Auxiliar 3 - Dividir para reinar y ecuaciones de recurrencia

Profesores: Jérémy Barbay
Patricio Poblete, Nelson Baloian
Auxiliares: Felipe Lizama, F. Giovanni Sanguineti,
Matías Ramírez, Sven Reisenegger.

P1. P1 a control 1 primavera 2018

Cotas: ¿Verdadero o Falso? (Justifica cada respuesta.)

(a) $n^2 + 10000n \in O(n^2)$

(b) $n^{3.00001} \in O(n^3)$

(c) $n^2 - n \in \Omega(n^2)$

(d) $n^{2.99999} \in \Omega(n^3)$

(e) $2^{n+1} \in O(2^n)$

(f) $(n+1)! \in \Omega(n!)$

(g) $4^{\log n} \in \Theta(n^2)$

(h) $\log(n^2) + \lg n \in \Theta(\lg n^3)$

(i) $2^{2n} \in O(2^n)$

P2. P1 control 1 otoño 2018

Para cada ecuación recursiva, indica a qué categoría pertenece (lineal de primer orden, lineal con coeficientes constantes, no lineal tipo Teorema Maestro) y el orden asintótico más ajustado de su solución:

(a) $T(n) = 3 * T(n-1) + 4 * T(n-2), \forall n \geq 2,\ T(0) = T(1) = 1$

(b) $T(n) = 2T(n/2) + n, \forall n > 0,\ T(0) = 1$

(c) $T(n) = T(n/2) + 1, \forall n > 0,\ T(0) = 1$

P3. Stooge Sort

Stooge sort es un algoritmo muy poco eficiente para ordenar una secuencia de números. El objetivo de este problema es analizar qué tan malo es el algoritmo. Este algoritmo funciona de la siguiente manera:

(a) Si el valor en el índice 0 es mayor que el valor en el último índice, entonces intercambia ambos valores.

(b) Recursivamente:

   i. Ordena los primeros 2/3 del arreglo con stoogeSort

   ii. Ordena los últimos 2/3 del arreglo con stoogeSort

iii. Ordena los primeros 2/3 del arreglo con stoogeSort

Escriba la ecuación de recurrencia para este algoritmo y luego resuélvala.

P4. Algoritmo de Strassen

Para obtener el producto P de dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se pensaba que la única forma era calcular $p_{ij} = \Sigma_k^n \, a_{ik} \, b_{kj}$, como seguro recordará de su curso de Álgebra Lineal.

(a) Formule la ecuación de recurrencia. *El orden del algoritmo es de la forma* $O(n^k)$.

Si se toma n como potencia de 2, y se dividen las matrices en cuadrantes, se puede demostrar (al menos, Strassen pudo) que hay un conjunto de 7 elementos ($\{M_1, \ldots, M_7\}$) formados por productos de combinaciones de los 8 cuadrantes de A y B. Estos elementos forman una base a partir de la cual se pueden obtener los cuadrantes del resultado P. Los términos son:

$$\begin{array}{ll} M_1: & (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\ M_2: & (A_{21} + A_{22})B_{11} \\ M_3: & A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\ M_4: & A_{22}(B_{21} - B_{11}) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} M_5: & (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ M_6: & (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ M_7: & (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \end{array}$$

(b) Considerando que en cada término M_i, el producto puede descomponerse de la misma manera, y considerando que el costo de la suma de matrices cuadradas de lado n es $O(n^2)$, obtenga la ecuación de recurrencia para el Algoritmo de Strassen. Para calcular los cuadrantes de P, sólo basta hacer 8 sumas de los términos de $\{M_1, \ldots, M_7\}$. ¿Cuál es una cota superior para éste?