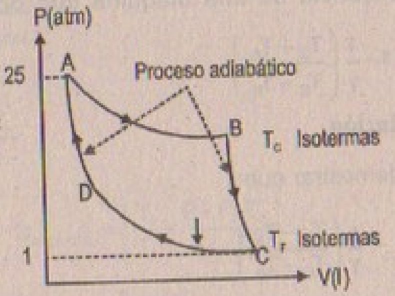
Resolución :

Datos: $n = 1{,}00$ mol

$\gamma = 1{,}4$

$T_A = 600$ K

$T_C = 400$ K



Parte (a)

$P_A V_A = nRT_A$

$$\Rightarrow \quad 25 \text{ atm} \times V_A = 1 \text{ mol} \times 0{,}082\ \frac{\text{atm. litro}}{\text{mol.K}} \times (600 \text{ K})$$

$$\therefore \quad V_A = 1{,}97 \text{ litros}$$

$P_c \cdot V_c = nRT_c$

$$\Rightarrow \quad 1 \text{ atm} \,.\, V_c = 1 \text{ mol} \times 0{,}082\ \frac{\text{atm . litros}}{\text{molK}} \times 400 \text{ K}$$

$$\therefore \quad V_c = 32{,}8 \text{ litros}$$

En un proceso adiabático se cumple que: $P_A \,.\, V_A^{\gamma} = P_D \cdot V_D^{\gamma}$

además: $T_A \,.\, V_A^{\gamma-1} = T_D \,.\, V_D^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad 600 \text{ K} (1{,}97 \text{ litros})^{1{,}4-1} = 400 \text{ K} \,.\, (V_D)^{1{,}4-1}$$

$$\therefore \quad V_D = 5{,}43 \text{ litros}$$

Luego: $T_B \,.\, V_B^{\gamma-1} = T_C \,.\, V_C^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \quad 600 \text{ K} \,.\, V_B^{0{,}4} = 400 \text{ K} (32{,}8)^{0{,}4}$$

$$\therefore \quad V_B = 11{,}9 \text{ litros}$$

En consecuencia:

$$V_A = 1{,}97 \text{ litros} \,;\, V_B = 11{,}9 \text{ litros} \,;\, V_C = 32{,}8 \text{ litros} \,;\, V_D = 5{,}43 \text{ litros}$$

Hallando las presiones: $P_B \cdot V_B = nRT_B$

$$\Rightarrow \quad P_B \,.\, (11{,}9 \text{ litros}) = 1 \text{ mol} \times (0{,}082)\ (600 \text{ K}) \times \frac{1 \text{ atm}}{\text{litros. mol.K}}$$

$$\therefore \quad P_B = 4{,}13 \text{ atm}$$

$P_C \cdot V_C = nRT_c$

$$\Rightarrow \quad P_C\ (32{,}8 \text{ litros}) = 1{,}00 \text{ mol} \times 0{,}082\ \frac{\text{atm} \times \text{litros}}{\text{molK}} \,.\, 400 \text{ K}$$

$$\therefore \quad P_C = 1{,}00 \text{ atm}$$

$P_D \cdot V_D = nRT_D$

$$\Rightarrow \quad P_D\ (5{,}43 \text{ litros}) = 1{,}00 \text{ mol} \times \left(0{,}082 \frac{\text{atm. litros}}{\text{mol.K}}\right) (400 \text{ K})$$

$$\therefore \quad P_D = 6{,}04 \text{ atm}$$

En consecuencia:

$$P_A = 25 \text{ atm} \,;\, P_B = 4{,}13 \text{ atm} \,;\, P_C = 1{,}00 \text{ atm} \,;\, P_D = 6{,}04 \text{ atm}$$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = 0 = Q_{total} - W_{total}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = Q_{total} = Q_{AB} + Q_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = W_{AB} + W_{CD}$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = n\,RT_B \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W_{total} = 8{,}31 \times (600) \ln\left(\frac{11{,}9}{1{,}97}\right) + 8{,}31 \times (400) \ln\left(\frac{5{,}43}{32{,}8}\right)$$

$$\therefore \quad W_{total} = 2{,}99 \text{ kJ}$$

Parte (c)

Sabemos que: $\text{Eficiencia} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad \Rightarrow \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{400 \text{ K}}{600 \text{ K}}$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia} = 0{,}333 \text{ ó } 33{,}3\%$$

57. Un humano común tiene una masa de 70 kg y produce cerca de 2 000 kcal ($2{,}0 \times 10^6$ cal) de calor metabólico diariamente. a) Encuentre la tasa de producción de calor en watts y en calorías por hora. b) Si no hubiera pérdida del calor metabólico y suponiendo que el calor específico del cuerpo humano es 1,0 cal/g.°C, encuentre la tasa a la cual aumentaría la temperatura del cuerpo. Proporcione su respuesta en °C por hora y en °F por hora.

