



**Departamento de Ingeniería Mecánica**  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile

# **Vibraciones Mecánicas**

## **Apuntes para el curso ME4701**

**Viviana Meruane**



# Índice general

<b>Contenidos</b>	<b>ii</b>
<b>I Sistemas de un grado de libertad</b>	<b>2</b>
<b>1 Respuesta libre</b>	<b>3</b>
1.1 Obtención de la respuesta . . . . .	3
1.2 Coeficientes de Rigidez . . . . .	7
1.2.1 Movimiento longitudinal . . . . .	8
1.2.2 Movimiento torsional . . . . .	9
1.2.3 Movimiento transversal . . . . .	10
1.2.4 Resortes en serio o paralelo . . . . .	11
1.3 Amortiguamiento . . . . .	12
1.3.1 Amortiguamiento débil . . . . .	15
1.3.2 Sobreamortiguamiento . . . . .	16
1.3.3 Amortiguamiento crítico . . . . .	17
1.3.4 Estimación experimental del amortiguamiento . . . . .	18
1.4 Modelamiento de la ecuaciones de movimiento . . . . .	19
1.4.1 Método de las fuerzas . . . . .	19
1.4.2 Método de la energía . . . . .	20
1.4.3 Método de Lagrange . . . . .	21

<b>2</b>	<b>Respuesta a una excitación armónica</b>	<b>23</b>
2.1	Excitación armónica en sistemas sin amortiguamiento . . . . .	23
2.2	Excitación armónica en sistemas amortiguados . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Excitación en la base</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>Desbalance rotatorio</b>	<b>38</b>
4.1	Balanceo en un plano (estático) . . . . .	40
4.2	Balanceo en dos planos (dinámico) . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Respuesta a un impulso</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>Respuesta a una fuerza arbitraria</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Respuesta a una fuerza periódica arbitraria</b>	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>La transformada de Laplace</b>	<b>53</b>
8.1	Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	55
8.2	Función de transferencia y función de respuesta en frecuencia . . .	56
<b>9</b>	<b>Simulación numérica de la respuesta</b>	<b>58</b>
<b>II</b>	<b>Sistemas con multiples grados de libertad</b>	<b>62</b>
<b>10</b>	<b>Dos grados de libertad</b>	<b>63</b>
10.1	Valores propios y frecuencias naturales . . . . .	67
10.1.1	Ejemplo . . . . .	70
<b>11</b>	<b>Más de dos grados de libertad</b>	<b>74</b>
11.1	Nodos de un modo . . . . .	76
11.2	Modos de cuerpo rígido . . . . .	76

<b>12 Sistemas con amortiguamiento viscoso</b>	<b>79</b>
12.1 Análisis modal de respuesta forzada . . . . .	82
<b>III Diseño para la supresión de las vibraciones</b>	<b>83</b>
<b>13 Medición Experimental</b>	<b>84</b>
13.1 Transductores de vibración . . . . .	84
13.1.1 Sensor de proximidad . . . . .	84
13.1.2 Sensor sísmico de velocidad . . . . .	85
13.1.3 Acelerómetro piezoeléctrico . . . . .	86
<b>14 Análisis Espectral</b>	<b>87</b>
14.1 La Transformada de Fourier . . . . .	88
14.1.1 Algunos parámetros importantes . . . . .	90
14.2 Errores . . . . .	91
14.2.1 Aliasing . . . . .	91
14.2.2 Leakage . . . . .	92
<b>15 Niveles aceptables de vibración</b>	<b>94</b>
15.1 Efecto de las vibraciones en el cuerpo humano . . . . .	96
15.2 Severidad vibración en maquinaria . . . . .	97
<b>16 Aislamiento de las vibraciones</b>	<b>101</b>
<b>17 Absorbedor de vibraciones</b>	<b>107</b>
<b>18 Absorbedor de vibración con amortiguación</b>	<b>113</b>
<b>19 Adición de amortiguamiento viscoelástico</b>	<b>119</b>

<b>IV Vibración en Sistemas Continuos</b>	<b>122</b>
<b>20 Vibración en barras</b>	<b>123</b>
<b>21 Vibración torsional</b>	<b>129</b>
<b>22 Vibración transversal en vigas</b>	<b>133</b>
<b>23 Modelos de amortiguamiento</b>	<b>142</b>
<b>24 Respuesta forzada</b>	<b>144</b>
<b>V Elementos Finitos</b>	<b>147</b>
<b>25 Elemento de barra</b>	<b>149</b>
25.1 Barra de tres elementos . . . . .	153
<b>26 Elemento de Viga</b>	<b>155</b>
<b>27 Matriz de masas concentradas</b>	<b>158</b>
<b>28 Coordenadas locales - globales y ensamble</b>	<b>160</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>165</b>

## **Parte I**

# **Sistemas de un grado de libertad**

# Capítulo 1

## Respuesta libre

### 1.1. Obtención de la respuesta

Un modelo simple para estudiar vibraciones es un resorte (como el que se utiliza en la suspensión de un auto) con un extremo fijo y una masa adherida en el otro extremo. En la figura 1.1 se muestra una representación esquemática de un sistema masa-resorte con un grado de libertad.

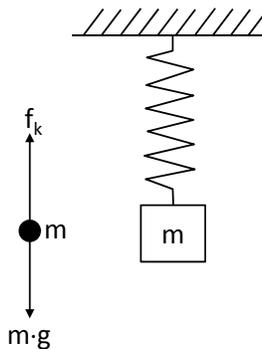


Figura 1.1: Esquema de un sistema masa-resorte con 1 grado de libertad y su diagrama de cuerpo libre

Ignorando la masa del resorte en si, las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza de gravedad ( $m \cdot g$ ) y la fuerza de restauración del resorte ( $f_k$ ). La naturaleza de la fuerza del resorte se puede deducir al realizar un experimento estático simple.

El que consiste en aumentar la masa adherida y medir el desplazamiento de la masa ( $x$ ), tal como se muestra en la figura 1.2.

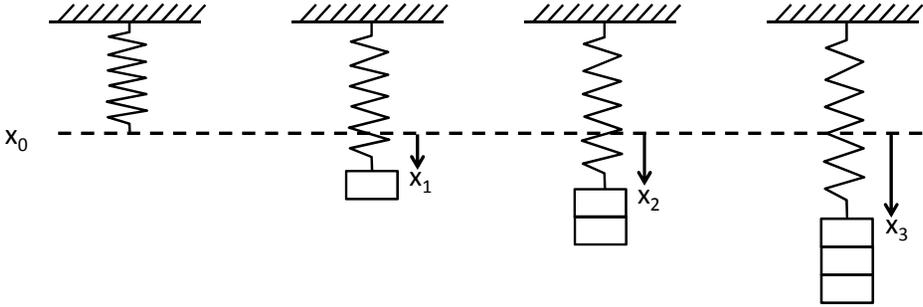


Figura 1.2: Experimento para determinar la rigidez de un resorte

De donde se obtiene la siguiente relación:

$$f_k = kx \tag{1.1}$$

La constante  $k$  se denomina *rigidez* del resorte y es una característica propia de cada resorte.

Consideremos ahora un resorte en posición horizontal como el de la figura 1.3, el que es elongado  $x_0$  desde su posición de equilibrio. La masa del objeto es  $m$  y la rigidez del resorte es  $k$ . La única fuerza actuando sobre la masa es la fuerza del resorte.

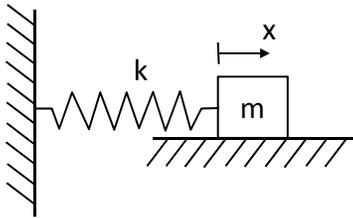


Figura 1.3: Sistema masa resorte horizontal

Por suma de fuerzas se obtiene la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad o \quad m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.2)$$

donde  $\ddot{x}(t)$  denota la segunda derivada del desplazamiento (i.e., la aceleración). La solución de esta ecuación se puede escribir como:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.3)$$

Esto describe un movimiento oscilatorio de frecuencia  $\omega_n$  y amplitud  $A$ .  $\omega_n$  se denomina *frecuencia natural*, determina el intervalo de tiempo en el que la función se repite.  $\phi$ , denominada fase, determina el valor inicial de la función sinusoidal. La fase se mide en radianes (rad), mientras que la frecuencia se mide en radianes por segundo (rad/s).

Para verificar que la ecuación 1.3 sea efectivamente una solución de la ecuación de movimiento, la sustituimos en la ecuación 1.2:

$$-m\omega_n^2 A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) = -kA \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (1.4)$$

Esta última ecuación se satisface si,

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad o \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

Las constantes  $\phi$  y  $A$ , están definidas por las condiciones iniciales del problema. Consideremos que el resorte se encuentra en una posición  $x_0$  en  $t = 0$ , la fuerza inicial  $kx_0$  va a iniciar el movimiento. Si adicionalmente conocemos la velocidad inicial  $v_0$ , tenemos que:

$$x_0 = x(0) = A \operatorname{sen}(\phi) \quad (1.6)$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n A \cos(\phi) \quad (1.7)$$

Resolviendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$A = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \quad y \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0} \quad (1.8)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de movimiento para el sistema masa-resorte es:

$$x(t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \operatorname{sen} \left( \omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0} \right) \quad (1.9)$$

Esta solución se ilustra en la figura a continuación.

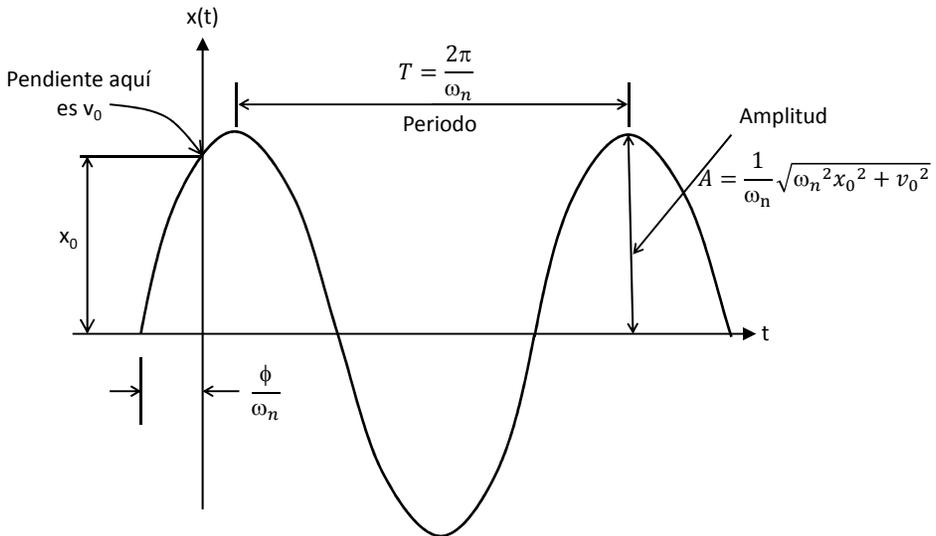


Figura 1.4: Solución de la ecuación de movimiento para un sistema de un grado de libertad

Utilizando las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \text{sen}(y)$$

$$\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\text{sen}(\tan^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

la solución de la ecuación de movimiento entregada en 1.9 se puede escribir como:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.10)$$

La frecuencia natural,  $\omega_n$ , se mide en radianes por segundo y describe la repetibilidad de la oscilación. Como se indica en la figura 1.4 el tiempo que demora el ciclo en repetirse es el *periodo*  $T$ , el que está relacionado con la frecuencia natural por,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ (s)} \quad (1.11)$$

Muchas veces la frecuencia natural es medida en ciclos por segundo (Hertz). La frecuencia en hertz se obtiene al dividir la frecuencia natural por  $2\pi$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ (Hz)} \tag{1.12}$$

En la figura 1.5 se ilustran tres sistemas de un grado de libertad. Para estos casos se obtienen las siguientes frecuencias naturales y periodos de oscilación:

**Masa-Resorte**

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/s}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ s} \tag{1.13}$$

**Disco y eje**

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \text{ rad/s}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} \text{ s} \tag{1.14}$$

**Péndulo simple**

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ rad/s}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ s} \tag{1.15}$$

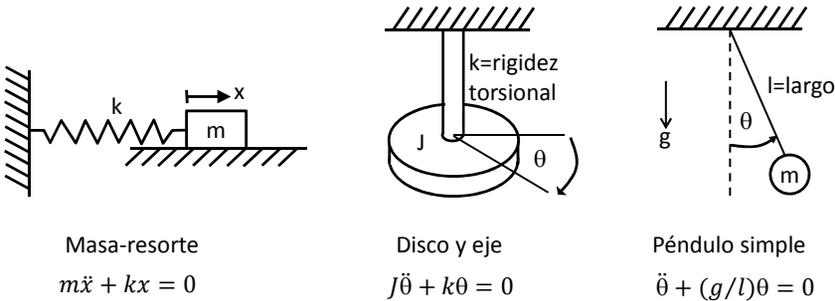


Figura 1.5: Ejemplos de sistemas de un grado de libertad (pequeños desplazamientos)

## 1.2. Coeficientes de Rigidez

La rigidez de un resorte se puede relacionar directamente con sus propiedades geométricas y del material. En esta sección se introducen las relaciones entre rigidez,

modulo de elasticidad y geometría de varios tipos de resortes. El comportamiento tipo resorte puede resultar de una variedad de configuraciones, incluyendo movimiento longitudinal (vibración a lo largo), movimiento transversal (vibración en dirección perpendicular al largo) y movimiento torsional (vibración rotacional a lo largo).

**1.2.1. Movimiento longitudinal**

Para una barra de largo  $l$ , sección de área  $A$  y Modulo de Young  $E$ , la rigidez de la barra para vibraciones con respecto a su largo viene dada por,

$$k = \frac{EA}{l} \tag{1.16}$$

Esto describe la constante del resorte del problema ilustrado en la Figura 1.6, en donde la masa del resorte es ignorada (o es muy pequeña con respecto a la masa  $m$ ). El modulo de Young  $E$  se pide en Pascal ( $Pa$ ), lo que equivale a  $N/m^2$ .

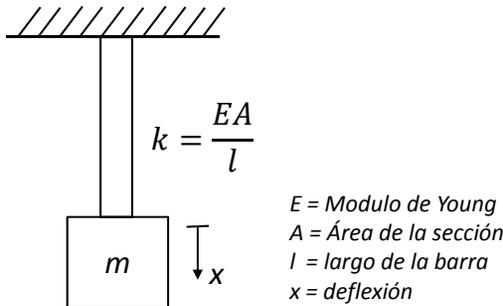


Figura 1.6: Rigidez asociada con la vibración longitudinal de una barra

En la tabla 1.1 se muestran las propiedades físicas de algunos materiales comunes.

Para el caso de un resorte helicoidal (Figura 1.7) la constante de rigidez depende de las espiras de alambre que forman el resorte. La rigidez es una función del módulo de corte  $G$ , del diámetro del alambre, el diámetro de las espiras y del número de espiras:

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3} \tag{1.17}$$

Material	Módulo de Young $E (Pa)$	Densidad $\rho (kg/m^3)$	Módulo de corte $G (Pa)$
Acero	$2,0 \times 10^{11}$	$7,8 \times 10^3$	$8,0 \times 10^{10}$
Aluminio	$7,1 \times 10^{10}$	$2,7 \times 10^3$	$2,67 \times 10^{10}$
Bronce	$10,0 \times 10^{10}$	$8,5 \times 10^3$	$3,68 \times 10^{10}$
Cobre	$11,7 \times 10^{10}$	$8,9 \times 10^3$	$2,22 \times 10^{10}$
Concreto	$3,8 \times 10^9$	$2,0 \times 10^3$	-
Goma	$2,3 \times 10^9$	$1,1 \times 10^3$	$8,21 \times 10^8$
Madera	$5,4 \times 10^9$	$6,0 \times 10^2$	-

Tabla 1.1: Constantes físicas de algunos materiales comunes

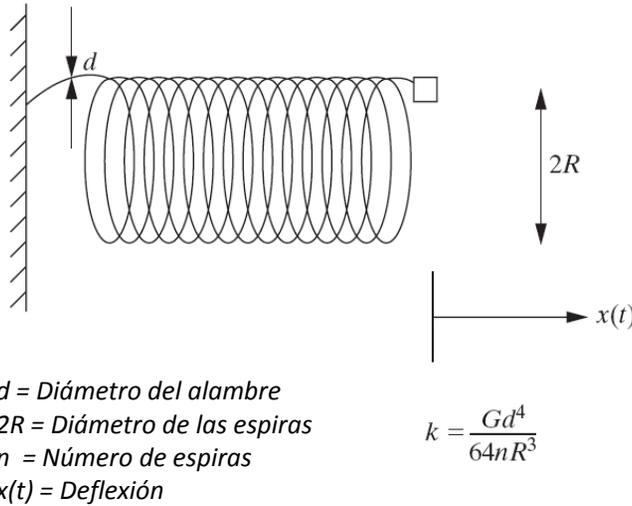


Figura 1.7: Rigidez de un resorte helicoidal

### 1.2.2. Movimiento torsional

Consideremos el movimiento torsional de una barra de sección circular, como la mostrada en la Figura 1.8. En este caso, la barra posee un momento de inercia polar,  $J_P$  y un módulo de corte  $G$ . Para el caso de un eje de diámetro  $d$ ,  $J_P = \pi d^4/32$ . La rigidez torsional viene dada por,

$$k = \frac{GJ_P}{l} \tag{1.18}$$

la que se utiliza para describir las vibraciones del sistema de la Figura 1.8, en donde la masa del eje es ignorada. En la figura,  $\theta$  representa la posición angular

del eje con respecto a su posición de equilibrio. El disco de radio  $r$  y momento de inercia rotacional  $J$  va a vibrar en torno a la posición de equilibrio con una rigidez de  $GJ_P/l$ .

