



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Mecánica
ME4701 - Vibraciones Mecánicas

Auxiliar #3

Profesora: Viviana Meruane N.

Auxiliar: Ignacio Calderón V.

Ayudantes: Felipe Cuevas R. - Iván González P. - Alfredo Moreno R.

Fecha: 11/04/2019

- P1.** Considere el siguiente sistema de control hidráulico. La válvula y su vástago se pueden modelar como un sistema amortiguado de resorte-masa. Además de la fuerza del resorte y el amortiguamiento, existe una presión de fluido sobre la válvula que cambia con la cantidad de apertura o cierre de la válvula. Encuentre la respuesta al estado estable de la válvula cuando la presión en la cámara varía como se indica en la figura. Suponga que $k = 2500 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ y $m = 0,25 \text{ kg}$.

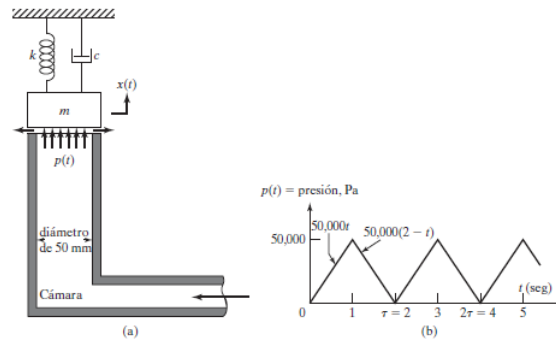


Figura 1: Sistema de control valvular.

- P2.** La limpieza por chorro de arena es un proceso en el cual un material abrasivo es dirigido mediante un chorro de aire, sobre una superficie de una pieza fundida para limpiar la superficie. Considere una pieza de masa m que se coloca sobre un soporte flexible de rigidez k , la fuerza ejercida por el chorro de arena, varía como se indica en la figura. Encuentre la respuesta temporal de la pieza fundida.

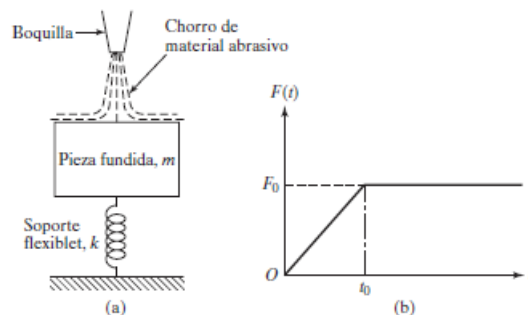


Figura 2: Limpieza por chorro de una pieza fundida.

Pauta Auxiliar #3

Fecha: 11/04/2019

Pregunta 1:

A partir del modelo mostrado en la Figura 1, se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

Donde $F(t)$ es una fuerza resultante sobre la válvula debido a la presión que ejerce el agua sobre ésta. Entonces, si la sección de la tubería es de área A constante, entonces lo que está cambiando en el tiempo es la presión que ejerce el fluido. Así:

$$F(t) = A \cdot p(t) \quad (2)$$

Se puede observar que de la Figura 1-(b), la presión que está actuando sobre la válvula corresponde a una función de período $\tau = 2$ segundos, mientras que su frecuencia es $\omega = 2\pi/\tau = \pi$ rad/s. Debido a la ecuación 2, se puede derivar una expresión para la fuerza en base al gráfico de $p(t)$, de modo que:

$$F(t) = \begin{cases} 50000At & \text{si } 0 \leq t \leq \tau/2 \\ 50000A(2-t) & \text{si } \tau/2 \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (3)$$

Obtener la respuesta a una fuerza periódica de la forma en que se muestra en el gráfico, puede resultar muy engorroso si es que no se cuenta con las herramientas indicadas (Por ejemplo, cálculo numérico, algún software, etc), entonces se pueden usar las **series de fourier** para aproximar la función mediante sumas de funciones armónicas. Entonces:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (4)$$

Donde $a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos(n\omega t) dt$, desde el sub-índice 0 hasta ∞ , mientras que $b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin(n\omega t) dt$, considerando el primer sub-índice igual a 1.

Al resolver las integrales sólo hasta $n = 3$, se obtiene la expresión de la fuerza:

$$F(t) \approx 25000A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \cos(\omega t) - \frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \cos 3\omega t \quad (5)$$

Con la forma de la fuerza de la ecuación 5, se tendrá una ecuación diferencial no homogénea de 2do orden que se puede resolver según los conocimientos adquiridos en el curso. Sin embargo, el problema es más sencillo ya que se trata de encontrar la respuesta al estado estable, que como es bien sabido, se trata de la **solución particular** de la ecuación diferencial. Según el capítulo 7 del apunte del curso, como una fuerza se puede representar como suma de senos y cosenos, entonces, la respuesta va a venir dada por la **suma de las respuestas** a los términos individuales de la serie.

$$x_p(t) = x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cm}(t) + x_{sn}(t)] \quad (6)$$

Luego, por las ecuaciones (7.13), (2.31), (2.36) y (2.37) del apunte:

$$x_p(t) = \frac{25000A}{k} - \frac{2 \times 10^5 A}{k\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\omega t - \theta_1) - \frac{2 \times 10^5 A}{9k\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-9r^2)^2 + (6\xi r)^2}} \cos(3\omega t - \theta_2) \quad (7)$$

Con los valores numéricos entregados en el enunciado, se puede calcular cada uno de los parámetros involucrados en la solución obtenida. Además, el desfase de la respuesta se puede calcular por:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1 - r^2} \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{6\xi r}{1 - 9r^2} \quad (8)$$

Pregunta 2:

El objetivo de este problema es determinar cómo se comporta el sistema bajo la acción de la fuerza arbitraria cuyo gráfico está entregado en la Figura 2-(b). La función que modela el soplado de la arena sobre la pieza fundida es la siguiente:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_o}{t_o} t & \text{si } t \leq t_o \\ F_o & \text{si } t_o \leq t \end{cases} \quad (9)$$

Como la masa está apoyada sobre el soporte elástico, la ecuación de movimiento sólo involucrará la acción de la fuerza del resorte y la del soplador. Entonces:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (10)$$

La respuesta a un sistema bajo la influencia de una fuerza arbitraria, está definida por la siguiente expresión:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (11)$$

Donde $h(t)$ es la función de respuesta a un impulso. En un sistema con amortiguación, esa función de transferencia tiene la forma:

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \quad (12)$$

Pero en este caso, $\xi = 0$ y además $h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \cdot \sin \omega_n t$. Al reemplazar en la ecuación 11 todas las expresiones y realizando las separaciones según las partes de la función $F(t)$ se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \left(\int_0^{t_o} \frac{F_o}{t_o} \tau \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau + \int_{t_o}^t F_o \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \right) \quad (13)$$

La integral anterior se puede resolver mediante muchos métodos. Al aplicar integración por partes y cambios de variables, se llega a la respuesta temporal:

$$x(t) = \frac{F_o}{m\omega_n^2} \cdot \cos \omega_n t + \frac{F_o}{mt_o\omega_n^3} \cdot [\sin \omega_n(t - t_o) - \sin \omega_n t] \quad (14)$$