Resolución:

Datos: $M_{humano} = 70 \text{ kg}$

$Q_{humano} = 2,0 \times 10^6 \text{ cal}$

Parte (a)

$$\text{Tasa de producción en watts} = \frac{Q_{humano}}{t} = 2,0\times10^6\,\text{cal}\times\left(\frac{4,186\text{ J}}{1\text{cal}}\right)/24\text{ h}\times\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}$$

$\therefore$ Tasa de producción = 96,9 W

$$\text{Tasa de producción en cal}\times\text{h} = \frac{Q_{humano}}{t} = \frac{2,0\times10^6\text{cal}}{24\text{ h}} = 8,33\times10^4\,\frac{\text{cal}}{\text{h}}$$

Parte (b)

$$\frac{Q_{humano}}{t} = \frac{m_{humano}\cdot C\cdot dT}{t} \Rightarrow \frac{2,0\times10^6\text{cal}}{24\text{ h}} = 7\times10^4\text{g}\times\frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}\times\frac{dT}{t}$$

$$\therefore \frac{dT}{t} = 1,19\frac{°\text{C}}{\text{h}} \quad \text{(en grados Celsius)}$$

En grados Fahrenheit:

$$\frac{dT}{t} = 1.19\,\frac{°\text{C}}{\text{h}}\times\left(\frac{212°\text{F}}{100°\text{C}}\right) = 2,52\text{ °F/h}$$

58. Suponga que 1,00 kg de agua de 10,0°C se mezcla con 1,00 kg de agua a 30,0°C a presión constante. Cuándo la mezcla ha alcanzado el equilibrio, a) ¿Cuál es la temperatura final? b) Considere $C_p = 4,19$ kJ/kg.K para el agua y muestre que la entropía del sistema aumenta en

$$\Delta S = 4,19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\text{kJ/K}$$

c) Compruebe numéricamente que $\Delta S > 0$. d) ¿La mezcla es un proceso irreversible?

Resolución:

Datos: $m_{H_2O} = 1,00 \text{ kg}$ a $T_{agua} = 10°\text{C}$; $C_{agua} = \frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}$

$m_{H_2O} = 1,00 \text{ kg}$ a $T_{agua} = 30°\text{C}$

Parte (a)

Por calorimetría: $Q_{ganado} = Q_{perdido}$

$$\Rightarrow m_{H_2O}\times C\times\Delta T = m_{H_2O}\cdot C\,\Delta T \Rightarrow T_E - 10 = 30 - T_E$$

$$\therefore T_{equilibrio} = 20°\text{C}$$

Parte (b)

Por dato: $C_p = 4,19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$; $m_1 = m_2$; $c_1 = c_2$

Por demostrar que: $\Delta S = 4,19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

Sabemos que: $\Delta S = m_1C_1\int_{T_1}^{T_E}\frac{dT}{T} + m_2C_2\int_{T_2}^{T_E}\frac{dT}{T}$

$$\Rightarrow \Delta S = m_1C_1\ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + m_2C_2\ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S = m_1C_1\left[\ln\left(\frac{T_E}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T_E}{T_2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \Delta S = m_1\cdot C_1\ln\left[\left(\frac{T_E}{T_1}\right)\left(\frac{T_E}{T_2}\right)\right]$$

Como: $m_1 = m_2 = 1,00 \text{ kg}$; $C_1 = C_2 = \frac{1\text{ cal}}{\text{g.°C}}$

$T_1 = 10°\text{C}$; $T_2 = 30°\text{C}$; $T_E = 20°\text{C}$

Sabemos que: $n = \frac{m}{M} = \frac{1\,000\text{ g}}{18\text{ g/mol}}$

Reemplazando datos:

$$\Delta S = 10^3\text{ g}\times\frac{1\text{ cal}}{\text{g°C}}\times\frac{(4,186\text{ J})}{1\text{ cal}}\ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$\therefore \Delta S = 4,19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

