Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica
ME4701 - Vibraciones Mecánicas

Problema Transformada de Laplace

Profesora: Viviana Meruane N.
Auxiliar: Ignacio Calderón V.
Ayudantes: Felipe Cuevas R. - Iván González P. - Alfredo Moreno R.
Fecha: 18/04/2019

Considere un modelo simplificado de un generador de energía a partir de las olas. Una viga estática de largo L se empotra verticalmente en el suelo de modo que está completamente sumergida en el mar. Debido a que está conformado por un material elástico, posee una rigidez k y masa uniforme m. Se estudiarán las oscilaciones transversales a la longitud de la viga, ocasionadas por el impacto de las olas sobre la superficie del elemento.

La ola se acerca con velocidad c y la distancia que recorre antes de impactar sobre la viga es a. Suponga que una vez que impacta el aparato, la ola posee una extensión l donde cuenta con la misma magnitud de fuerza al momento del contacto.

Se proponen 2 modelos de fuerzas: El primero es considerando el caso real en que las olas se dan en periódicamente durante intervalos de tiempo determinados, o bien una forma simplificada de fuerza pulsante durante un intervalo de tiempo. Esto queda como:

$$F(t) = F_0 \cdot [\Phi(t - t_0) - \Phi(t - t_1)] \tag{1}$$

Con F_0 la amplitud de la fuerza con la que la ola impacte la viga. La función $\Phi(\cdot)$ es el escalón unitario que para este caso se utilizan los tiempos t_0 y t_1 para realizar un traslado temporal de la acción de la fuerza. t_0 es el tiempo que tarda la parte inicial de la ola en tocar por primera vez a la viga, mientras que t_1 es el tiempo en el cual deja de influir la fuerza de la ola sobre el elemento. Así, lo que demora la ola en recorrer la distancia a es $t_0 = a/c$ y por su lado, $t_1 = (a + l)/c$.

La ecuación que modela el problema, plantea un sistema con forzante y amortiguamiento.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{2}$$

Al aplicar la transformada de laplace a la EDO anterior con las propiedades de la transformada de la derivada de una función, se tiene lo siguiente:

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = \frac{F_0}{s} \cdot (e^{-st_0} - e^{-st_1}) \tag{3}$$

Donde $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ y $\mathcal{L}[\Phi(t - b)] = \dfrac{e^{-sb}}{s}$ es la transformada de laplace del escalón unitario desplazado en un tiempo arbitrario b.

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \cdot X(s) = \frac{F_0}{m} \cdot \left(\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s}\right) \tag{4}$$

$$X(s) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \left(\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s}\right) \tag{5}$$

Sabiendo que $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right](t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \theta)$, entonces se usará el teorema de traslación para una función $f(t)$ con transformada de laplace $F(s)$, se cumple que:

$$\mathcal{L}\left[f(t - b)\Phi(t - b)\right] = e^{-sb} \cdot F(s) \tag{6}$$

$$X(s) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \cdot (\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot \Phi(t-t_0)] - \mathcal{L}[f(t-t_1) \cdot \Phi(t-t_1)]) \tag{7}$$

Considerando $f(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \theta)$. Entonces, la respuesta del sistema al tomar la transformada inversa de la expresión que se obtiene del teorema de traslación:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \cdot (f(t-t_0) \cdot \Phi(t-t_0) - f(t-t_1) \cdot \Phi(t-t_1)) \tag{8}$$

Donde las variables se presentan en la siguiente tabla (Considerar $i = 0,\ 1$):

t_0	a/c
t_1	$(a+l)/c$
$\Phi(t-t_i)$	Escalón unitario desplazado en el tiempo t_i
$f(t-t_i)$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \cdot e^{-\xi\omega_n(t-t_i)} \cdot \sin(\omega_d(t-t_i)+\theta)$
ω_n	$\sqrt{k/m}$
ξ	$\frac{c}{2\sqrt{mk}}$
ω_d	$\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}$
θ	$\cos^{-1}\xi$