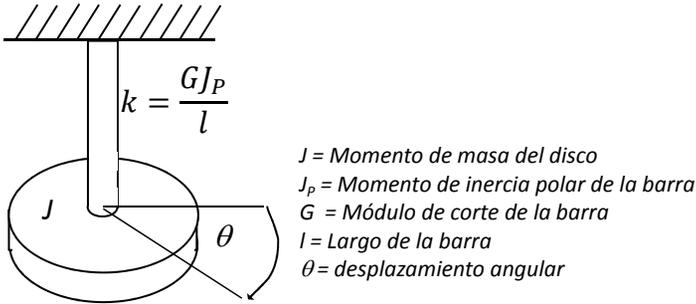


Figura 1.8: Rigidez asociada con las vibraciones torsionales de un eje

En la Figura 1.9 se ilustra el caso de un resorte de torsión. En este caso la rigidez del resorte viene dada por:  $k = EI/l$ , en donde,  $l$  es el largo total del alambre e  $I$  es el momento de inercia de su sección transversal.

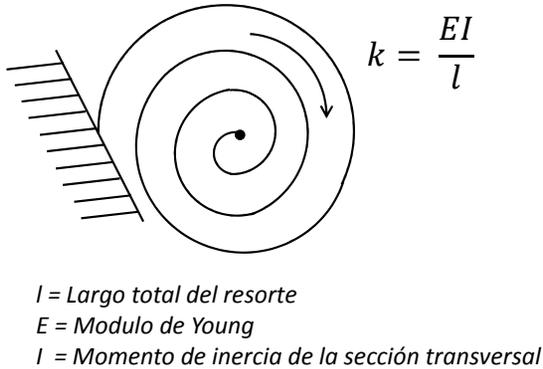


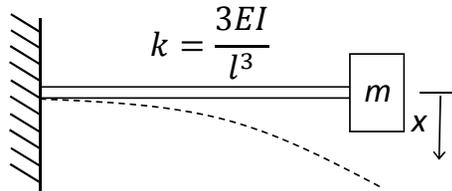
Figura 1.9: Rigidez de un resorte de torsión

### 1.2.3. Movimiento transversal

Un ejemplo de movimiento transversal son las vibraciones de una viga con una masa en su extremo, como se ilustra en la Figura 1.10. Este tipo de comportamiento tipo resorte, es similar a las suspensiones traseras de un automóvil como también al comportamiento de las alas de un avion. En la figura,  $l$  es el largo de la viga,  $E$

es el modulo de Young e  $I$  es el momento de inercia de la sección. La rigidez de la viga viene dada por:

$$k = \frac{3EI}{l^3} \quad (1.19)$$



$E =$  Modulo de Young

$l =$  largo de la viga

$I =$  Momento de inercia de la sección transversal

Figura 1.10: Rigidez de una viga asociada a vibración transversal de la punta de la viga

#### 1.2.4. Resortes en serio o paralelo

En todos los casos vistos hasta ahora hay un resorte y una masa. Consideremos el caso de dos resortes conectados en serie como se muestra en la figura 1.11 a). La deflexión total viene dada por la suma de ambas deflexiones,

$$\Delta_t = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (1.20)$$

Por otro lado, la fuerza actuando sobre el primer resorte es la misma que sobre el segundo resorte y equivale a la fuerza externa,

$$f = f_1 = f_2 \quad (1.21)$$

Combinando ambas ecuaciones y reemplazado la ecuación de equilibrio para cada resorte ( $f = k\Delta$ ), se obtiene que,

$$\Delta_t = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2} = f \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (1.22)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.23)$$

En el caso de dos resortes conectados en paralelo, como se muestra en la Figura 1.11 b), la deflexión en ambos resortes debe ser la misma,

$$\Delta_t = \Delta_1 = \Delta_2 \quad (1.24)$$

Y la fuerza total se divide entre ambos resortes,

$$f = f_1 + f_2 \quad (1.25)$$

Combinando ambas ecuaciones y reemplazado la ecuación de equilibrio para cada resorte ( $f = k\Delta$ ), se obtiene que,

$$f = k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 = (k_1 + k_2)\Delta_t \quad (1.26)$$

Por lo tanto,

$$k_t = (k_1 + k_2) \quad (1.27)$$

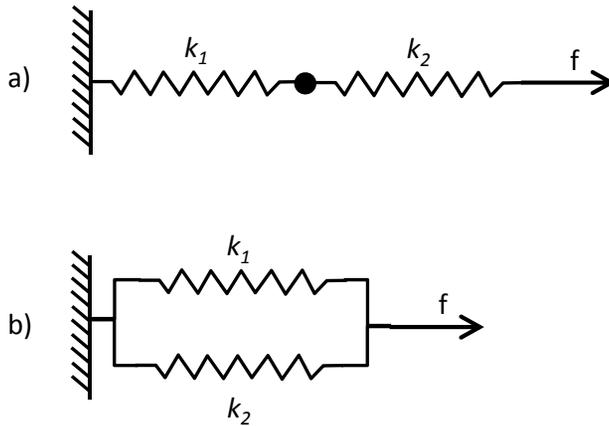


Figura 1.11: Reglas para el cálculo de la rigidez equivalente para resortes conectados en serie y paralelo

### 1.3. Amortiguamiento

La respuesta del sistema masa-resorte vista predice que el sistema va a oscilar indefinidamente. Sin embargo, la gran mayoría de los sistemas oscilatorios eventualmente decaen y dejan de moverse. Esto sugiere que el modelo visto debe modificarse para incluir este decaimiento. Añadiendo un término  $c\dot{x}(t)$  a la ecuación

de movimiento se obtiene una solución que decae en el tiempo. Esto se conoce como *amortiguamiento viscoso* y ha mostrado representar de buena manera las observaciones experimentales.

Mientras que un resorte representa un modelo físico para guardar energía potencial y por lo tanto causar vibraciones; un amortiguador representa un modelo físico para disipar energía y entonces amortiguar la respuesta de un sistema mecánico. Un ejemplo de un amortiguador corresponde a un pistón que debe deslizarse en un cilindro lleno de aceite, tal como se muestra en la figura 1.12. Para ello se le realizan hoyos al pistón de manera que el aceite pueda pasar de un lado del pistón al otro.

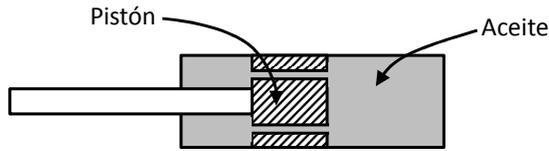


Figura 1.12: Esquema de un amortiguador

La fuerza que ejerce un amortiguador es proporcional a la velocidad del pistón, en una dirección opuesta al movimiento:

$$f_c = -c\dot{x}(t) \quad (1.28)$$

donde  $c$  es una constante relacionada con la viscosidad del aceite. Esta constante se denomina el *coeficiente de amortiguamiento* y tiene unidades de fuerza por velocidad ( $Ns/m=kg/s$ ).

Consideremos el sistema de un grado de libertad de la figura 1.13. En este caso la ecuación de movimiento viene dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.29)$$

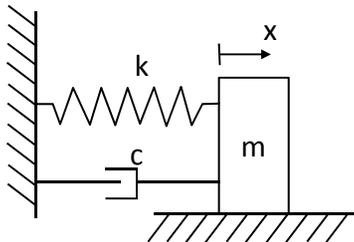


Figura 1.13: Sistema de un grado de libertad con amortiguador

Para resolver la ecuación de movimiento amortiguada, se asume una solución de la forma  $x(t) = Ae^{\lambda t}$ . Substituyendo en la ecuación 1.29:

$$m\lambda^2 Ae^{\lambda t} + c\lambda Ae^{\lambda t} + kAe^{\lambda t} = 0 \quad (1.30)$$

Dividiendo por  $Ae^{\lambda t}$  se obtiene la ecuación característica del sistema:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (1.31)$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km} \quad (1.32)$$

Examinando esta expresión vemos que las raíces pueden tener valores complejos o reales dependiendo del valor del discriminante,  $c^2 - 4km$ . Si  $c^2 - 4km > 0$ , las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos números reales negativos. En caso contrario, si el discriminante es negativo, las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos complejos conjugados con la parte real de valor negativo. Si el discriminante es cero, las raíces son números reales negativos iguales.

Se define como *amortiguamiento crítico* al amortiguamiento que hace que el discriminante sea cero:

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.33)$$

A partir de esta definición, se define la razón de amortiguamiento,  $\zeta$ , como:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (1.34)$$

Las raíces presentadas en la ecuación 1.32, se pueden escribir como dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.35)$$

De donde se ve claramente que la razón de amortiguamiento  $\zeta$  determina si las raíces son complejas o reales.

Dado que  $x = A_1e^{\lambda_1 t}$  y  $x = A_2e^{\lambda_2 t}$  son soluciones del problema, su suma es la solución general:

$$x = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} \quad (1.36)$$

Las soluciones particulares dependen de las constantes,  $A_1$  y  $A_2$ , que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

La ecuación 1.36 se puede escribir como:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left( A_1 e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + A_2 e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \quad (1.37)$$

### 1.3.1. Amortiguamiento débil

Se dice que el sistema tiene *amortiguamiento débil* si la razón de amortiguamiento  $\zeta$  es menor a 1 y el discriminante de la ecuación 1.35 es negativo. Esto resulta en un par de raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_d \quad (1.38)$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_d \quad (1.39)$$

donde  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  se denomina *frecuencia natural amortiguada*.

La solución de la ecuación de movimiento viene dada por:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (1.40)$$

Utilizando las identidades:  $e^{j\omega_d t} = \cos \omega_d t + j \operatorname{sen} \omega_d t$  y  $e^{-j\omega_d t} = \cos \omega_d t - j \operatorname{sen} \omega_d t$ , la ecuación 1.57 se puede escribir como:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (B \cos \omega_d t + D \operatorname{sen} \omega_d t) \quad (1.41)$$

$$= A e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (1.42)$$

Las constantes  $A$  y  $\phi$  vienen dadas por las condiciones iniciales al igual que en el caso sin amortiguamiento,

$$x(0) = x_0 = A \operatorname{sen}(\phi) \quad (1.43)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\zeta\omega_n \operatorname{sen}(\phi) + A\omega_d \cos(\phi) \quad (1.44)$$

Despejando se obtiene que:

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}{\omega_d^2}} \quad (1.45)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x_0\omega_d}{v_0 + \zeta\omega_n x_0} \quad (1.46)$$

Lo que también se puede escribir como:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right) \quad (1.47)$$

En la figura 1.14 se ilustra la respuesta de un sistema con amortiguamiento débil. En este caso se obtiene una respuesta oscilatoria que decae en el tiempo. La tasa de decaimiento esta dada por la razón de amortiguamiento  $\zeta$ . Este tipo de respuesta corresponde al caso mas común en sistemas mecánicos.

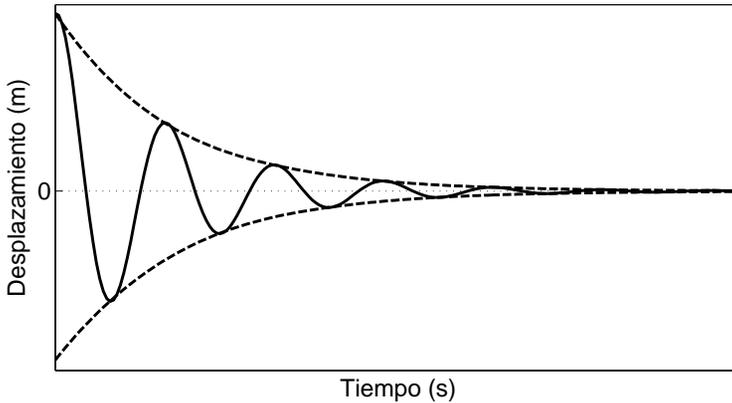


Figura 1.14: Respuesta de un sistema con amortiguamiento débil:  $0 < \zeta < 1$

### 1.3.2. Sobreamortiguamiento

Cuando la razón de amortiguamiento es mayor a 1 ( $\zeta > 1$ ), se dice que el sistema está *sobreamortiguado*. En este caso, el discriminante de la ecuación 1.35 es mayor a cero, resultado es un par de raíces reales. Éstas son:

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.48)$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.49)$$

La respuesta del sistema viene dada por,

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left( A_1 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} + A_2 e^{+\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} \right) \quad (1.50)$$

Lo que representa una respuesta no oscilatoria. Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  vienen dadas por las condiciones iniciales:

$$A_1 = \frac{-v_0 + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (1.51)$$

$$A_2 = \frac{v_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (1.52)$$

Respuestas típicas se ilustran en la figura 1.15, en donde se observa que la respuesta es claramente no oscilatoria. Un sistema sobreamortiguado no oscila, sino que se dirige exponencialmente hacia su posición de equilibrio.

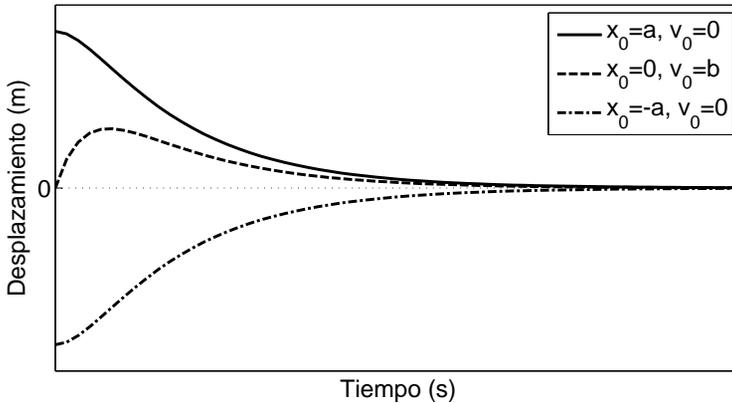


Figura 1.15: Respuesta de un sistema sobreamortiguado:  $\zeta > 1$

### 1.3.3. Amortiguamiento crítico

En este caso, la razón de amortiguamiento es exactamente uno ( $\zeta = 1$ ) y el discriminante de la ecuación 1.35 es cero. Ambas raíces se repiten y tienen el valor:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n \quad (1.53)$$

La solución toma la forma,

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (1.54)$$

Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  vienen dadas por las condiciones iniciales:

$$A_1 = x_0 \quad (1.55)$$

$$A_2 = v_0 + \omega_n x_0 \quad (1.56)$$

Las respuestas en este caso son similares a las de la figura 1.15. Los sistemas con amortiguamiento crítico se pueden ver desde distintos puntos de vista. Estos representan al sistema con el menor valor de amortiguamiento que lleva a movimiento no oscilatorio. El amortiguamiento crítico también se puede ver como el caso que separa la no oscilación de la oscilación, o el valor de amortiguamiento que entrega el decaimiento hacia cero más rápido sin oscilación.

### 1.3.4. Estimación experimental del amortiguamiento

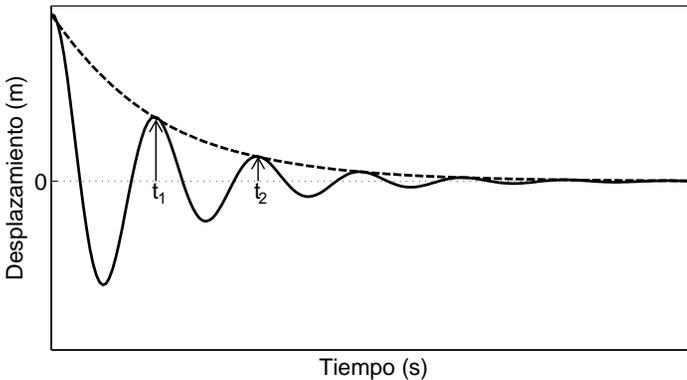


Figura 1.16: Estimación del amortiguamiento en el caso de amortiguamiento débil

El coeficiente o razón de amortiguamiento es uno de los parámetros más difíciles de determinar numérica o experimentalmente. Experimentalmente la razón de amortiguamiento para un sistema con amortiguamiento débil se puede estimar a partir de la respuesta del sistema en el tiempo. Una técnica común, aprovecha el hecho que la envolvente (línea segmentada) de la Figura 1.16 viene dada por  $Ae^{-\zeta\omega_n t}$ . Los puntos medidos  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  se pueden ajustar a  $Ae^{-\zeta\omega_n t_1}$  y  $Ae^{-\zeta\omega_n t_2}$ . Con esto, se puede determinar el valor del coeficiente  $\zeta\omega_n$ . Si  $m$  y  $k$  son conocidos,  $\zeta$  y  $c$  se pueden determinar a partir de  $\zeta\omega_n$ .

Esta metodología lleva a la definición de *decremento logarítmico*, denotado por  $\delta$  y definido como:

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \tag{1.57}$$

donde  $T$  es el periodo de oscilación. Sustituyendo la expresión analítica de  $x(t)$ ,

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n (t+T)} \text{sen}(\omega_d (t+T) + \phi)} \tag{1.58}$$

dado que  $\omega_d T = 2\pi$ , el denominador se convierte en:  $Ae^{-\zeta\omega_n (t+T)} \text{sen}(\omega_d t + \phi)$  y la expresión para el decremento se reduce a:

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_n T} = \zeta\omega_n T \tag{1.59}$$

El periodo  $T$  corresponde al periodo amortiguado ( $2\pi/\omega_d$ ), por lo tanto,

$$\delta = \frac{\zeta\omega_n 2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1.60}$$

despejando  $\zeta$ ,

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{1.61}$$

lo que determina la razón de amortiguamiento a partir del decremento logarítmico.

