1) **Demostración 1.** Para cada punto en el plano Z existe un coeficiente de amortiguamiento asociado. Ese coeficiente no depende de la frecuencia de muestreo.

Como sabemos, un punto en el plano *z*, está relacionado con un punto en el plano *s* a través de la siguiente ecuación:

$$z = e^{sT} \qquad (1)$$

Donde *T* es el período de muestreo. Por lo tanto, un polo en el plano s, como el que se encuentra en la Fig. 1, puede llevarse a z como:

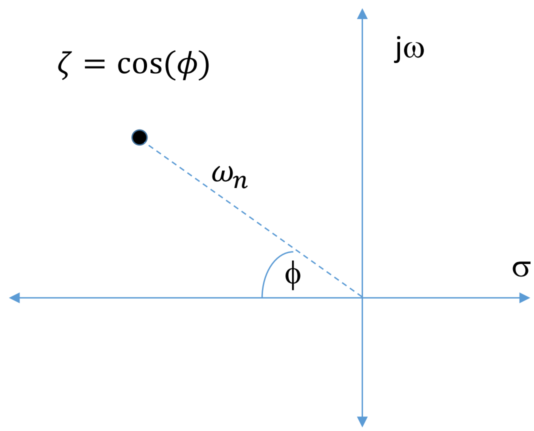

Fig. 1

$$z = e^{-\omega_n \zeta T} e^{j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}} = re^{j\theta} \qquad (2)$$

El punto z se muestra en la Fig. 2.

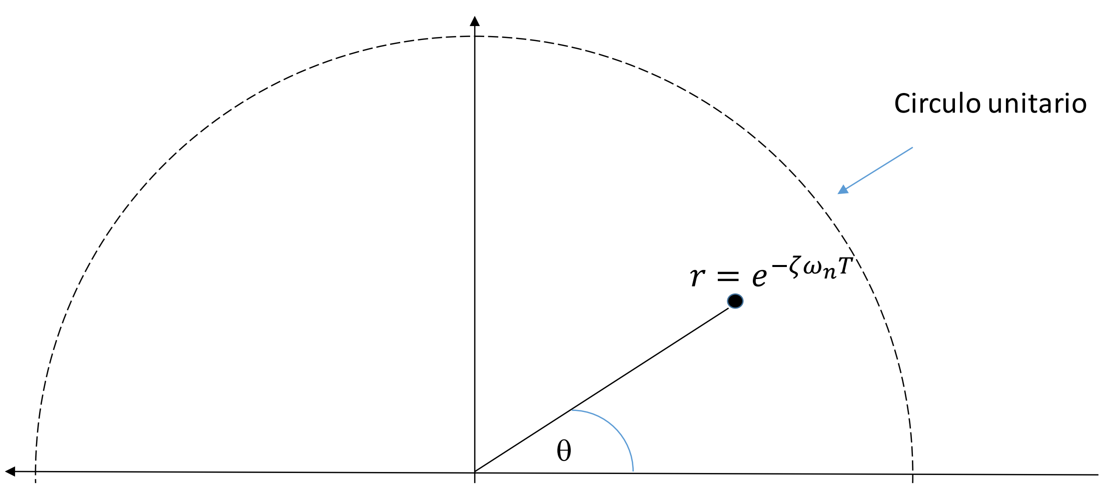

Fig. 2

El valor de ω_n se puede obtener en función de ζ utilizando:

$$e^{-\omega_n \zeta T} = r \quad \rightarrow \quad -\omega_n \zeta T = \ln(r) \quad \rightarrow \quad \omega_n = -\frac{1}{T\zeta}\ln(r) \tag{3}$$

La ecuación del ángulo se puede escribir como:

$$\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} = \theta \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{T\zeta} T \ln(r)\sqrt{1-\zeta^2} = \theta \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\theta}{\ln(r)} \tag{4}$$

Despejando ζ se tiene:

$$\frac{1}{\zeta^2} - 1 = \left(\frac{\theta}{\ln(r)}\right)^2 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{\ln(r)}\right)^2}} \tag{5}$$

Como puede verse en (5), el coeficiente de amortiguamiento en Z, no depende del tiempo de muestreo. Es decir si aumentamos o disminuimos *T*, un punto $z = \sigma_z \pm j\omega_z$ tendrá el mismo valor de ζ. Recuerde que estamos asumiendo que se cumple con el teorema del muestreo de Shannon y no se está considerando *aliasing* en esta demostración. El teorema de Shannon indica que el componente jω del punto en la Fig. 1 (que se define habitualmente como la frecuencia natural amortiguada), debe ser menor a la mitad de la frecuencia de muestreo. El ángulo θ se mide entre -π y π.

Suponiendo ahora que nos encontramos operando con un ángulo $\theta = 0$ y r=0.5, es decir nos encontramos en el eje real positivo de z. De (5) concluimos que tenemos un coeficiente de amortiguamiento de 1 para cualquier punto en el eje real positivo de z (dentro del círculo unitario).

Asumamos ahora que tenemos un punto en el eje real negativo de z, por ejemplo r=0.5 y un ángulo $\theta = \pi$. n este caso el coeficiente de amortiguamiento es de ζ=0.21545.

Debido a que el ángulo es π para todos los punto ubicados en el eje real negativo, es fácil comprobar por inspección de (5) que muchos de esos puntos tendrán un coeficiente de amortiguamiento reducido a menos que *r* sea cercano a cero.

1) **Demostración 2.** Para cada punto en el plano Z existe una frecuencia natural asociada que es directamente proporcional a la frecuencia de muestreo utilizada.

Debemos reescribir (3), utilizando

$$e^{-\omega_n \zeta T} = r \quad \rightarrow \quad -\omega_n \zeta T = \ln(r) \quad \rightarrow \quad \zeta = -\frac{1}{T\omega_n}\ln(r) \tag{6}$$

$$\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} = \theta \quad \rightarrow \quad \omega_n T\sqrt{1-\left(\frac{1}{T\omega_n}\ln(r)\right)^2} = \theta \quad \rightarrow \quad \sqrt{(\omega_n T)^2 - (\ln(r))^2} = \theta \tag{7}$$

Despejando la frecuencia natural se tiene:

$$\omega_n = \frac{1}{T}\sqrt{\theta^2 + (\ln(r))^2} \tag{8}$$

Alternativamente la expresión (8) se puede escribir en función de la función de la frecuencia de muestreo (en rad/sec) como:

$$\omega_n = \frac{\omega_s}{2\pi}\sqrt{\theta^2 + (\ln(r))^2} \tag{9}$$

Por lo tanto es fácil de concluir que para ángulos cercanos a π, y considerando el mismo valor de r, la frecuencia natural es mayor. Sin embargo, como se demostró en (5), para estos ángulos, el coeficiente de amortiguamiento es menor.