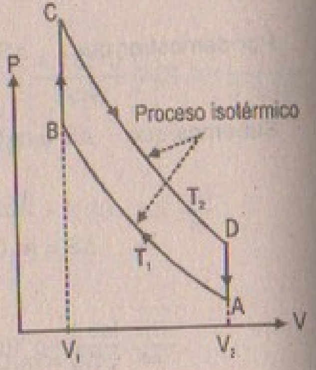
Parte (c)

Sabemos que: $\Delta S = 4,19\ \ln\left[\left(\frac{293}{283}\right)\left(\frac{293}{303}\right)\right]$

$$\therefore \Delta S = 0,004\text{ kJ/K} > 0$$

La mezcla sí es un proceso irreversible, pero que se puede tratar o interpretar como un proceso reversible.

59. La máquina Stirling descrita en la figura P22.59 opera entre las isotermas T_1 y T_2, donde $T_2 > T_1$. Suponga que el gas de operación es un gas monoatómico ideal, calcule la eficiencia de una máquina cuyo proceso a volumen constante ocurre a los volúmenes V_1 y V_2.



Resolución:

Sabemos que:

$$W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

Entonces: $$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$$

$$W_{BC} = 0$$

$$W_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

$$W_{DA} = 0$$

Luego: $$W_{total} = nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Por otro lado: $$Q_{total} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{AB} = nRT_1 . \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0 \quad \text{(libera)}$$

$$Q_{BC} = nC_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) > 0 \quad \text{(absorbe)}$$

$$Q_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0 \quad \text{(absorbe)}$$

$$Q_{DA} = nC_v(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2) < 0 \quad \text{(libera)}$$

Luego: $$Q_{total\ que\ absorbe} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Como $$\text{Eficiencia} = \frac{W_{total}}{Q_{absorbe}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia (e)} = \frac{2nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{3nR(T_2 - T_1) + 2nRT_2\ln(V_2/V_1)}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia (e)} = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{3(T_2 - T_1) + 2T_2\ln(V_2/V_1)}$$

60. Suponga que una máquina térmica está conectada a dos depósitos de calor, uno con aluminio fundido (660°C), y el otro es un bloque de mercurio sólido (–38,9°C). La máquina funciona congelando 1,00 g de aluminio y fundiendo 15,0 g de mercurio durante cada ciclo. El calor latente de fusión del aluminio es $3,97 \times 10^5$ J/kg, y el de mercurio es $1,18 \times 10^4$ J/kg. a) ¿Cuál es la eficiencia de esa máquina? b) ¿Cómo se compara esta eficiencia con la de una máquina de Carnot?

Resolución:

Datos: $T_{aluminio} = 660°C$; $m_{Al} = 1,00$ g ; $L_{Al} = 3,97 \times 10^5$ J/kg

$T_{mercurio} = -38,9°C$; $m_{Hg} = 15,0$ g ; $L_{Hg} = 1,18 \times 10^4$ J/kg

Parte (a)

$$Q_{requerido/cong.aluminio} = Q_{liberado} = m_{Al} \times L_{Al}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{liberado} = 1,00 \times 10^{-3}\ \text{kg} \times 3,97 \times 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\therefore \quad Q_{liberado} = 397\ \text{J}$$

$$Q_{requerido/fundir\ mercurio} = Q_{absorbido} = m_{Hg} \times L_{Hg}$$

$$\Rightarrow \quad Q_{absorbido} = 15 \times 10^{-3}\ \text{kg} \times 1,18 \times 10^4\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\therefore \quad Q_{absorbido} = 177\ \text{J}$$

Entonces: $Q_{libera\ aluminio}$: lo absorbe la máquina térmica

$Q_{absorbe\ mercurio}$: lo libera la máquina térmica

En consecuencia:

$$e = 1 - \frac{Q_{liberado}}{Q_{absorbido}} \quad \Rightarrow \quad e = 1 - \frac{177\ \text{J}}{397\ \text{J}}$$

$$\therefore \quad \text{Eficiencia (e)} = 0,554$$

Parte (b)

$$\text{Eficiencia (máquina de Carnot)} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eficiencia (Maq. Carnot)} = 1 - \frac{(273 - 38,9)\text{K}}{(660 + 273)\text{K}}$$

Conclusión:

Eficiencia (Máq. Carnot) = 0,75

La máquina de Carnot es más eficiente que esta máquina.