Por lo tanto, si se mide el valor de  $x(t)$  en dos peaks sucesivos, digamos  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$ , la ecuación 1.57 se puede usar para determinar el decremento y la ecuación 1.61 para determinar la razón de amortiguamiento. Si se conoce el valor de  $m$  y  $k$ , se puede determinar entonces el valor del coeficiente de amortiguación  $c$ .

## 1.4. Modelamiento de la ecuaciones de movimiento

El modelamiento es el proceso de escribir una ecuación, o sistema de ecuaciones, que describa el movimiento de un sistema físico. Se pueden distinguir dos métodos de modelamiento: Ley de Newton y métodos basados en la energía.

### 1.4.1. Método de las fuerzas

El método de la suma de fuerzas o ley de Newton es el que se ha utilizado hasta ahora. Este método se basa en que la suma de las fuerzas en una dirección es igual

a la masa por la aceleración en esa dirección:

$$m\ddot{x} = \sum_i f_{xi} \tag{1.62}$$

$$m\ddot{y} = \sum_i f_{yi} \tag{1.63}$$

donde  $f_{xi}$  y  $f_{yi}$  denotan a la  $i$ -ésima fuerza actuando en la dirección  $x$  e  $y$  respectivamente,  $m$  es la masa del objeto y  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  son la aceleración del objeto en la dirección  $x$  e  $y$ . Para el caso de rotaciones, se puede escribir que:

$$J\ddot{\theta} = \sum_i M_{\theta i} \tag{1.64}$$

donde  $M_{\theta i}$  son los torques actuando sobre el objeto,  $J$  es el momento de inercia en torno al eje de rotación y  $\theta$  es el ángulo de rotación.

### 1.4.2. Método de la energía

Si las fuerzas o torques actuando sobre un objeto son difíciles de determinar, un método basado en la energía puede ser más efectivo. En estos métodos, las ecuaciones de movimiento se derivan al utilizar los principios de conservación de la energía. El principio básico en este caso, es que la energía total del sistema se mantiene constante:

$$T + U = \text{constante} \tag{1.65}$$

donde  $T$  y  $U$  denotan a la energía cinética y potencial del sistema.

Para ilustrar el método, consideremos el sistema masa-resorte de la Figura 1.1, colgando en con un campo gravitatorio de fuerza  $g$ . El efecto de añadir una masa  $m$  al resorte del rigidez  $k$  es que la posición de equilibrio se encuentra en  $x = \Delta$ . La energía potencial del sistema corresponde a la energía potencial del resorte, más la energía potencial gravitatoria:

$$U = U_{\text{resorte}} + U_{\text{gravitatoria}} \tag{1.66}$$

$$= \frac{1}{2}k(\Delta + x)^2 - mgx \tag{1.67}$$

donde  $x$  corresponde al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio.

La energía cinética viene dada por:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1.68}$$

Sustituyendo en la ecuación 1.65,

$$\frac{1}{2}k(\Delta + x)^2 - mgx + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{constante} \tag{1.69}$$

derivando con respecto al tiempo,

$$(k\Delta - mg)\dot{x} + (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0 \tag{1.70}$$

de la ecuación de equilibrio se obtiene que  $k\Delta = mg$ , reemplazando,

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0 \tag{1.71}$$

Dado que  $\dot{x}$  no puede ser cero para todo  $t$ , se llega a la ecuación de movimiento estándar:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.72}$$

Este procedimiento se denomina *método de la energía*.

### 1.4.3. Método de Lagrange

El método de Lagrange para sistemas conservativos, consiste en definir el *Lagrangiano*,  $L$ , del sistema definido por  $L = T - U$ . En donde,  $T$  representa a la energía cinética total y  $U$  a la energía potencial total, ambas en función de las coordenadas “generalizadas”. Se denota a las coordenadas generalizadas por  $q_i(t)$ . Por ejemplo, en el caso del sistema masa-resorte la coordenada generalizada  $q_i$  sería  $x$ . El método de Lagrange postula que las ecuaciones de movimiento para sistemas conservativos resultan de:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.73}$$

reemplazando  $L = T - U$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \tag{1.74}$$

Por ejemplo, en el caso del sistema masa-resorte, la energía cinética y potencial vienen dadas por,

$$U = \frac{1}{2}k(\Delta + x)^2 - mgx, \quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1.75}$$

En este caso, la coordenada generalizada  $q_i$  corresponde al desplazamiento  $x$ . Reemplazando en la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + k(\Delta + x) - mg = 0 \quad (1.76)$$

$$= m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.77)$$

### Amortiguamiento

El amortiguamiento viscoso es una fuerza no conservativa y se puede considerar utilizando la función disipativa de Rayleigh. Esta función asume que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad. La función de disipación de Rayleigh toma la forma:

$$F = \frac{1}{2} c_r \dot{\Delta}_r^2 \quad (1.78)$$

Donde  $\dot{\Delta}_r$  es la velocidad con que se comprime el  $r$ -ésimo amortiguador. Considerando esta forma, las fuerzas generalizadas para el amortiguamiento viscoso se pueden derivar de:

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.79)$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden derivar a partir de:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (1.80)$$

Para el caso de una fuerza (o momento) cualquiera en la coordenada  $i$ -ésima, la fuerza generalizada viene dada por:

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.81)$$

donde  $W$  denota el trabajo.

# Capítulo 2

## Respuesta a una excitación armónica

### 2.1. Excitación armónica en sistemas sin amortiguamiento

Consideremos el sistema de la Figura 2.1. Existen diferentes formas de modelar la excitación armónica,  $F(t)$ . Una función armónica se puede representar por un seno, un coseno o por una exponencial compleja. Definiremos la función de excitación,  $F(t)$ , como:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \tag{2.1}$$

donde  $F_0$  representa a la magnitud, o amplitud máxima y  $\omega$  denota la frecuencia de la fuerza aplicada. La frecuencia  $\omega$  también se denomina *frecuencia de entrada* o *frecuencia de excitación* o *frecuencia de funcionamiento* y tiene unidades de  $\text{rad/s}$ .

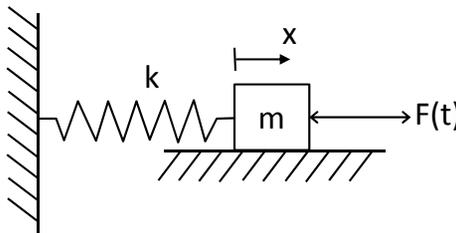


Figura 2.1: Sistema masa resorte con excitación armónica

Alternativamente, la fuerza de excitación armónica se puede representar por un seno,

$$F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (2.2)$$

o como una exponencial compleja,

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t} \quad (2.3)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria. Cada una de estas expresiones lleva al mismo fenómeno, pero en algunos casos unas van a ser más fáciles de manipular que otras.

A partir de la Figura 2.1, se puede escribir la ecuación de movimiento del sistema,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.4)$$

dividiendo por  $m$  y definiendo  $f_0 = F_0/m$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

De ecuaciones diferenciales, se sabe que la solución de la ecuación 2.5, está compuesta por la suma de la solución homogénea (i.e. la solución cuando  $f_0 = 0$ ) y la solución particular. La solución particular,  $x_p$ , se puede encontrar asumiendo que la respuesta tiene la misma forma que la fuerza de excitación:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

donde  $X$  es la amplitud de la respuesta forzada. Substituyendo esta respuesta en 2.5,

$$-\omega^2 X \cos(\omega t) + \omega_n^2 X \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

factorizando,

$$(-\omega^2 X + \omega_n^2 X - f_0) \cos(\omega t) = 0 \quad (2.8)$$

Dado que  $\cos(\omega t)$  no puede ser cero para todo  $t$ , el coeficiente acompañado al coseno debe ser cero. Igualando el coeficiente a cero y despejando  $X$  se obtiene,

$$X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, siempre que la frecuencia de excitación  $\omega$  y la frecuencia natural  $\omega_n$  sean distintas, la solución particular será de la forma:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

Dado que el sistema es lineal, la solución final viene dada por la suma de la solución homogénea más la solución particular. Vimos en la sección anterior que la solución homogénea se puede escribir como  $A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t$ . Por lo tanto la solución final para la ecuación 2.5 es de la forma:

$$x(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \tag{2.11}$$

Los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  están dados por las condiciones iniciales. Definiendo  $x_0$  y  $v_0$  como el desplazamiento y velocidad inicial:

$$x(0) = A_2 + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} = x_0 \tag{2.12}$$

$$\dot{x}(0) = \omega_n A_1 = v_0 \tag{2.13}$$

Despejando  $A_1$  y  $A_2$  y reemplazando en la ecuación 2.11, se obtiene la solución completa:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left( x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \tag{2.14}$$

En la Figura 2.2 se ilustra la respuesta de un sistema no amortiguado a una excitación armónica.

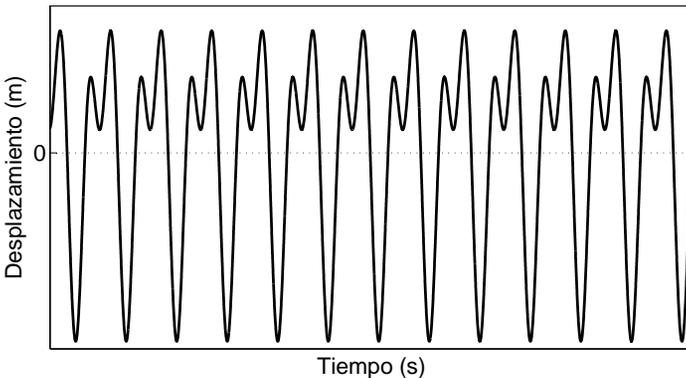


Figura 2.2: Respuesta de un sistema sin amortiguamiento con  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$  a una excitación armónica de  $\omega = 2 \text{ rad/s}$

Se debe notar que la solución dada en la ecuación 2.14 no es válida en el caso que la frecuencia de excitación sea igual a la frecuencia natural (si  $\omega = \omega_n$ ). También

se debe notar que cuando la frecuencia de excitación tiene valores cercanos a la frecuencia natural la amplitud de la repuesta crece mucho. Este alto aumento en la amplitud de las vibraciones se conoce como el fenómeno de *resonancia*, tal vez el concepto más importante en el análisis de vibraciones.

Dos fenómenos importantes ocurren cuando la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia natural. Para estudiarlos, consideremos primero la respuesta a condiciones iniciales iguales a cero:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_n t) \tag{2.15}$$

usando identidades trigonométricas, se puede escribir como:

$$x(t) = 2 \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\omega_n + \omega}{2} t \right) \tag{2.16}$$

Si ambas frecuencias son cercanas se tiene que  $(\omega_n - \omega) \ll (\omega_n + \omega)$  y por tanto el termino  $\operatorname{sen} [(\omega_n - \omega)/2t]$  oscila con un periodo mucho más largo que  $\operatorname{sen} [(\omega_n + \omega)/2t]$ . El movimiento resultante es una oscilación rápida con una variación lenta de amplitud y se denomina *pulso*. De la Figura 2.3 se deduce que la frecuencia del pulso es  $\omega_n - \omega$  y por lo tanto su periodo viene dado por  $T_p = 2\pi/(\omega_n - \omega)$ .

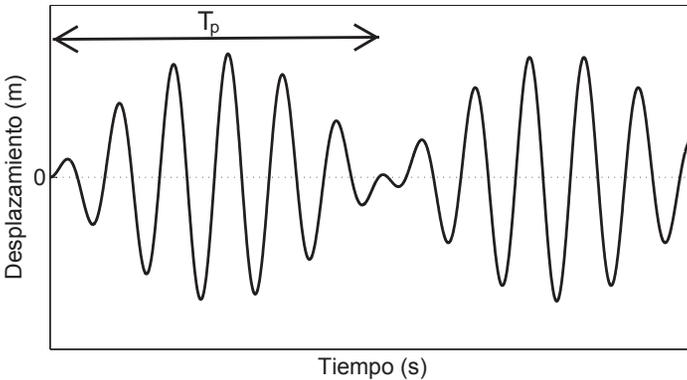


Figura 2.3: Respuesta de un sistema sin amortiguamiento para  $\omega_n - \omega$  pequeño, ilustrando el fenómeno de pulsos

Cuando  $\omega$  es exactamente igual a la frecuencia natural del sistema, la solución dada en 2.14 ya no es válida. En este caso, la selección de una función  $X \cos \omega t$  como solución particular falla, porque también corresponde a una solución homogénea. La solución particular correcta es de la forma:

$$x_p(t) = tX \operatorname{sen}(\omega t) \tag{2.17}$$

reemplazando en la ecuación de movimiento y despejando  $X$ , se obtiene,

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2\omega} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la solución completa es de la forma:

$$x(t) = A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.19)$$

Evaluando los desplazamientos y velocidades iniciales,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.20)$$

En la Figura 2.4 se ilustra la respuesta dada por la ecuación 2.20. Se observa que la respuesta,  $x(t)$ , crece sin restricciones. Este fenómeno se denomina *resonancia* (i.e, que la amplitud de la respuesta crezca sin restricciones). Esto causaría que el resorte falle y se rompa.

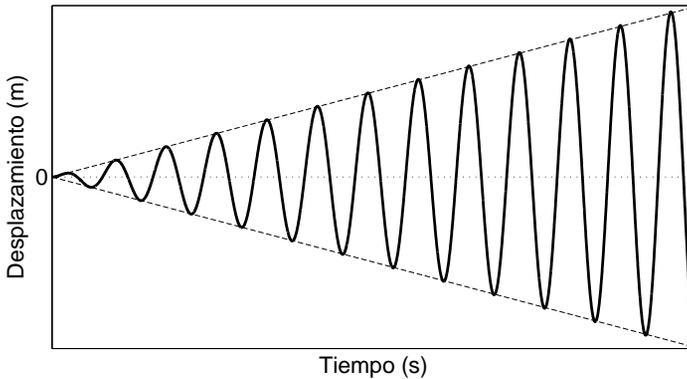


Figura 2.4: Respuesta forzada de un sistema masa-resorte excitado en su frecuencia natural ( $\omega = \omega_n$ ), denominada resonancia

## 2.2. Excitación armónica en sistemas amortiguados

La ecuación de movimiento para un sistema masa-resorte amortiguado con excitación armónica, está dado por,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.21)$$

dividiendo por  $m$ ,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.22)$$

donde,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ,  $\zeta = c/(2m\omega_n)$  y  $f_0 = F_0/m$ . El calculo de la solución particular para el caso amortiguado, es similar a la del caso sin amortiguamiento y se determina por el método de los coeficientes indeterminados.

De ecuaciones diferenciales se sabe que la respuesta forzada de un sistema amortiguada, tiene la misma forma de la fuerza armónica. La respuesta tiene la misma frecuencia que la fuerza de excitación con una amplitud y fase distintas. El desfase entre la respuesta y la excitación se produce debido al efecto de la fuerza de amortiguamiento. Siguiendo el método de los coeficientes indeterminados, se asume una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta) \tag{2.23}$$

Para simplificar los cálculos, esta solución se puede escribir como:

$$x_p(t) = A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t) \tag{2.24}$$

donde las constantes  $A_s = X \cos \theta$  y  $B_s = X \sin \theta$ , satisfacen:

$$X = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{B_s}{A_s} \tag{2.25}$$

Derivando  $x_p(t)$  y reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$(-\omega^2 A_s + 2\zeta\omega_n\omega B_s + \omega_n^2 A_s - f_0) \cos \omega t + (-\omega^2 B_s - 2\zeta\omega_n\omega A_s + \omega_n^2 B_s) \sin \omega t = 0 \tag{2.26}$$

Esta ecuación se debe cumplir para todo  $t$ , en particular, se debe cumplir para  $t = 0$  y  $t = \pi/2\omega$ . Reemplazado estos dos tiempos se llega a las siguientes dos ecuaciones:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)A_s + (2\zeta\omega_n\omega)B_s = f_0 \tag{2.27}$$

$$(-2\zeta\omega_n\omega)A_s + (\omega_n^2 - \omega^2)B_s = 0 \tag{2.28}$$

Despejando,

$$A_s = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{2.29}$$

$$B_s = \frac{2\zeta\omega_n\omega f_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{2.30}$$

Substituyendo en las ecuaciones 2.25 y 2.23:

$$x_p(t) = \frac{\overbrace{f_0}^X}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \overbrace{\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}}^\theta\right) \tag{2.31}$$

En el caso que la fuerza de excitación sea de la forma  $F_0 \text{sen}(\omega t)$ , la solución particular viene dada por:

$$x_p(t) = \frac{\overbrace{f_0}^X}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \text{sen}\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\overbrace{2\zeta\omega_n\omega}^\theta}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (2.32)$$

La solución total, es entonces, la suma de la solución particular y la solución homogénea (ecuación 1.42):

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) + X \cos(\omega t - \theta) \quad (2.33)$$

donde  $X$  y  $\theta$  son los coeficientes de la solución particular definidos en la ecuación 2.31 y  $A$  y  $\theta$  vienen dados por las condiciones iniciales. Notar que para valores de  $t$  grandes, el primer termino tiende a cero, mientras que la solución total se acerca a la solución particular. La solución particular se denomina *respuesta estacionaria* y al primer termino se le denomina *respuesta transiente*.

