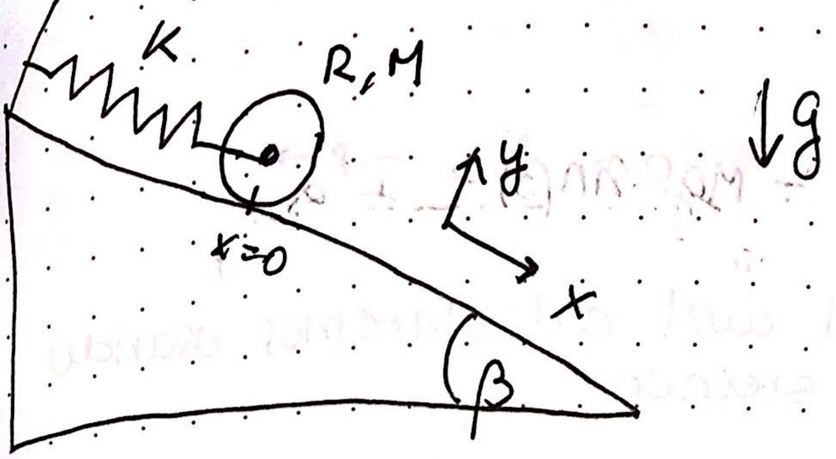
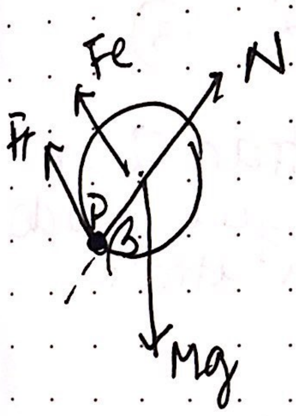
SOLUCIÓN P2 AUX 6



a) Nos piden la ecuación de movimiento, por lo que necesitamos usar suma de fuerzas y torques:



En $\hat{x}$:

$$\sum F_x = -F_e - F_r + Mg\sin\beta = M\ddot{x} \quad (1)$$

En $\hat{y}$

$$\sum F_y = N - Mg\cos\beta = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow N = Mg\cos\beta$

No se mueve en $\hat{y}$.

Haremos suma de torques en el punto de contacto con el plano inclinado P:

$$\sum \vec{\tau}_p = I^P \alpha$$

$$\vec{\tau}_{Mg} + \cancel{\vec{\tau}_{Fr}}^{\,0} + \cancel{\vec{\tau}_{N}}^{\,0} + \vec{\tau}_{Fe} = I^P \alpha$$

- $\vec{\tau}_{Mg} = R\hat{y} \times (Mg\sin\beta\,\hat{x} - Mg\cos\beta\,\hat{y})$

$$= -RMg\sin\beta\,\hat{z}$$

• $\vec{\tau}_{Fe} = R\hat{y} \times (-Kx)\hat{x}$

$= +RKx\hat{z}$

$\Rightarrow \sum \vec{\tau}_p = \hat{z}(RKx - MgR\sin\beta) = I^P\vec{\alpha}$

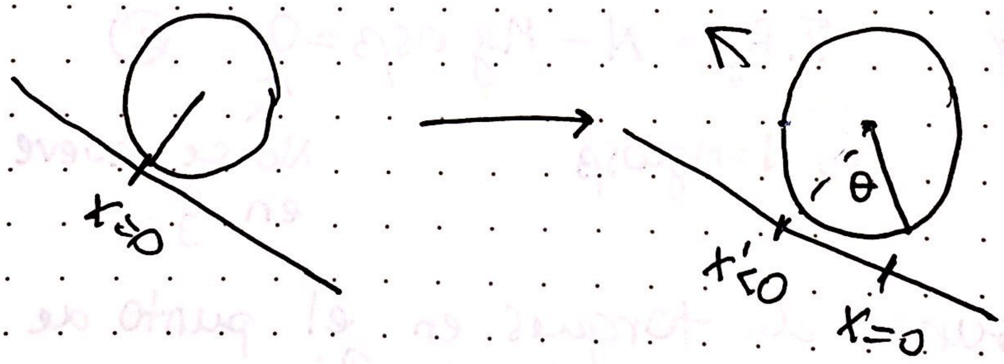
Nos falta I^P, el cual calcularemos usando el teorema de steiner

$$I^P = I_{CM} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$I^P = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow (RKx - MgR\sin\beta)\hat{z} = \frac{3M}{2}R^2\vec{\alpha} \quad (3)$$