61. Un gas sigue el proceso cíclico descrito en la figura P22.61. a) si Q es negativa en el proceso BC, y ΔU es negativa en el proceso CA, determine los signos de Q, W y ΔU asociados a cada proceso. b) Encuentre el calor neto trasferido al sistema durante un ciclo completo. c) Si se invierte el ciclo, es decir, si el proceso sigue la trayectoria ACBA, ¿Cuál es el calor neto transferido por el ciclo?

Resolución :

Parte (a)

Por dato:

$Q_{BC} < 0$ y $\Delta U_{CA} < 0$

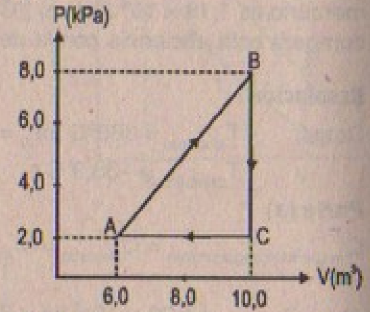


Figura P22.61

Según gráfico: por la primera ley de la termodinámica:

C → A: $\Delta U_{CA} = Q_{CA} - W_{CA}$

$\Rightarrow (-) = Q_{CA} - (-) \quad \therefore \quad Q_{CA} = (-) < 0$

$W_{CA} = (-) < 0$ (compresión)

A → B: $\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB}$

$\Rightarrow (+) = Q_{AB} - (+) \quad \therefore \quad Q_{AB} = (+) > 0$

$W_{AB} = (+) > 0$ (expansión)

$\Delta U_{AB} = (+) > 0 \quad (T_B > T_A)$

B → C: $\Delta U_{BC} = Q_{BC} - 0$

$\Rightarrow \Delta U_{BC} = Q_{BC} \quad \therefore \quad Q_{BC} = (-) < 0$

$W_{BC} = 0$

$\Delta U_{BC} = (-) < 0 \quad (T_C < T_B)$

Parte (b)

Por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U_{total} = 0 = Q_{neto} - W_{neto}$$

Luego: $Q_{neto} = W_{neto} = W_{CA} + W_{AB} + \cancel{W_{BC}}^{\,0}$

$W_{CA} = P \,.\, \Delta V = (2,0)(6-10) = -8,0$ kJ

$W_{AB} = \text{Área}_{\text{trapecio}} = (2+8)/2 \,.\, (4) = 20,0$ kJ

En consecuencia: $Q_{neto} = -8,0$ kJ $+ 20,0$ kJ $= 12,0$ kJ

Parte (c) $Q_{neto} = W_{neto} = W_{AC} + W_{CB} + W_{BA}$

$W_{AC} = 2,0\,(10-6) = 8$ kJ (expansión)

$W_{CB} = 0 \quad (V = \text{cte})$

$W_{BA} = \text{trapecio} = \dfrac{(2+3)}{2} \times (4) = -20$ kJ (compresión)

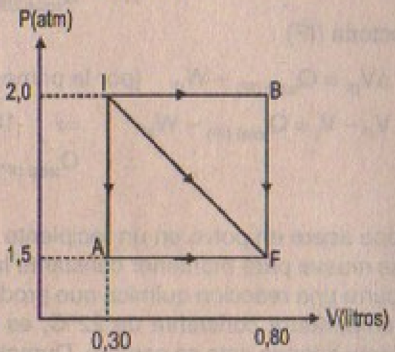
$\therefore \quad Q_{neto} = -20$ kJ $+ 8$ kJ $= |-12$ kJ$|$

62. Un mol de gas está inicialmente a una presión de 2,0 atm y a un volumen de 0,30 L y tiene una energía interna igual a 91 J . En su estado final el gas tiene una presión de 1,5 atm y un volumen de 0,80 L y su energía interna es igual a 180 J. Para las trayectorias IAF, IBF e IF en la figura P22.62, calcule a) El trabajo realizado por el gas, b) El calor neto transferido al gas en el proceso.