Para un desplazamiento y velocidad inicial  $x_0$  y  $v_0$ , los coeficientes  $A$  y  $\phi$  vienen dados por:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_d(x_0 - X \cos \theta)}{v_0 + (x_0 - X \cos \theta)\zeta\omega_n - \omega X \text{sen} \theta} \quad (2.34)$$

$$A = \frac{x_0 - X \cos \theta}{\text{sen} \phi} \quad (2.35)$$

En la Figura 2.5 se ilustra la respuesta de un sistema masa-resorte amortiguado a una excitación armónica. La repuesta esta compuesta de una zona transiente y una zona estacionaria. La duración de la respuesta transiente depende del factor de amortiguamiento, mientras mayor es el amortiguamiento menor es la duración de la parte transiente.

Muchas veces se decide ignorar la respuesta transiente, esto tiene sentido cuando su duración es breve. Sin embargo, la decisión de ignorar la parte transiente se debe basar en la aplicación. En algunas aplicaciones, tales como sismos, la respuesta transiente se vuelve más importante que la respuesta estacionaria. La respuesta transiente también puede ser muy importante si su magnitud es alta. Usualmente, los sistemas se diseñan y analizan basándose en la respuesta estacionaria, pero la respuesta transiente se debe revisar siempre para asegurar que puede ser ignorada o en caso contraria considerarla en el análisis.

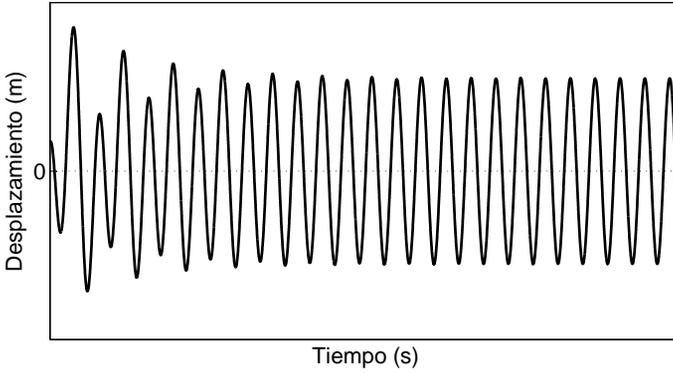


Figura 2.5: Respuesta de un sistema amortiguado con  $\omega_n = 1$  rad/s y  $\zeta = 0,1$  a una excitación armónica de  $\omega = 2$  rad/s

Teniendo esto último en consideración, es importante estudiar la magnitud,  $X$ , y fase  $\theta$  de la respuesta estacionaria, la que es función de la frecuencia de excitación. De la ecuación 2.31 se tiene la amplitud y fase de la respuesta estacionaria:

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \tag{2.36}$$

Factorizando por  $\omega^2$  y dividiendo la magnitud por  $f_0$ , se obtiene que:

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{X\omega_n^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \tag{2.37}$$

Donde  $r = \omega/\omega_n$  es la razón de frecuencias. En la Figura 2.6 se ilustran la magnitud y fase para distintos valores del factor de amortiguamiento  $\zeta$ .

De la Figura 2.6 se puede ver que, para los casos de amortiguamiento ligero ( $\zeta \leq 0,1$ ), la magnitud de la respuesta alcanza su valor máximo cuando la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia natural ( $r = 1$ ). También se observa un cambio de fase alrededor de la resonancia.

Es importante destacar el cambio en la amplitud de la respuesta en función del factor de amortiguamiento. En la Figura 2.7 se ilustra el mismo gráfico de la amplitud anterior, pero ahora en escala logarítmica. Se observa que a medida que aumenta la razón de amortiguamiento el peak en la curva de magnitud disminuye y eventualmente desaparece. En caso contrario, cuando el amortiguamiento disminuye, el valor del peak aumenta y la curva se vuelve más puntiaguda. En el límite, cuando el amortiguamiento es cero el peak tiende a infinito. Vale la pena resaltar que la magnitud de la respuesta varía ordenes de magnitud con el amortiguamiento.

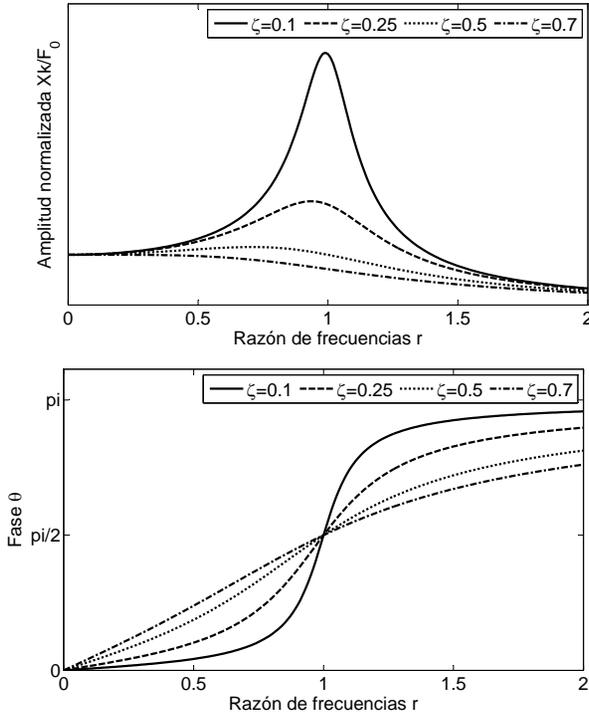


Figura 2.6: Gráfico de (a) la amplitud normalizada  $X\omega_n^2/f_0$  and (b) la fase de la respuesta estacionaria de un sistema amortiguado versus la razón de frecuencias, para distintos valores de la razón de amortiguamiento  $\zeta$

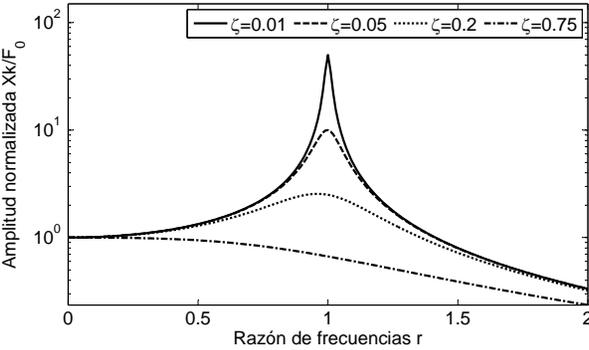


Figura 2.7: Gráfico logarítmico de la amplitud normalizada  $X\omega_n^2/f_0$  versus la razón de frecuencias  $r$ , para distintos valores de la razón de amortiguamiento  $\zeta$

Se debe notar que el fenómeno de resonancia ocurre cuando  $\omega = \omega_n$  (i.e, cuando la frecuencia de excitación se iguala a la frecuencia natural). Esto también corresponde con un cambio de fase de  $90^\circ$ . La resonancia, sin embargo, no corresponde exactamente al valor de  $\omega$  que maximiza la amplitud de la respuesta estacionaria. Lo que se muestra a continuación.

La magnitud de la respuesta estacionaria viene dada por la siguiente ecuación:

$$X = \frac{f_0}{\omega_n^2 \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.38)$$

derivando con respecto a  $r$  e igualando a cero:

$$\frac{dX}{dr} = -\frac{f_0}{\omega_n^2} \frac{1}{2((1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2)^{3/2}} [-4r(1-r^2) + 8\zeta^2 r] = 0 \quad (2.39)$$

entonces la frecuencia en donde ocurre la amplitud máxima viene dada por:

$$r_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (2.40)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (2.41)$$

Esta relación se cumple solo para sistemas con una razón de amortiguamiento menor a  $1/\sqrt{2}$ . En caso contrario, la magnitud no tiene un máximo.

# Capítulo 3

## Excitación en la base

Frecuentemente se tienen equipos o partes de equipos que son excitados armónicamente a través de una base elástica, la que puede ser modelada por resortes y amortiguadores. Por ejemplo, la suspensión de un automóvil que es excitada armónicamente por la superficie del camino, la que se puede modelar por un resorte lineal en paralelo a un amortiguador viscoso. Otros ejemplos son las gomas de montaje de motores que separan el motor del automóvil de su marco o el motor de un avión de sus alas. Tales sistemas se pueden modelar considerando que el sistema es excitado por el movimiento de la base. Este problema de excitación por la base es ilustrado en la Figura 3.1.

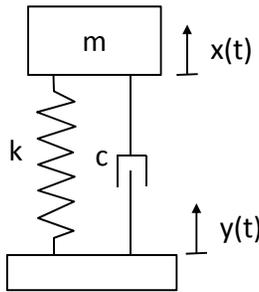


Figura 3.1: Sistema masa-resorte con excitación en la base

La ecuación de movimiento para este sistema viene dada por:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{3.1}$$

Se asume una excitación armónica en la base:

$$y(t) = Y \operatorname{sen} \omega_b t \quad (3.2)$$

donde  $Y$  denota la amplitud del movimiento de la base y  $\omega_b$  representa la frecuencia de oscilación de la base. Sustituyendo  $y(t)$  en la ecuación 3.1, se obtiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cY\omega_b \cos \omega_b t + kY \operatorname{sen} \omega_b t \quad (3.3)$$

Esto se puede ver como un sistema masa-resorte con dos fuerzas de excitación. Esta expresión es muy similar a la vista en la ecuación 2.21 con  $F_0 = cY\omega_b$  y  $\omega = \omega_b$ , a excepción del termino extra  $kY \operatorname{sen} \omega_b t$ . Se puede aprovechar el hecho que la ecuación 3.3 es lineal, y por lo tanto la solución viene dada por la suma de dos soluciones particulares; la solución obtenida por la fuerza de excitación  $cY\omega_b \cos \omega_b t$ ,  $x_p^{(1)}$ , y la solución obtenida por la fuerza de excitación  $kY \operatorname{sen} \omega_b t$ ,  $x_p^{(2)}$ .

El calculo de las soluciones particulares viene directo de los cálculos hechos en la sección 2.2. Dividiendo la ecuación 3.3 por  $m$ :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2(x) = 2\zeta\omega_n\omega_b Y \cos \omega_b t + \omega_n^2 Y \operatorname{sen} \omega_b t \quad (3.4)$$

Por lo tanto, sustituyendo  $f_0 = 2\zeta\omega_n\omega_b Y$  en la ecuación 2.31, se obtiene la solución particular  $x_p^{(1)}$ :

$$x_p^{(1)} = \frac{2\zeta\omega_n\omega_b Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} \cos(\omega_b t - \theta_1) \quad (3.5)$$

con

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega_b}{\omega_n^2 - \omega_b^2} \quad (3.6)$$

Para calcular  $x_p^{(2)}$ , se utiliza el método de los coeficientes indeterminados con una excitación armónica de la forma  $\omega_n^2 Y \operatorname{sen} \omega_b t$ . El resultado es el siguiente:

$$x_p^{(2)} = \frac{\omega_n^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} \operatorname{sen}(\omega_b t - \theta_1) \quad (3.7)$$

Utilizando el principio de superposición lineal, la solución total es la suma de ambas soluciones (i.e.,  $x_p = x_p^{(1)} + x_p^{(2)}$ ). Sumando ambas soluciones,

$$x_p(t) = \omega_n Y \left[ \frac{\omega_n^2 + (2\zeta\omega_b)^2}{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2} \right]^{1/2} \cos(\omega_b t - \theta_1 - \theta_2) \quad (3.8)$$

con

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{\omega_n}{2\zeta\omega_b} \tag{3.9}$$

Definiendo como  $X$  a la magnitud de la solución particular  $x_p(t)$ , se puede definir la razón entre la amplitud de la respuesta,  $X$ , y la de la excitación,  $Y$ , como:

$$\frac{X}{Y} = \omega_n \left[ \frac{\omega_n^2 + (2\zeta\omega_b)^2}{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \tag{3.10}$$

donde  $r = \omega_b/\omega_n$ . Esta razón se denomina *transmisibilidad de desplazamientos* y se usa para describir como el movimiento es transmitido desde la base a la masa, en función de la razón de frecuencias  $\omega_b/\omega_n$ .

En la Figura 3.2 se ilustra la transmisibilidad de desplazamientos. Se observa que la máxima transmisibilidad ocurre en la resonancia  $\omega_b = \omega_n$ , es en ese punto donde se transmite la mayor cantidad de movimiento desde la base. También se ve que para  $r < \sqrt{2}$ , la transmisibilidad es mayor a 1. Esto indica que para esas combinaciones de  $\omega_n$  y  $\omega_b$ , el movimiento de la masa es una amplificación del movimiento de la base. Notar que en este rango, para un cierto valor de  $r$ , la razón de amortiguamiento determina el nivel de amplificación. Específicamente, mientras mayor es  $\zeta$ , menor es la transmisibilidad.

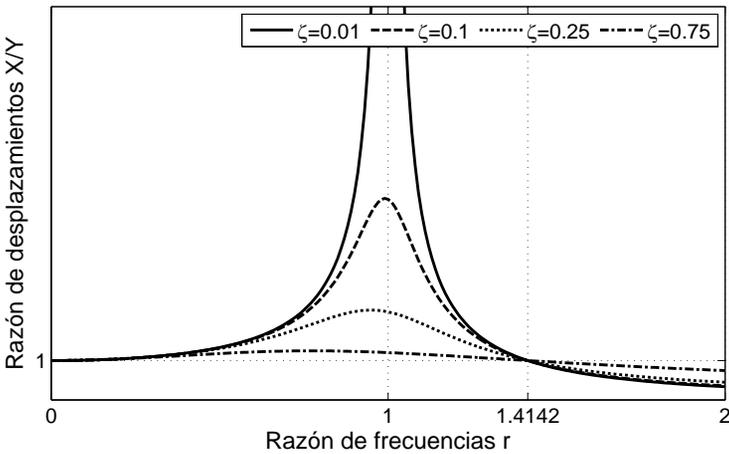


Figura 3.2: Transmisibilidad de desplazamientos en función de la razón de frecuencias

Para valores de  $r > \sqrt{2}$ , la transmisibilidad es siempre menor a 1. Esto implica que el movimiento de la masa tiene una amplitud menor que la amplitud

del movimiento de la base. En este rango de frecuencias más altas el efecto del amortiguamiento es exactamente el opuesto del caso con frecuencias bajas. Aumentar el amortiguamiento, en realidad, aumenta la transmisibilidad del sistema. El rango de frecuencias definidas por  $r > \sqrt{2}$  forman el concepto de aislamiento de las vibraciones.

Otra variable de interés en el problema de excitación en la base es la fuerza transmitida a la masa como resultado del desplazamiento armónico de la base. La fuerza se transmite a través del resorte y amortiguador:

$$F(t) = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) \quad (3.11)$$

estas fuerzas se deben equilibrar con la fuerza inercial de la masa, por lo tanto:

$$F(t) = -m\ddot{x} \quad (3.12)$$

Para el estado estacionaria, la solución para  $x$  viene dada por la ecuación 3.8. Diferenciando esta ecuación dos veces y sustituyéndola en la ecuación 3.12, se obtiene:

$$F(t) = m\omega_b^2\omega_n Y \left[ \frac{\omega_n^2 + (2\zeta\omega_b)^2}{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2} \right]^{1/2} \cos(\omega_b t - \theta_1 - \theta_2) \quad (3.13)$$

Usando de nuevo la razón de frecuencias, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$F(t) = F_T \cos(\omega_b t - \theta_1 - \theta_2) \quad (3.14)$$

donde la magnitud de la fuerza transmitida,  $F_T$ , viene dada por,

$$F_T = kYr^2 \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

La ecuación 3.15 sirve para definir la *transmisibilidad de fuerzas* como la razón:

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

Esta transmisibilidad de fuerzas,  $F_T/kY$ , entrega una medida adimensional de como el desplazamiento en la base de amplitud  $Y$  resulta en una fuerza aplicada sobre la masa.

En la Figura 3.3 se ilustra la transmisibilidad de fuerzas en función de la razón de frecuencias. Se debe notar a diferencia de la transmisibilidad de desplazamientos, la transmisibilidad de fuerzas no necesariamente disminuye para  $r > \sqrt{2}$ . De hecho, mientras el amortiguamiento aumenta, la transmisibilidad de fuerzas aumenta drásticamente para  $r > \sqrt{2}$ .

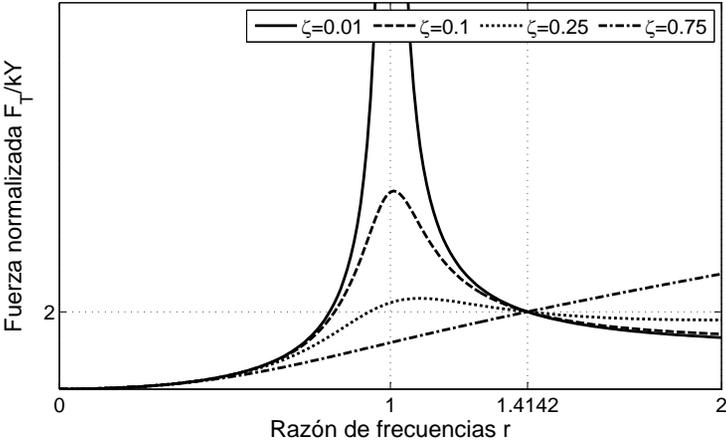


Figura 3.3: Transmisibilidad de fuerzas en función de la razón de frecuencias

# Capítulo 4

## Desbalance rotatorio

Una fuente usual de vibraciones son los equipos rotatorios. Pequeñas irregularidades en la distribución de la masa de un componente rotatorio puede causar altas vibraciones. Esto se conoce como *desbalance rotatorio*. En la Figura 4.1 se ilustra un esquema de sistema con un desbalance rotatorio de masa  $m_0$  y distancia desde el centro de rotación  $e$  (excentricidad).