Para concluir necesitamos encontrar $\vec{\alpha}$ en función de x. Notemos que cuando θ crece el disco se mueve hacia atrás:



$$\Rightarrow -x = R\theta \Rightarrow \ddot{x} = -R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \alpha = -\frac{\ddot{x}}{R}$$

Reemplazando en (3)

$$\Rightarrow RKx - MgR\sin\beta = -\frac{3MR^{\cancel{2}}}{2}\frac{\ddot{x}}{\cancel{R}}$$

$$Kx - Mg\sin\beta = -\frac{3M}{2}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2K}{3M}x - \frac{2g}{3}\sin\beta = 0}$$

b) En la ecuación anterior renombramos

$$\frac{2K}{3M} = \omega_0^2 \quad y \quad \frac{2g}{3}\sin\beta = \delta'$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x - \delta' = 0$$

De esta forma hacemos el cambio de variable propuesto $\bar{x} = x - \delta'/\omega_0^2 \Rightarrow \ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$

Por lo que la ecuación de mov. termina siendo

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0$$

La cual tiene como solución general

$$\bar{x} = A \sin(\omega_0 t + \delta) = x - \delta'/\omega_0^2$$

$$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta) + \delta'/\omega_0^2$$

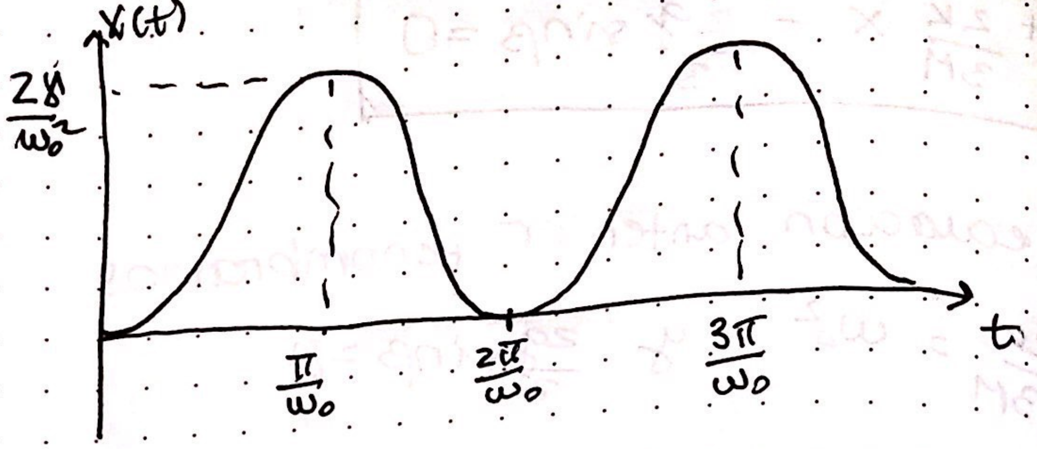
c) si $x(0) = 0$ y $\phi_0 = \delta = -\pi/2$, notando que $\sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow x(t) = -A\cos(\omega_0 t) + \delta'/\omega_0^2$$

Usemos la cond. inicial

$$x(0) = -A + \delta'/\omega_0^2 = 0 \Rightarrow A = \delta'/\omega_0^2$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\delta'}{\omega_0}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)$$


x(t)
2γ/ω₀²
π/ω₀
2π/ω₀
3π/ω₀
t