Resolución :

$U_i = 91$ J

$U_f = 182$ J



Parte (a)

- Trayectoria (IAF)

$W_{total} = W_{IA} + W_{AF} = 0 + W_{AF}$

$\therefore \quad W_{total} = 1,5 \times (0,80 - 0,3)\ \text{atm . L} \times \left(\dfrac{1,013\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)\times\left(\dfrac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3}\right)$

$\therefore \quad W_{total}\,(\text{IAF}) = 76$ J

- Trayectoria (IBF)

$W_{total} = W_{IB} + W_{BF} = W_{IB} + 0$

$\Rightarrow \quad W_{total} = 2,0\ \text{atm} \times (0,80 - 0,3)\ \text{L} \times \left(\dfrac{1,013\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)\times\left(\dfrac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3}\right)$

$\therefore \quad W_{total}\,(\text{IBF}) = 101,3$ J

- Trayectoria (IF)

$W_{total} = \text{Área}_{\text{trapecio}} = (1,5+2)\times\dfrac{(0,80-0,30)}{2}\ \text{atm . L}\times\left(\dfrac{1,013\times10^5\ \text{N/m}^2}{1\ \text{atm}}\right)\times\left(\dfrac{1\ \text{m}^3}{10^6\ \text{cm}^3}\right)$

$\therefore \quad W_{total}\,(\text{IF}) = 88,64$ J

Parte (b)

Trayectoria (IAF)

$Q_{total} = Q_{IA} + Q_{AF}$ $\qquad$ $Q_{IA} = \Delta U_{IA} = n\,C_v\,(T_A - T_I)$

Pero por la primera ley de la termodinámica:

$\Delta U_{IAF} = Q_{total\ (IAF)} - W_{(IAF)}$

$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IAF)} - W_{(IAF)} \quad \Rightarrow \quad 180 - 91 = Q_{total(IAF)} - 76$

$\therefore \quad Q_{total\ (IAF)} = 165\ J$

Trayectoria (IBF)

$\Delta V_{IBF} = Q_{total\ (IBF)} - W_{(IBF)}$ $\quad$ (por la primera ley)

$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IBF)} - 101{,}3\ J \quad \Rightarrow \quad 180\ J - 91\ J = Q_{total\ (IBF)} - 101{,}3\ J$

$\therefore \quad Q_{total(IBF)} = 190{,}3\ J$

Trayectoria (IF)

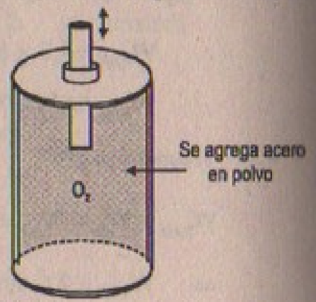
$\Delta V_{IF} = Q_{total\ (IF)} - W_{IF}$ $\quad$ (por la primera ley)

$\Rightarrow \quad V_F - V_I = Q_{total\ (IF)} - W_{IF} \quad \Rightarrow \quad 180\ J - 91\ J = Q_{total\ (IF)} - 88{,}64\ J$

$\therefore \quad Q_{total\ (IF)} = 177{,}64\ J$

63. Se pone acero en polvo en un recipiente lleno de oxígeno y provisto de un émbolo que se mueve para mantener constante la presión de una atmósfera en el recipiente. Ocurre una reacción química que produce calor. Para mantener los contenidos a una temperatura constante de 22°C, es necesario extraer $8{,}3\times10^5$ J de calor del recipiente cuando éste se contrae. Durante la reacción química se encuentra que se consumen 1,5 moles de oxígeno. Encuentre el cambio de la energía interna para el sistema de hierro y oxígeno.

Resolución:



Se agrega acero en polvo.

Datos: $\quad P = 1{,}00$ atm

$T = 22°C = 295\ K$

$Q_{extrae} = 8{,}3 \times 10^5\ J$

$n = 1{,}5$ moles que se consumen

Sabemos que por la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

Como: $\quad Q = Q_{extraído} = -8{,}3 \times 10^5\ J$

$$W = \int P\,dV = nRT \int \frac{1}{V} dV = 0 \quad (V = cte)$$

En consecuencia: $\qquad \Delta U = -8{,}3 \times 10^5\ J$

ISBN 9972-34-254-9
9789972342547

Editorial San Marcos
Av. Garcilaso de la Vega 974 Lima. Telefax: 424-6563
Jr. Natalio Sánchez 220 of. 304. Jesús María, Lima. Ventas-telf.: 423-1297
(alt. cdra. 5 Av. Arenales)Telefax: 330-8553 / 332-0153
E-mail: san-marcos@terra.com.pe