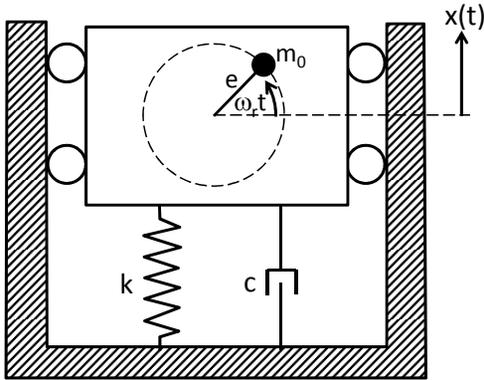


Figura 4.1:

La frecuencia de rotación del equipo se denomina por  $\omega_r$ . Por suma de fuerzas se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m_0\ddot{x}_r \tag{4.1}$$

donde  $x_r$  es la coordenada en  $x$  del desbalance con respecto al centro de rotación y se calcula como:  $x_r = e \operatorname{sen} \omega_r t$ . Reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e \omega_r^2 \operatorname{sen} \omega_r t \quad (4.2)$$

La solución de esta ecuación esta dada en la ecuación 2.32, con  $f_0 = m_0 e \omega_r^2 / m$ . La solución particular es de la forma:

$$x_p(t) = X \operatorname{sen}(\omega_r t - \theta) \quad (4.3)$$

Definiendo  $r = \omega_r / \omega_n$  como antes, se obtiene:

$$X = \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4.4)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (4.5)$$

Estas dos expresiones nos entregan la magnitud y fase del movimiento de la masa  $m$ , debido a un desbalance rotatorio de masa  $m_0$ . Notar que la masa  $m$  en la ecuación 4.4 es la masa total del sistema e incluye el desbalance  $m_0$ .

En la Figura 4.2 se muestra como varía la magnitud normalizada de la respuesta en función de la razón de amortiguamiento para distintos niveles de amortiguamiento. Esta amplitud cumple que para  $\zeta > 1$  toma un valor siempre menor a uno. Esto indica que se puede suprimir la amplificación de la respuesta causada por desbalance si se aumenta el amortiguamiento. Sin embargo, no es siempre práctico el uso de amortiguamientos altos. Se puede ver de la Figura 4.2 que la magnitud de la amplitud normalizada se acerca a uno para valores de  $r$  grandes independiente de la amortiguación. Por lo tanto, para valores de  $r$  grandes la selección del coeficiente de amortiguamiento no es importante.

El problema de desbalance rotatorio se puede ver también en el caso de un automóvil con una rueda desbalanceada. En donde,  $\omega_r$  viene dado por la velocidad del auto y  $e$  por el diámetro de la ruda. La deflexión  $x_p$  se transmite por la dirección y se siente como una vibración del volante. Esto ocurre usualmente a una cierta velocidad (cercana a  $r = 1$ ). Si el conductor aumenta o reduce la velocidad, la vibración del volante se reduce.

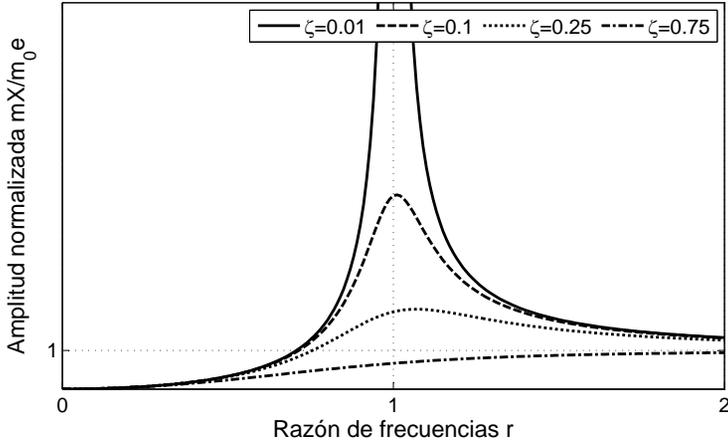


Figura 4.2: Magnitud normalizada del desplazamiento en función de la razón de frecuencias, causado con un desbalance rotatorio

### 4.1. Balanceo en un plano (estático)

Consideremos el caso de un sistema desbalanceado. El desbalance se puede representar como una fuerza centrífuga actuando sobre la masa  $m_0$ , como se muestra en la Figura 4.3. Si el sistema estuviese balanceado, no habrían fuerzas resultantes. Por lo tanto, la fuerza necesaria para balancear debe ser de igual magnitud pero sentido contrario al desbalance. Esto equivale a colocar una masa equivalente en la ubicación opuesta al desbalance.

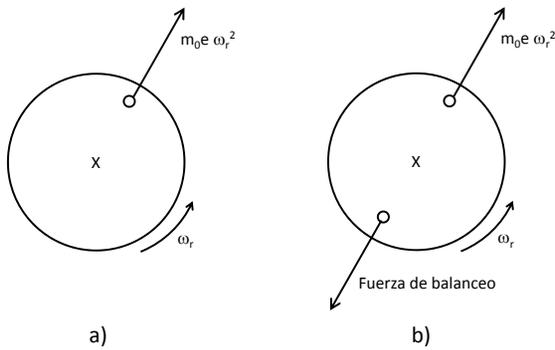


Figura 4.3: Ejemplo de balanceo estático

## 4.2. Balanceo en dos planos (dinámico)

Consideremos dos masas balanceadas estáticamente como se muestra en la figura 4.4, pero que están actuando en distintas ubicaciones en un eje.

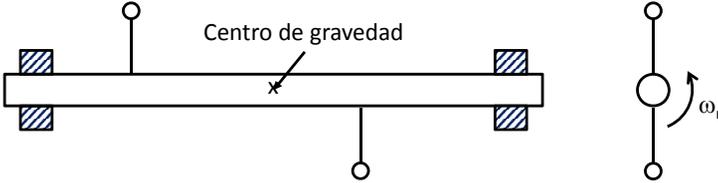


Figura 4.4: Rotor con desbalance dinámico

Es claro, que aunque haya balance estático las fuerzas van a ejercer un momento sobre el centro de rotación. En este caso, el problema se resuelve al añadir una fuerza opuesta en cada ubicación del desbalance, como se ilustra en la figura 4.5.

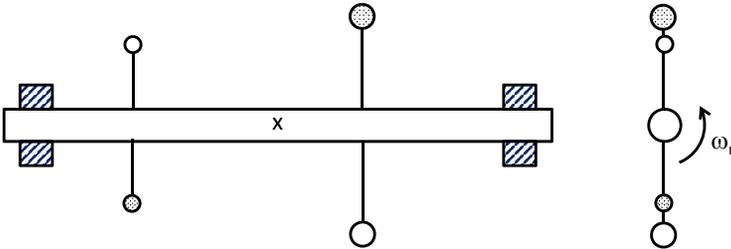


Figura 4.5: Sistema con balanceo estático y dinámico

En algunos casos las masas para balancear no se pueden colocar en los mismos planos del desbalance, en ese caso se deben equilibrar fuerzas y momentos. Esto queda más claro con el siguiente ejemplo.

Consideremos el sistema de la figura 4.6, el que se debe balancear colocando masas de balanceo en los planos A y B. Los valores de las masas de balanceo estático y dinámico se obtienen al proyectar las fuerzas en los ejes  $x$  e  $y$ , y luego haciendo

equilibrio de fuerzas y momentos,

$$-cm_A r_A \operatorname{sen} \theta_A - am_2 r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + bm_1 r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + dm_B r_B \operatorname{sen} \theta_B = 0$$

$$-cm_A r_A \operatorname{cos} \theta_A - am_2 r_2 \operatorname{cos} \theta_2 + bm_1 r_1 \operatorname{cos} \theta_1 + dm_B r_B \operatorname{cos} \theta_B = 0$$

$$m_A r_A \operatorname{sen} \theta_A + m_2 r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + m_1 r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + m_B r_B \operatorname{sen} \theta_B = 0$$

$$m_A r_A \operatorname{cos} \theta_A + m_2 r_2 \operatorname{cos} \theta_2 + m_1 r_1 \operatorname{cos} \theta_1 + m_B r_B \operatorname{cos} \theta_B = 0$$

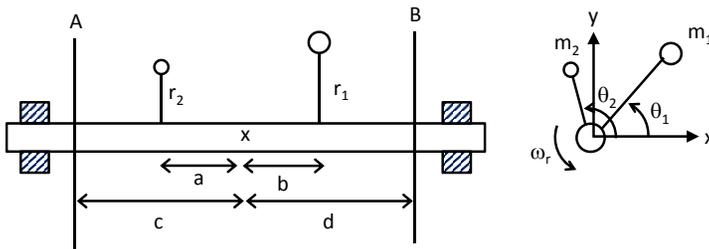


Figura 4.6: Sistema con balanceo estático y dinámico en planos arbitrarios

# Capítulo 5

## Respuesta a un impulso

Una fuente usual de vibraciones es la aplicación de una fuerza de corta duración denominada impulso. Una excitación tipo impulso es una fuerza aplicada por un periodo muy breve, o infinitesimal, de tiempo y representa un ejemplo de una *carga de impacto*. Un impulso corresponde a una fuerza no periódica. La respuesta de un sistema a un impulso, es idéntica a la respuesta libre del sistema a una cierta condición inicial.

Consideremos una representación matemática de un impulso. Esta se puede describir de acuerdo a la siguiente relación:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \tau - \epsilon \\ \frac{\hat{F}}{2\epsilon} & \tau - \epsilon \leq t \leq \tau + \epsilon \\ 0 & t \geq \tau + \epsilon \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\epsilon$  es un numero pequeño y  $\tau$  corresponde al tiempo en que se aplica la fuerza. Esta fuerza se ilustra gráficamente en la Figura 5.1.

Integrando la fuerza en el tiempo se obtiene la definición de impulso:

$$I(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \frac{\hat{F}}{2\epsilon} 2\epsilon = \hat{F} \quad (5.2)$$

independiente del valor de  $\epsilon$  siempre que  $\epsilon \neq 0$ . En el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la integral toma el valor  $I(\epsilon) = \hat{F}$ .

Si la magnitud de  $\hat{F}$  es igual a 1, se denomina impulso unitario  $\delta(t)$ , también conocido como la *función delta de Dirac*.

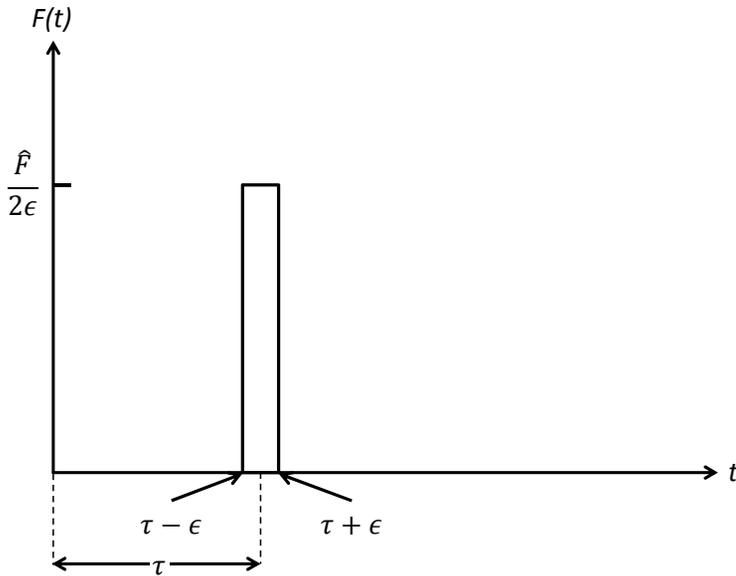


Figura 5.1: Fuerza tipo impulso en el tiempo

La respuesta a un impulso para un sistema de un grado de libertad inicialmente en reposo, se puede determinar aprovechando el hecho que un impulso produce un cambio de momentum al cuerpo. Para simplificar el análisis, consideremos  $\tau = 0$  en la definición del impulso. Este instante de tiempo lo denotaremos como  $0^-$ . Dado que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, las condiciones iniciales son ambas cero:  $x(0^-) = \dot{x}(0^-) = 0$ . Por lo tanto, luego del golpe el cambio de momentum es  $m\dot{x}(0^+) - m\dot{x}(0^-) = mv_0$ . De manera que  $\hat{F} = F\Delta t = mv_0 - 0 = mv_0$ , mientras que el desplazamiento inicial se mantiene en cero. Por lo tanto, un impulso aplicado a un sistema de un grado de libertad, es lo mismo que aplicar una condición inicial de desplazamiento cero y velocidad inicial de  $v_0 = \hat{F}/m$ .

Para un sistema con amortiguamiento débil ( $0 < \zeta < 1$ ), la respuesta a las condiciones iniciales  $x_0 = 0, v_0 = \hat{F}/m$  es de la forma:

$$x(t) = \frac{\hat{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \text{sen } \omega_d t \quad (5.3)$$

de acuerdo a las ecuaciones 1.42, 1.45 y 1.47. Es conveniente escribir la ecuación anterior como:

$$x(t) = \hat{F}h(t) \quad (5.4)$$

donde  $h(t)$  viene dada por,

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t \tag{5.5}$$

Notar que  $h(t)$  es la repuesta a un impulso unitario en  $t = 0$ . Si se aplica en  $t = \tau$ ,  $\tau \neq 0$ , se puede escribir como:

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t - \tau), \quad \tau > 0, \quad t \geq \tau \tag{5.6}$$

Las funciones  $h(t)$  y  $h(t - \tau)$  se denominan función de respuesta a un impulso.

En la practica, una fuerza es considerada un impulso si su duración  $\Delta t$  es muy breve en comparación con el periodo,  $T = 2\pi/\omega_n$ , asociado con la frecuencia natural de la estructura. En la Figura 5.2 se ilustra una respuesta a un impulso típica para un sistema de un grado de libertad.

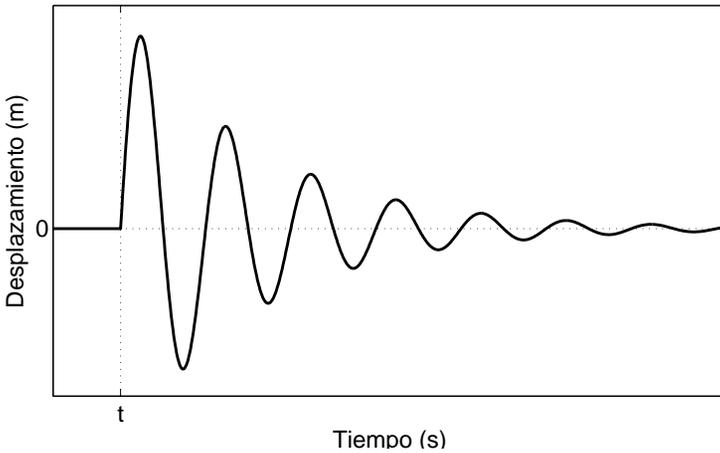


Figura 5.2: Respuesta de un sistema de un grado de libertad a un impulso en un tiempo  $t$

En el diseño de sistemas sometidos a fuerzas tipo impulso o escalón, se pueden definir tres parámetros que miden la calidad de la respuesta: (1) el tiempo en alcanzar la amplitud máxima, denominado  $t_p$ , (2) la máxima amplitud de la respuesta con respecto a la respuesta estacionaria, denominado *sobresalto*, (3) y el *tiempo de establecimiento*,  $t_s$ , que corresponde al tiempo que tarda la respuesta en permanecer dentro de un cierto porcentaje de la respuesta estacionaria.

# Capítulo 6

## Respuesta a una fuerza arbitraria

La respuesta de un sistema de un grado de libertad a una fuerza arbitraria, se puede calcular utilizando el concepto de impulso visto en la sección anterior. El procedimiento es dividir la fuerza de excitación en un conjunto de impulsos infinitesimales, calcular la respuesta a estos impulsos y sumar las respuestas individuales para calcular la respuesta total. Esto se ilustra en la Figura 6.1, en donde se muestra una fuerza arbitraria dividida en  $n$  intervalos.

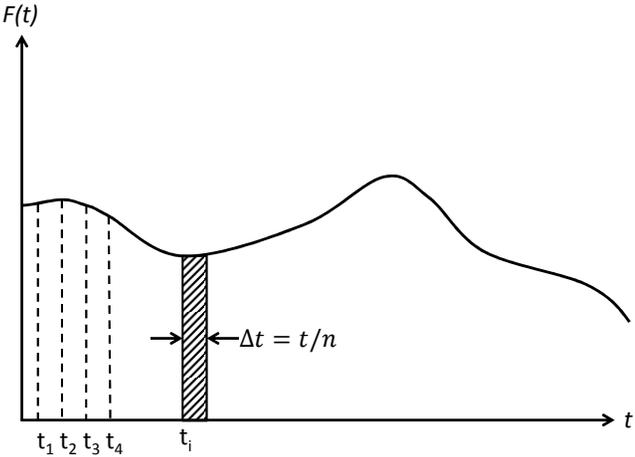


Figura 6.1: Fuerza de excitación arbitraria dividida en  $n$  impulsos

La respuesta al impulso en  $t_i$  viene dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta x(t_i) = F(t_i)h(t - t_i)\Delta t \quad (6.1)$$

de manera que la respuesta total luego de  $j$  intervalos es la suma de las respuesta individuales:

$$x(t_j) = \sum_{i=1}^j F(t_i)h(t - t_i)\Delta t \quad (6.2)$$

En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), la respuesta total viene dada por:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.3)$$

Esta integral se conoce como *integral de convolución*. Una convolución es simplemente la integral del producto de dos funciones, una de las cuales esta desplazada con respecto a la variable de integración. Se puede demostrar que la convolución cumple la siguiente propiedad:

$$\int_0^t F(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t F(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (6.4)$$

Para un sistema con amortiguamiento débil la respuesta a un impulso viene dada por la ecuación 5.6. Substituyendo en la ecuación 6.3, se obtiene la respuesta un sistema de un grado de libertad a una fuerza arbitraria  $F(t)$ :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \text{sen}[\omega_d(t - \tau)] d\tau \quad (6.5)$$

$$= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(t - \tau) e^{-\zeta\omega_n \tau} \text{sen}(\omega_d \tau) d\tau \quad (6.6)$$

siempre que las condiciones iniciales sean cero.

Como ejemplo, se puede estudiar la respuesta de un sistema de un grado de libertad a una fuerza tipo escalón, como la mostrada en la Figura 6.2. Esta fuerza se puede escribir por la siguiente relación:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (6.7)$$

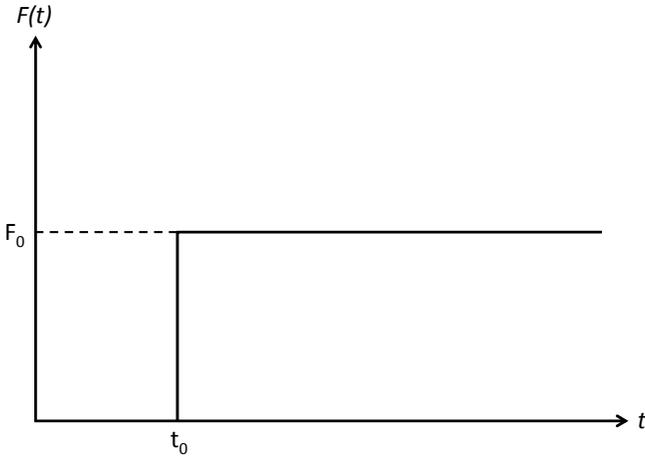


Figura 6.2: Fuerza tipo escalón de magnitud  $F_0$  aplicada en  $t = t_0$

Aplicando la integral de convolución dada en la ecuación 6.5, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \int_0^{t_0} (0) e^{\zeta\omega_n \tau} \text{sen} [\omega_d(t - \tau)] d\tau + \int_{t_0}^t F_0 e^{\zeta\omega_n \tau} \text{sen} [\omega_d(t - \tau)] d\tau \right] \\
 &= \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_{t_0}^t e^{\zeta\omega_n \tau} \text{sen} [\omega_d(t - \tau)] d\tau \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Usando una tabla de integrales para evaluar esta expresión se obtiene:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos [\omega_d(t - t_0) - \theta], \quad t \geq t_0 \quad (6.9)$$

donde,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.10)$$

Examinando la respuesta, es claro que para tiempos grandes, el segundo termino desaparece y la respuesta estacionaria es simplemente:

$$x_s(t) = \frac{F_0}{k} \quad (6.11)$$

De hecho, la respuesta consiste en un escalón de magnitud  $F_0/k$ , más una oscilación decreciente, como se ilustra en la Figura 6.3.

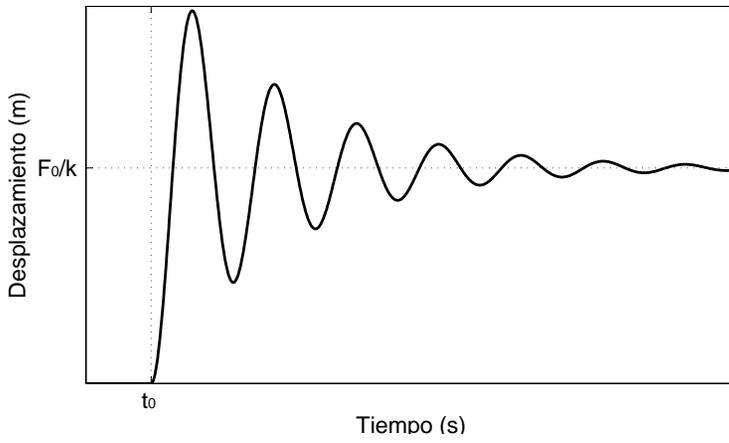


Figura 6.3: Respuesta de un sistema de un grado de libertad a una fuerza tipo escalón de magnitud  $F_0$  aplicada en  $t = t_0$

# Capítulo 7

## Respuesta a una fuerza periódica arbitraria

En la sección 2 se estudió la respuesta de un sistema a una excitación armónica. El término armónico se refiere a una función sinusoidal. Ahora veremos el caso de una función periódica cualquiera. Una función periódica es cualquier función que se repita en el tiempo, es decir, cualquier función para la cual existe un tiempo fijo,  $T$ , denominado periodo que cumple que  $f(t + T) = f(t)$  para todo  $t$ . En la Figura 7.1 se ilustra un ejemplo de una función periódica general de periodo  $T$ . Notar de la figura que la función no parece periódica si se examina un tiempo menor a  $T$ , sin embargo, la función si se repite cada  $T$  segundos.

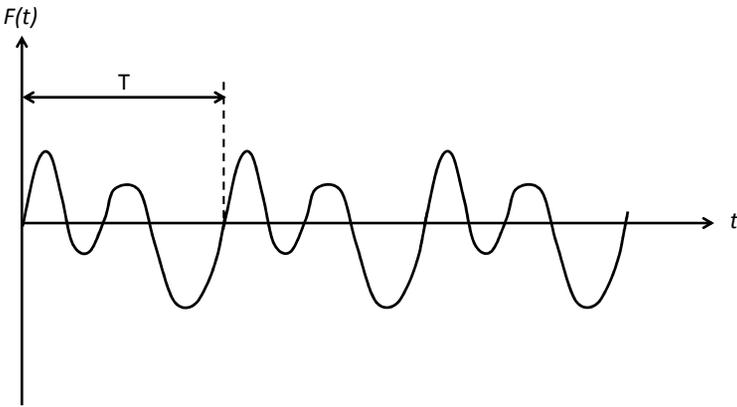


Figura 7.1: Ejemplo de una función periódica general de periodo  $T$

De acuerdo a la teoría desarrollada por Fourier, cualquier función periódica  $F(t)$ , con periodo  $T$ , se puede representar por una serie infinita de la forma:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sen n\omega_T t) \tag{7.1}$$

donde  $\omega_T = 2\pi/T$ , los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  para una función periódica  $F(t)$  se determinan de acuerdo a las siguientes formulas:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \tag{7.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_T t dt, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sen n\omega_T t dt, \quad n = 1, 2, \dots \tag{7.4}$$

Notar que el primer coeficiente  $a_0$  es dos veces el promedio de la función  $F(t)$  sobre un ciclo. Los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se denominan *coeficientes de Fourier*, y la serie definida en la ecuación 7.1 se denomina *serie de Fourier*.

La serie de Fourier es muy útil y relativamente fácil de trabajar debido a una propiedad especial de las funciones trigonométricas usadas en la serie. Esta propiedad, llamada *ortogonalidad*, cumple con lo siguiente:

$$\int_0^T \sen m\omega_T t \sen n\omega_T t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\int_0^T \cos m\omega_T t \cos n\omega_T t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases} \tag{7.6}$$

$$\int_0^T \cos m\omega_T t \sen n\omega_T t dt = 0 \tag{7.7}$$

Dado que una función periódica se puede representar como una suma de senos y cosenos y que el sistema en estudio es lineal, entonces la respuesta viene dada por la suma de las respuestas a los términos individuales de la serie. Por lo tanto, la solución particular  $x_p(t)$  de:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{7.8}$$

donde  $F(t)$  es periódica, se puede escribir como:

$$x_p(t) = x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cn}(t) + x_{sn}(t)] \tag{7.9}$$

En este caso la solución particular  $x_1(t)$  satisface la ecuación:

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = \frac{a_0}{2} \tag{7.10}$$

la solución particular  $x_{cn}(t)$  satisface la ecuación:

$$m\ddot{x}_{cn} + c\dot{x}_{cn} + kx_{cn} = a_n \cos n\omega_T t \tag{7.11}$$

para todos los valores de  $n$ , y la solución particular  $x_{sn}(t)$  satisface la ecuación:

$$m\ddot{x}_{sn} + c\dot{x}_{sn} + kx_{sn} = b_n \sen n\omega_T t \tag{7.12}$$

para todos los valores de  $n$ .

La solución de la ecuación 7.10 se calculó en el capítulo 6, corresponde a la solución estacionaria con  $F_0 = a_0/2$ :

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2k} \tag{7.13}$$

La solución de las ecuaciones 7.11 y 7.12 se determinó en la sección 2.2. Reemplazando se obtiene:

$$x_{cn}(t) = \frac{a_n/m}{\left[ (\omega_n^2 - (n\omega_T)^2)^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2 \right]^{1/2}} \cos(n\omega_T t - \theta_n) \tag{7.14}$$

$$x_{sn}(t) = \frac{b_n/m}{\left[ (\omega_n^2 - (n\omega_T)^2)^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2 \right]^{1/2}} \sen(n\omega_T t - \theta_n) \tag{7.15}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n n\omega_T}{\omega_n^2 - (n\omega_T)^2} \tag{7.16}$$

La solución total  $x(t)$  es la suma de la solución particular  $x_p(t)$  y la solución homogénea dada en la sección 2.2. Para el caso con amortiguamiento débil, la solución es:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sen(\omega_d t + \phi) + \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} [x_{cn}(t) + x_{sn}(t)] \tag{7.17}$$

donde  $A$  y  $\phi$  vienen dadas por las condiciones iniciales.

# Capítulo 8

## La transformada de Laplace

El método de la transformada de Laplace, es un método alternativo para determinar la respuesta de un sistema a una variedad de fuerzas de excitación, tanto periódicas como no periódicas. La utilidad de la transformada de Laplace para determinar la solución de ecuaciones diferenciales, en particular para encontrar la respuesta forzada depende de la disponibilidad de una tabla tabulada con transformadas de Laplace. En ese caso, para determinar la respuesta solo son necesarias manipulaciones algebraicas y usar una tabla de transformadas de Laplace.

Por definición la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  viene dada por:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8.1)$$

La variable  $s$  es un número complejo. La transformada de Laplace tiene la ventaja de transformar diferenciaciones en multiplicaciones, como se muestra a continuación:

$$L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0) \quad (8.2)$$

$$L[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (8.3)$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación general de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (8.4)$$

Se obtiene:

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s) \quad (8.5)$$

donde  $X(s)$  y  $F(s)$  son la transformada de Laplace del desplazamiento  $x(t)$  y de la fuerza de excitación  $F(t)$ , mientras que  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$  corresponden al desplazamiento y velocidad inicial respectivamente. Reordenando la ecuación anterior y recordando que  $c/m = 2\xi\omega_n$ ,  $k/m = \omega_n^2$

$$X(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} F(s) + \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} x(0) + \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}(0) \quad (8.6)$$

La solución  $x(t)$  viene dada por la transformada inversa de  $X(s)$ . Queda claro de la ecuación anterior que el método de Laplace entrega la solución particular y homogénea, tomando en consideración las condiciones iniciales. En la tabla 8.1 se muestran algunas transformadas de Laplace usuales.

Como ejemplo, se puede determinar la solución de la siguiente ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + kx = \Phi(t)$$

tomando la transformada de Laplace y asumiendo condiciones iniciales nulas:

$$(ms^2 + k)X(s) = \frac{1}{s}$$

despejando  $X(s)$ ,

$$X(s) = \frac{1}{s(ms^2 + k)} = \frac{1/m}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

Buscando la transformada inversa en la Tabla 8.1, se obtiene la solución del problema:

$$x(t) = \frac{1/m}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

la que coincide con la solución dada por la ecuación 6.9, cuando  $F_0 = 1$ ,  $\zeta = 0$  y  $t_0 = 0$ .

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$e^{-as}$	$\delta(t - a)$ , impulso unitario
$\frac{e^{-as}}{s}$	1, escalón unitario $\Phi(t - a)$
$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$	$\text{sen } \omega_n t$
$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$	$\text{cos } \omega_n t$
$\frac{1}{s(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2}(1 - \text{cos } \omega_n t)$
$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t, \zeta < 1, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi), \phi = \text{cos}^{-1} \zeta, \zeta < 1$
$\frac{1}{s(s + \omega_n)}$	$\frac{1}{\omega_n}(1 - e^{-\omega_n t})$
$\frac{1}{s^2(s + \omega_n)}$	$\frac{1}{\omega_n^2}(e^{-\omega_n t} + \omega_n t - 1)$

Tabla 8.1: Transformada de Laplace de algunas funciones usuales. (la función  $\Phi$  denota un escalón unitario)

## 8.1. Propiedades de la transformada de Laplace

**Linealidad:**

$$L[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s) \tag{8.7}$$

$$L^{-1}[aF(s) + bG(s)] = af(t) + bg(t) \tag{8.8}$$

**Primer Teorema de Traslación**

$$L[e^{at}f(t)] = F(s - a) \tag{8.9}$$

**Transformada de la integral**

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{8.10}$$

**Derivada de la transformada**

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n} \tag{8.11}$$

**Segundo teorema de Traslación:** Si  $\Phi(t - a)$  representa la función escalón unitario entonces,

$$L[f(t - a)\Phi(t - a)] = e^{-as}F(s) \tag{8.12}$$

**Transformada de una función periódica:** Si  $f(t)$  es una función periódica con período T,

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \tag{8.13}$$

## 8.2. Función de transferencia y función de respuesta en frecuencia

Reordenando la ecuación 8.5 se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{(ms^2 + cs + k)} = H(s) \tag{8.14}$$

Esta última ecuación representa la razón entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta) y la entrada (fuerza de excitación) para el caso de condiciones iniciales cero. Esta razón,  $H(s)$ , se denomina *función de transferencia* y nos entrega una herramienta muy útil en el análisis, diseño y medición de las vibraciones de un sistema.

Se debe recalcar que la variable  $s$  de la transformada de Laplace, es un número complejo. Si el valor de  $s$  se restringe al eje imaginario (i.e, si  $s = j\omega$ ), la función de transferencia se convierte en:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2 + j\omega c)} \tag{8.15}$$

la que se denomina *función de respuesta en frecuencia (FRF)*.

La Figura 8.1 muestra un gráfico de la amplitud y fase de una función de respuesta en frecuencia. Notar que el peak en la FRF se obtiene cuando  $\omega = \omega_d$ , a esta misma frecuencia la fase cambia en  $-180^\circ$ .

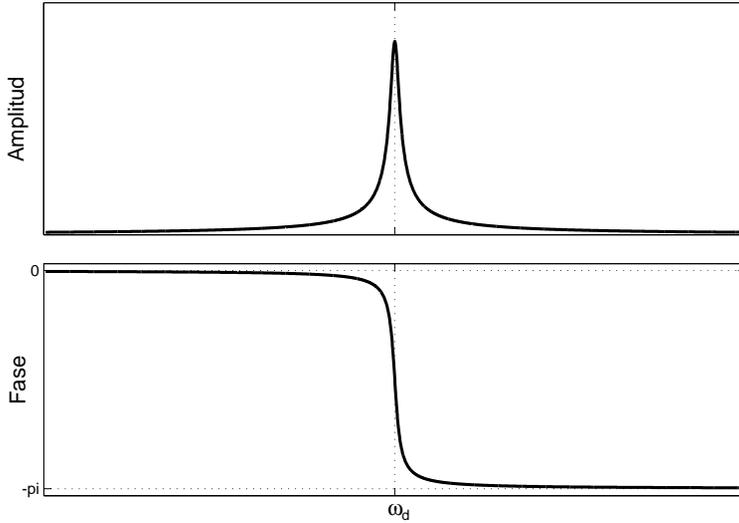


Figura 8.1: Función de respuesta en frecuencia para un sistema masa-resorte

## Capítulo 9

# Simulación numérica de la respuesta

En los capítulos anteriores se dedicó un gran esfuerzo en derivar expresiones analíticas para la respuesta de un sistema de un grado de libertad sometido a distintos tipos de fuerzas. Estas expresiones analíticas son muy útiles en diseño y para entender algunos de los fenómenos físicos. La solución también se puede obtener mediante por métodos numéricos como los algoritmos de integración numérica. Aunque las soluciones numéricas no son exactas, permiten determinar la solución de sistemas sometidos a fuerzas complejas que no tienen solución analítica.

En los procedimientos de integración temporal, la solución se divide en pasos de tiempo  $\Delta t$  y se determina la solución para cada paso de tiempo. Se han desarrollado varios métodos de integración numérica algunos usuales son; Euler, Runge-Kutta, Diferencias centrales y Newmark entre otros.

El método de las diferencias centrales utiliza la aproximación:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} (x(t - \Delta t) - 2x(t) + x(t + \Delta t)) \quad (9.1)$$

El error en la expansión de 9.1 es del orden de  $\Delta t^2$ , para tener el mismo orden de error en la expansión de la velocidad se utiliza:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2\Delta t} (x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)) \quad (9.2)$$

El desplazamiento en el tiempo  $t + \Delta t$  se obtiene al considerar la ecuación de movimiento en  $t$ :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (9.3)$$

Substituyendo, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}m + \frac{1}{2\Delta t}c\right)x(t+\Delta t) = f(t) - \left(k - \frac{2}{\Delta t^2}m\right)x(t) - \left(\frac{1}{\Delta t^2}m - \frac{1}{2\Delta t}c\right)x(t-\Delta t) \quad (9.4)$$

Se debe notar que para calcular  $x(t + \Delta t)$ , son necesarios  $x(t)$  y  $x(t - \Delta t)$ . Por lo tanto, se debe utilizar un procedimiento especial de inicialización. Dado que se conocen  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ ,  $x(0)$ , las ecuaciones 9.1 y 9.2 se pueden utilizar para calcular  $x(-\Delta t)$ :

$$x(-\Delta t) = x(0) - \Delta t\dot{x}(0) + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{x}(0) \quad (9.5)$$

En general, para llegar a soluciones estables se requiere un paso de tiempo relativamente pequeño. De hecho, en el método de las diferencias centrales el paso de tiempo debe ser menor que un valor crítico  $\Delta t_{cr}$ . El paso de tiempo crítico se determina como:

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (9.6)$$

donde  $T_n$  es el menor periodo en el sistema, entre el inverso de la mayor frecuencia natural y la frecuencia de las fuerzas externas. La Tabla 9.1 ilustra el procedimiento paso a paso para resolver las ecuaciones de movimiento mediante el método de las diferencias centrales.

Tabla 9.1: Procedimiento paso a paso, método de diferencias centrales

---

### Cálculos iniciales:

1. Determinar la rigidez  $k$ , masa  $m$  y amortiguación  $c$ .
2. Inicializar  $\ddot{x}(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ ,  $x(0)$ .
3. Seleccionar paso de tiempo  $\Delta t$ ,  $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$ . Calcular constantes de integración.

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; \quad a_2 = 2a_0; \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

4. Calcular  $x(-\Delta t) = x(0) - \Delta t\dot{x}(0) + a_3\ddot{x}(0)$
  5. Formar matriz de masa efectiva  $\hat{m} = a_0m + a_1c$ .
-

---

**Para cada paso de tiempo:**

1. Calcular fuerzas efectivas en  $t$ :

$$\hat{f}(t) = f(t) - (k - a_2 m)x(t) - (a_0 m - a_1 c)x(t - \Delta t)$$

2. Determinar desplazamientos en  $t + \Delta t$ :

$$x(t + \Delta t) = \hat{m}^{-1} \hat{f}(t)$$

3. Si se requiere, evaluar las aceleraciones y velocidades en  $t$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= a_0(x(t - \Delta t) - 2x(t) + x(t + \Delta t)) \\ \dot{x}(t) &= a_1(x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)) \end{aligned}$$


---

Como ejemplo, a continuación se entrega el código en Matlab para determinar la respuesta de un sistema de un grado de libertad a una fuerza tipo escalón. El resultado de la integración numérica se muestra en la Figura 9.1, en donde se comparan con el resultado obtenido mediante la solución analítica.

```
M=2; %masa en kg
K=2e3; %rigidez N/m
C=25; %amortiguamiento

wn=sqrt(K/M)/2/pi; %frecuencia natural en Hz

%paso de tiempo
T=1./wn; %periodo
dt_cr=min(T)/pi; %paso de tiempo critico
dt=dt_cr/10; % paso de tiempo 10 veces menor al paso de tiempo critico

t=0:dt:1; %vector de tiempo
N=length(t); %numero de pasos de iteración

%definición de la fuerza
t0=0.1;
F=stepfun(t,t0); %función escalon en t0

%condiciones iniciales
x(1)=0; dx(1)=0; ddx(1)=0;

% constantes
a0=1/dt^2; a1=1/(2*dt); a2=2*a0; a3=1/a2;

x0=x(:,1)-dt*dx(:,1)+a3*ddx(:,1);
hM=a0*M+a1*C;
```

```

invM=inv(hM);

% primer paso de tiempo
hF=F(1)-(K-a2*M)*x(1)-(a0*M-a1*C)*x0; x(2)=invM*hF;

% pasos de tiempo siguientes
for i=3:N
    hF=F(i-1)-(K-a2*M)*x(i-1)-(a0*M-a1*C)*x(i-2);
    x(i)=invM*hF;
end

%respuesta analítica
zeta=C/(2*M*wn);
wd=wn*sqrt(1-zeta^2);
theta=atan(zeta/(sqrt(1-zeta^2)));

n0=find(t==t0);
for i=n0:length(t)
    xa(i)=F0/K-F0/(K*sqrt(1-zeta^2)).*exp(-zeta*wn.*(t(i)-t(n0))).*cos(wd.*(t(i)-t(n0)))-t(n0));
end

figure
set(gca,'FontSize',16)
set(gcf,'Position',[100 100 800 400])
set(gcf,'PaperUnits','inches');
set(gcf,'PaperSize',[8.1 4.6]);
set(gcf,'PaperPosition',[0 0 8.1 4.6]);

plot(t,x,'k','LineWidth',2)
hold on
plot(t,xa,'r','LineWidth',2)
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Desplazamiento (m)')
legend('Simulación numérica','Respuesta analítica')

```

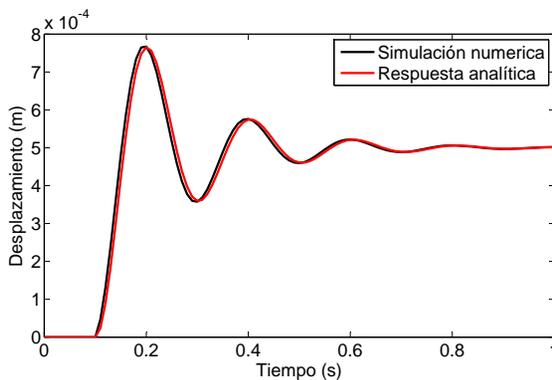


Figura 9.1: Simulación numérica de la respuesta a una fuerza escalón de un sistema de un grado de libertad

## **Parte II**

# **Sistemas con multiples grados de libertad**

# Capítulo 10

## Dos grados de libertad

En este capítulo se estudiará en detalle los sistemas de dos grados de libertad y como determinar la respuesta de cada grado. Los resultados de este capítulo se pueden extender luego a sistemas con multiples grados de libertad. Al cambiar de sistemas de un grado de libertad a sistemas con dos o más grados de libertad, aparecen dos conceptos importantes. El primero, es que un sistema de dos grados de libertad tiene dos frecuencias naturales. El segundo concepto es el de modo de vibración, que no está presente en sistemas de un grado de libertad. Un modo de vibración es un vector que describe el movimiento relativo entre los dos grados de libertad.

En la Figura 10.1 se muestran 3 ejemplos de sistemas de dos grados de libertad; (a) el primero consiste en dos masas unidas por resortes en serie, (b) el segundo, muestra una masa que puede moverse en dos direcciones y (c) el último caso ilustra una masa que puede desplazarse y a la vez rotar sobre su eje.

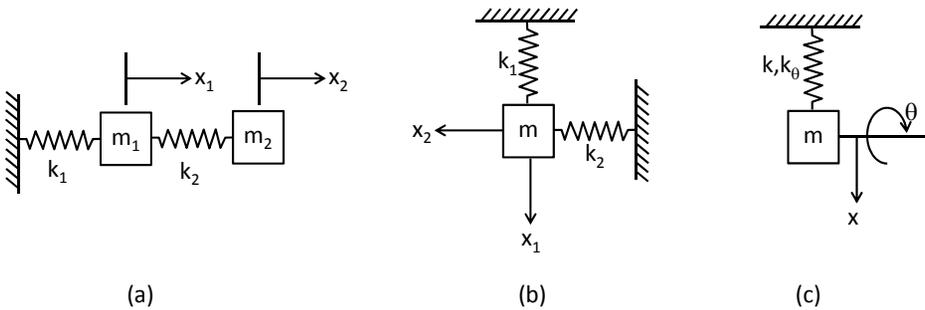


Figura 10.1: Ejemplos de sistemas de dos grados de libertad

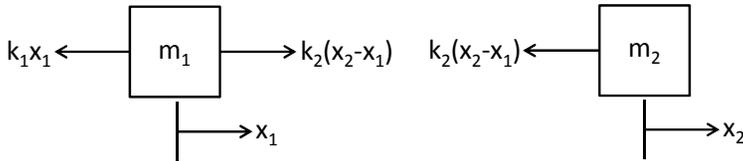


Figura 10.2: Diagrama de cuerpo libre para el sistema de 2 grados de libertad de la Figura 10.1(a).

Consideremos el sistema de la Figura 10.1(a). El diagrama de cuerpo libre de este sistema se muestra en la Figura 10.2. Sumando las fuerzas para cada masa se obtiene que:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad (10.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \quad (10.2)$$

Reordenando estas ecuaciones, se obtiene,

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (10.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \quad (10.4)$$

Estas ecuaciones representan un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas con coeficientes constantes. En este caso la solución depende de cuatro condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(0) = v_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(0) = v_{20} \quad (10.5)$$

donde las constantes  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  y  $v_{10}$ ,  $v_{20}$  representan a los desplazamientos y velocidades iniciales.

Existen varias metodológicas para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales anterior. Se debe notar que no es posible resolver cada ecuación de forma independiente ya que cada ecuación contiene a  $x_1$  y  $x_2$  (sistema acoplado). Físicamente, esto significa que el movimiento de  $x_1$  afecta a  $x_2$  y viceversa. Una forma de resolver el sistema de ecuaciones, es escribirlo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Lo que se puede escribir como:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (10.7)$$

donde  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  y  $\mathbf{0} = [0 \ 0]^T$ ,  $[\cdot]^T$  denota la función transponer. La matriz  $M$  se denomina *matriz de masa* y la matriz  $K$  se denomina *matriz de rigidez*. Estas matrices tienen la propiedad de ser simétricas, es decir,  $M = M^T$  y  $K = K^T$ .

Para resolver el caso de un grado de libertad se asumió una solución armónica y luego se determinaron los coeficientes. Esta misma metodología se puede usar aquí. Se puede asumir una solución de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t} \quad (10.8)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es un vector con constantes a ser determinadas,  $\omega$  es una constante a ser determinada y  $j = \sqrt{-1}$ . Notar que  $e^{j\omega t}$  representa al movimiento armónico, ya que  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ . El vector  $\mathbf{u}$  debe ser distinto de cero, de lo contrario, el resultado sería que no hay movimiento.

Substituyendo 10.8 en la ecuación de movimiento 10.7, se obtiene,

$$(-\omega^2 M + K)\mathbf{u}e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (10.9)$$

Dado que el factor  $e^{j\omega t}$  es distinto de cero para todo  $t$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\omega$  deben cumplir la siguiente relación:

$$(-\omega^2 M + K)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (10.10)$$

Notar que lo anterior representa dos ecuaciones y tres escalares a determinar:  $\omega$ ,  $u_1$  y  $u_2$ , donde  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ .

Para que el sistema de ecuaciones anterior tenga solución no trivial ( $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), la matriz  $(-\omega^2 M + K)$  no debe tener inversa. Si tuviese inversa se podría multiplicar a ambos lados de la ecuación por  $(-\omega^2 M + K)^{-1}$  y se obtendría la solución  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

La condición que la matriz  $(-\omega^2 M + K)$  no tenga inversa, es equivalente a decir que su determinante sea cero:

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \quad (10.11)$$

lo que entrega una ecuación algebraica para la incógnita  $\omega^2$ . Substituyendo para el caso de las dos masas en serie se obtiene:

$$\det \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 k_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (10.12)$$

Usando la definición del determinante, se obtiene que  $\omega^2$  debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (10.13)$$

Esta expresión se denomina *ecuación característica* del sistema.

Una vez que se determinan los valores de  $\omega^2$  que resuelven la ecuación 10.12, el vector  $\mathbf{u}$  se puede determinar resolviendo la ecuación 10.10 para cada valor de  $\omega^2$ . Esto es, para cada valor de  $\omega^2$  (i.e.  $\omega_1^2$  y  $\omega_2^2$ ) existe un vector  $\mathbf{u}$  que satisface la ecuación 10.8:

$$(-\omega_1^2 M + K)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad (10.14)$$

$$(-\omega_2^2 M + K)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (10.15)$$

Estas dos expresiones nos entregan la dirección de los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , pero no su magnitud. Para mostrar que esto último es cierto, notar que si  $\mathbf{u}_1$  es solución de la ecuación 10.14, también lo es el vector  $a\mathbf{u}_1$ , donde  $a$  es un número distinto de cero. Por lo tanto, los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  tienen magnitud arbitraria.

La solución de la ecuación 10.7 sujeta a condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{v}_0$  se puede definir en términos de los coeficientes  $\pm\omega_1$ ,  $\pm\omega_2$  y los vectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ . Dado que el sistema de ecuaciones es lineal, la suma de cualquier conjunto de soluciones es también una solución. Siguiendo el desarrollo anterior se pueden escribir cuatro posibles soluciones:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_1 e^{-\omega_1 t}, \mathbf{u}_1 e^{+\omega_1 t}, \mathbf{u}_2 e^{-\omega_2 t}, \mathbf{u}_2 e^{+\omega_2 t} \quad (10.16)$$

Por lo tanto, la solución general es una combinación lineal de las cuatro soluciones:

$$\mathbf{x}(t) = (ae^{-\omega_1 t} + be^{+\omega_1 t})\mathbf{u}_1 + (ce^{-\omega_2 t} + de^{+\omega_2 t})\mathbf{u}_2 \quad (10.17)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Aplicando las fórmulas de Euler, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\mathbf{u}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\mathbf{u}_2 \quad (10.18)$$

Las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{v}_0$ . Notar que la solución dada por la ecuación 10.18 es análogo de dos grados de libertad de la solución vista en el caso de un grado de libertad.

La solución dada por la ecuación 10.18 formula que cada masa en general oscila con dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Las que se denominan *frecuencias naturales* del sistema. Adicionalmente, supongamos que se tienen condiciones iniciales tales que  $A_2 = 0$ . Con esas condiciones iniciales, cada masa oscila a una frecuencia,  $\omega_1$ , y la posición relativa de las masas en cada instante está dada por el vector  $\mathbf{u}_1$ . Por lo tanto,  $\mathbf{u}_1$  se denomina *primer modo de vibración* del sistema. De manera similar, si las condiciones iniciales son tales que  $A_1 = 0$ , las masas oscilan a  $\omega_2$  de acuerdo al vector  $\mathbf{u}_2$ . Este segundo vector se denomina entonces *segundo modo de vibración* del sistema. El concepto de frecuencia natural y modo de vibración es muy importante y es uno de los conceptos más usados en el estudio de las vibraciones.

A continuación se mencionan algunas consideraciones importantes para el caso de dos grados de libertad.

**Frecuencias:** Es importante destacar que las dos frecuencias naturales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del sistema de dos grados de libertad *no* son iguales a ninguna de las frecuencias naturales de los dos sistemas de un grado de libertad construidos con los mismos componentes. Es decir,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no son iguales a  $\sqrt{k_1/m_1}$  ni a  $\sqrt{k_2/m_2}$ .

**Pulsos:** El fenómeno de pulsos visto en la respuesta forzada de un sistema de un grado de libertad (Figura 2.3), también puede existir en la respuesta libre de un sistema de dos grados de libertad. Si las masas y las rigideces del sistema son tales que las dos frecuencias naturales son cercanas, entonces la respuesta tendrá la forma de pulsos. Por lo tanto, el fenómeno de pulsos puede ocurrir en dos circunstancias: primero, en la respuesta forzada de un sistema cuya frecuencia de excitación es similar a una frecuencia natural y segundo, en la respuesta libre de un sistema con dos frecuencias naturales cercanas.

**Cálculos:** El método usado para calcular las frecuencias naturales y modos de vibración visto en esta sección, no es el más eficiente. Este método es instructivo, pero tedioso. En la sección a continuación se estudiará una metodología basada en el cálculo de los valores y vectores propios, que simplifica bastante el análisis.

## 10.1. Valores propios y frecuencias naturales

Consideremos la ecuación de movimiento de un sistema con múltiples grados de libertad:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (10.19)$$

pre-multiplicando por  $M^{-1}$

$$I\ddot{\mathbf{x}} + M^{-1}K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (10.20)$$

asumiendo una solución de la forma  $\mathbf{x} = \mathbf{u}e^{j\omega t}$ , se obtiene que:

$$(M^{-1}K - \omega^2 I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (10.21)$$

reordenando y definiendo  $\lambda = \omega^2 I$  y  $A = M^{-1}K$ :

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (10.22)$$

donde  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Por definición, esto es un problema de valores y vectores propios. El escalar  $\lambda$  que satisface la ecuación 10.22 para un vector  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  se denomina *valor propio* y el vector  $\mathbf{u}$  correspondiente se denomina *vector propio*.

Por lo tanto, las frecuencias naturales y modos de vibraciones se pueden determinar a partir de los valores y vectores propios de la matriz  $M^{-1}K$ .

Los vectores propios tienen una magnitud arbitraria, sin embargo siempre se pueden normalizar para tener un largo deseado. La norma o magnitud de un vector se denota  $\|\mathbf{x}\|$  y viene dada por:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \left[ \sum_i x_i^2 \right]^{1/2} \quad (10.23)$$

Los vectores propios tienen la interesante propiedades de ser ortogonales a las matrices de rigidez y de masa. Esta propiedad se puede utilizar para desacoplar las ecuaciones de movimiento. Consideremos el problema de valores y vectores propios para el caso sin amortiguamiento:

$$(-\omega_i^2 M + K) \mathbf{u}_i = 0$$

Consideremos ahora dos modos arbitrarios  $r$  y  $s$ :

$$K \mathbf{u}_r = \omega_r^2 M \mathbf{u}_r$$

$$K \mathbf{u}_s = \omega_s^2 M \mathbf{u}_s$$

pre-multiplicando la primera ecuación por  $\mathbf{u}_s^T$  y la segunda ecuación por  $\mathbf{u}_r^T$ :

$$\mathbf{u}_s^T K \mathbf{u}_r = \omega_r^2 \mathbf{u}_s^T M \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_r^T K \mathbf{u}_s = \omega_s^2 \mathbf{u}_r^T M \mathbf{u}_s$$

Transponiendo la segunda ecuación y restándola a la primera, se tiene que:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \mathbf{u}_s^T M \mathbf{u}_r = 0 \quad (10.24)$$

Esta ecuación nos da dos posibilidades diferentes:

$$\mathbf{u}_s^T M \mathbf{u}_r = 0 \quad r \neq s \quad (10.25)$$

$$\mathbf{u}_s^T M \mathbf{u}_r \neq 0 \quad r = s \quad (10.26)$$

La primera ecuación nos dice que dos modos distintos son ortogonales con la matriz de masa (también con la matriz de rigidez) y que cuando se calcula el producto del mismo modo con la matriz de masa como en la segunda ecuación, el producto no es cero. El valor de este producto se denomina masa generalizada  $m_{ii}$

$$m_{ii} = \mathbf{u}_i^T M \mathbf{u}_i \quad (10.27)$$

De manera similar se define la rigidez generalizada  $k_{ii}$

$$k_{ii} = \mathbf{u}_i^T K \mathbf{u}_i \quad (10.28)$$

Dado lo anterior, se tiene que:

$$P^T M P = \mathbf{m} \quad (10.29)$$

$$P^T K P = \mathbf{k} \quad (10.30)$$

donde  $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$  es la matriz de modos normales,  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{k}$  son matrices diagonales denominadas matriz de masa modal y matriz de rigidez modal respectivamente.

Debido a que la matriz de modos normales esta sujeta a una normalización arbitraria, los valores de  $k_{ii}$  y  $m_{ii}$  no son únicos. Lo que si se puede demostrar es que la razón  $k_{ii}/m_{ii}$  es única y tiene un valor igual a  $\omega_i^2$ . Usualmente, los modos se normalizan con respecto a la matriz de masa de forma que  $m_{ii} = 1$  y  $k_{ii} = \omega_i^2$ , es decir,  $P^T M P = I$ .

Introduciendo la transformación modal  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  en la ecuación 10.19 y pre-multiplicando por  $P^T$ , se obtiene que:

$$P^T M P \ddot{\mathbf{y}} + P^T K P \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (10.31)$$

Utilizando  $P^T M P = \mathbf{m}$  y  $P^T K P = \mathbf{k}$ , el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (10.32)$$

Usando una normalización de los modos con respecto a la matriz de masa y desarrollando los cálculos matriciales para el caso de dos grados de libertad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

Este sistema equivale a las siguientes dos ecuaciones desacopladas:

$$\ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \quad (10.35)$$

$$\ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0 \quad (10.36)$$

Estas dos ecuaciones están sujetas a condiciones iniciales, las que también deben transformarse en el nuevo sistema de coordenadas  $y(t)$  desde el sistema original  $x(t)$ :

$$\mathbf{y}_0 = P^T M \mathbf{x}_0 \quad (10.37)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_0 = P^T M \mathbf{v}_0 \quad (10.38)$$

Definiendo los modos normalizados con la matriz de masa, se tiene que  $P^T M P = I$  y por lo tanto  $P^{-1} = P^T M$ .

Las ecuaciones 10.35 y 10.36 se denominan *ecuaciones modales* y el sistema de coordenadas  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]$  se denomina sistema de coordenadas modales. Las ecuaciones 10.35 y 10.36 se dice que están desacopladas porque cada una depende de una sola variable. Por lo tanto, se pueden resolver de forma independiente. La solución de cada ecuación viene dada por:

$$y_1(t) = \frac{\sqrt{\omega_1^2 y_{10}^2 + \dot{y}_{10}^2}}{\omega_1} \text{sen}(\omega_1 t + \tan^{-1} \frac{\omega_1 y_{10}}{\dot{y}_{10}}) \quad (10.39)$$

$$y_2(t) = \frac{\sqrt{\omega_2^2 y_{20}^2 + \dot{y}_{20}^2}}{\omega_2} \text{sen}(\omega_2 t + \tan^{-1} \frac{\omega_2 y_{20}}{\dot{y}_{20}}) \quad (10.40)$$

Una vez calculada la solución para cada una de las ecuaciones. La solución general se obtiene al superponer las soluciones modales:

$$\mathbf{x}(t) = P \mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i y_i(t) \quad (10.41)$$

Notar que la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i d_i \text{sen}(\omega_i t + \phi_i) \quad (10.42)$$

Los factores  $d_i$ , que dependen de las condiciones iniciales, indican cuanto participa cada modo en la respuesta total. Mientras mayor es  $d_i$  mayor es la contribución del modo  $i$ -ésimo en la respuesta. En consecuencia, los factores  $d_i$  se denominan *factores de participación modal*.

### 10.1.1. Ejemplo

Consideremos el sistema de la Figura 10.3 con  $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ . Determinar la respuesta para  $\mathbf{v}_0 = [0 \ 0]^T$  y los siguientes desplazamientos iniciales  $\mathbf{x}_0 = [-1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 1]^T$  y  $\mathbf{x}_0 = [-1 \ 2]^T$

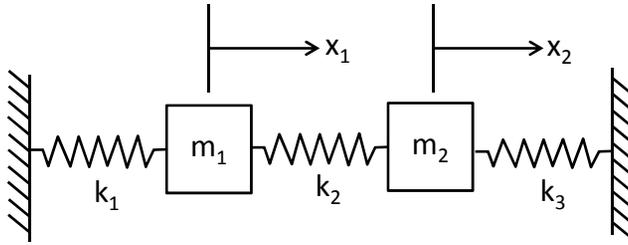


Figura 10.3: Sistema de dos grados de libertad fijo a ambos extremos

La ecuación de movimiento para este sistema es:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_1 + k_2)x_2 = 0$$

en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices  $M$  y  $K$  vienen dadas por:

$$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores y vectores propios de  $M^{-1}K$  son:

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{3k}{m}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  y  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ . La matriz de modos  $P$  viene dada por:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Notar que los modos están normalizados con respecto a la matriz de masa:  $P^T M P = I$

**Caso 1:**  $v_0 = [0 \ 0]^T$  y  $x_0 = [-1 \ 1]^T$

En este caso, las condiciones iniciales en coordenadas modales son:

$$y_0 = P^T M x_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}_0 = P^T M v_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en las ecuaciones 10.39 y 10.40, se obtiene que los factores de participación modal son  $d_1 = 0$  y  $d_2 = \sqrt{2m}$ . Por lo tanto, para esta condición inicial en la respuesta solo participa el segundo modo de vibración. La respuesta  $\mathbf{x}(t)$  viene dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) = \begin{bmatrix} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) \\ -\text{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) \end{bmatrix}$$

**Caso 2:**  $v_0 = [0 \ 0]^T$  y  $x_0 = [1 \ 1]^T$

En este caso, las condiciones iniciales en coordenadas modales son:

$$y_0 = P^T M x_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}_0 = P^T M v_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los factores de participación modal son  $d_1 = \sqrt{2m}$  y  $d_2 = 0$ . Por lo tanto, para esta condición inicial, solo participa el primer modo de vibración. La respuesta  $\mathbf{x}(t)$  viene dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) = \begin{bmatrix} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) \\ \text{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) \end{bmatrix}$$

**Caso 3:**  $v_0 = [0 \ 0]^T$  y  $x_0 = [-1 \ 2]^T$

En este caso, las condiciones iniciales en coordenadas modales son:

$$y_0 = P^T M x_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}_0 = P^T M v_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los factores de participación modal son  $d_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}$  y  $d_2 = 3\sqrt{\frac{m}{2}}$ . En este caso participan ambos modos de vibración. La respuesta  $\mathbf{x}(t)$  viene dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) + 3 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) \\ \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi/2 \right) - 3 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{3k}{m}} t - \pi/2 \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Capítulo 11

## Más de dos grados de libertad

Muchas estructuras, equipos y componentes mecánicos requieren más de dos grados de libertad para describir su movimiento. El procedimiento para analizar sistemas con múltiples grados de libertad, es el mismo visto en la sección anterior.

A cada masa y/o grado de libertad en el sistema, le corresponde una coordenada  $x_i(t)$  que describe su movimiento en una dimensión; esto resulta en un vector  $\mathbf{x}(t)$  de dimensiones  $n \times 1$ , con matrices de masa  $M$  de  $n \times n$  y matriz de rigidez  $K$  de  $n \times n$  que satisfacen:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{11.1}$$

La forma de la ecuación anterior se mantiene si a cada masa se le permite rotar o moverse en las direcciones  $y, z$ . En esta situación el vector  $\mathbf{x}$  puede tener hasta 6 grados de libertad por cada masa.

Como ejemplo genérico, consideremos  $n$  masas conectadas por  $n$  resortes, como se ilustra en la Figura 11.1.

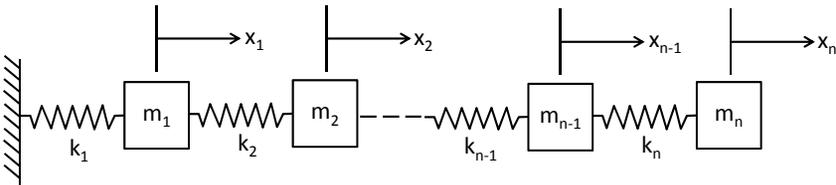


Figura 11.1: Ejemplo de un sistema con  $n$  grados de libertad

Sumando las fuerzas para cada masa se obtienen  $n$  ecuaciones de la forma:

$$m_i \ddot{x}_i + k_i(x_i - x_{i-1}) - k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.2)$$

donde  $m_i$  denota la  $i$ -ésima masa y  $k_i$  el  $i$ -ésimo resorte. En forma matricial, estas ecuaciones toman la forma 11.1 con:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & & \vdots \\ & & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & & m_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & \vdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & \dots & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

El vector de desplazamientos  $\mathbf{x}$  se representa como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

La notación del caso con dos grados de libertad se puede usar directamente para resolver el sistema con  $n$  grados de libertad. Se siguen los mismos pasos, excepto que ahora las matrices son de  $n \times n$ , el resultado son  $n$  ecuaciones modales desacopladas:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \ddot{y}_n + \omega_n^2 y_n &= 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

Existen ahora  $n$  frecuencias naturales,  $\omega_i$ , que corresponden a los valores propios de la matriz  $M^{-1}K$ . Los  $n$  vectores propios de esta matriz corresponden a los modos de vibración.

## 11.1. Nodos de un modo

El nodo de un modo corresponde a la coordenada de valor zero en un modo de vibración. Esto significa que si el sistema es excitado para vibrar solo a ese modo, la coordenada del nodo no se va a mover. Por lo tanto, un nodo es una ubicación de no movimiento para ciertas condiciones iniciales. Los nodos son excelentes puntos de ubicación para montar equipos.

## 11.2. Modos de cuerpo rígido

Usualmente ocurren casos donde algunos de los grados de libertad de un sistema no tienen restricciones. Un ejemplo, es un tren formado por dos carros conectados por un resorte como se muestra en la Figura 11.2. El tren se puede trasladar sin restricciones, mientras los carros vibran con un movimiento relativo entre ellos.

La existencia de un grado de libertad sin restricciones en las ecuaciones de movimiento, cambia un poco el análisis. Primero, el movimiento consiste en una traslación más una vibración. Segundo, la matriz de rigidez se vuelve singular y el problema de valores propios resulta en un valor igual a cero para una de las frecuencias naturales. La frecuencia igual a cero hace que la ecuación 10.39 sea incorrecta y por lo tanto los factores de participación modal deben ser modificados. El modo asociado a la frecuencia natural igual a cero, es un modo de traslación del cuerpo (en el grado de libertad sin restricciones) y se denomina *modo de cuerpo rígido*.

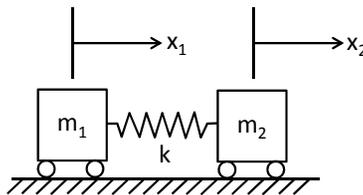


Figura 11.2: Un sistema de dos grados de libertad sin restricciones

Como ejemplo, consideremos el sistema de la Figura 11.2 con  $m_1 = m_2 = m$ ,  $v_0 = [0 \ 1]^T$  y  $x_0 = [0 \ 0]^T$ . Las ecuaciones de movimiento, llevan al siguiente sistema de ecuaciones matricial:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores y vectores propios de  $M^{-1}K$  son:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\frac{k}{m}, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  rad/s. Los modos ya están normalizados con respecto a la matriz de masa.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

En este caso, las condiciones iniciales en coordenadas modales son:

$$y_0 = P^T M x_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}_0 = P^T M v_0 = \frac{m}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La primera frecuencia natural igual a cero, hace que la ecuación 10.35 cambie. Ahora la ecuación de movimiento es:  $\ddot{y}_1 = 0$ , cuya solución es  $y_1(t) = a + bt$ . Donde  $a$  y  $b$  son constantes de integración dadas por las condiciones iniciales. Aplicando las condiciones modales iniciales:

$$y_1(0) = a = 0$$

$$\dot{y}_1(0) = b = \sqrt{\frac{m}{2}}$$

Por lo tanto, la primera solución modal es:

$$y_1(t) = \sqrt{\frac{m}{2}} t$$

Para la segunda ecuación modal, dado que  $\omega_2$  es distinto de cero, la ecuación 10.40 se mantiene y la segunda solución modal es:

$$y_2(t) = \sqrt{\frac{m}{2k}} \sqrt{\frac{m}{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right)$$

La respuesta  $\mathbf{x}(t)$  viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t + \sqrt{\frac{m}{2k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \\ t - \sqrt{\frac{m}{2k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \end{bmatrix}$$

## Capítulo 12

# Sistemas con amortiguamiento viscoso

Como en el caso de un grado de libertad, el amortiguamiento viscoso se introduce por conveniencia matemática más que por una verdad física. Sin embargo, el amortiguamiento viscoso nos entrega un buen modelo para muchas situaciones físicas y representa una mejora significativa sobre el modelo sin amortiguamiento. El método más simple de introducir el amortiguamiento es usar *amortiguamiento modal*. El amortiguamiento modal agrega un término de la forma,

$$2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i(t) \tag{12.1}$$

en las ecuaciones 11.6. Esta forma se elige principalmente por su conveniencia matemática. Aquí,  $\dot{y}_i(t)$  denota la velocidad de la  $i$ -ésima coordenada modal,  $\omega_i$  es la  $i$ -ésima frecuencia natural y  $\zeta_i$  es el  $i$ -ésimo *factor de amortiguamiento modal*. Los factores de amortiguamiento,  $\zeta_i$ , tienen valores entre 0 y 1 y se definen por “experiencia” o por mediciones experimentales. Usualmente el valor de  $\zeta_i$  es pequeño a menos que la estructura contenga materiales viscoelásticos u amortiguadores hidráulicos. Valores comunes son  $0 \leq \zeta_i \leq 0,05$ . La suspensión de un automóvil, que utiliza amortiguadores hidráulicos, puede tener valores tan altos como  $\zeta_i = 0,5$ .

Una vez asignados los factores de amortiguamiento, las ecuaciones 11.6, se convierten en:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{12.2}$$

las que tienen soluciones de la forma ( $0 < \zeta_i < 1$ )

$$y_i(t) = A_i e^{-\zeta_i\omega_i t} \text{sen}(\omega_{di}t + \phi_i) \tag{12.3}$$

donde  $A_i$  y  $\phi_i$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y  $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ .

$$A_i = \left[ \frac{(\dot{y}_{i0} + \zeta_i \omega_i y_{i0})^2 + (y_{i0} \omega_{di})^2}{\omega_{di}^2} \right]^{1/2} \quad (12.4)$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \frac{y_{i0} \omega_{di}}{\dot{y}_{i0} + \zeta_i \omega_i y_{i0}} \quad (12.5)$$

Estas ecuaciones son válidas solo para sistemas con amortiguamiento débil y sin modos de cuerpo rígido. Si existe alguna frecuencia natural igual a cero, entonces se debe seguir el procedimiento de la sección 11.2.

Una vez determinadas las soluciones modales, las soluciones en coordenadas físicas se determinan siguiendo el mismo procedimiento del caso sin amortiguamiento. De donde se obtiene lo siguiente:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n d_i e^{-\zeta_i \omega_i t} \text{sen}(\omega_{di} t + \phi_i) \mathbf{u}_i \quad (12.6)$$

donde,

$$d_i = \left[ \frac{(\dot{y}_{i0} + \zeta_i \omega_i y_{i0})^2 + (y_{i0} \omega_{di})^2}{\omega_{di}^2} \right]^{1/2} \quad (12.7)$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \frac{y_{i0} \omega_{di}}{\dot{y}_{i0} + \zeta_i \omega_i y_{i0}} \quad (12.8)$$

Los modos de vibración  $\mathbf{u}_i$  y las frecuencias naturales  $\omega_i$ , se obtienen como los vectores y valores propios del sistema sin amortiguamiento.

El amortiguamiento también se puede modelar de forma directa. Consideremos, por ejemplo, el sistema de la Figura 12.1. Las ecuaciones de movimiento de este sistema se pueden escribir en la siguiente forma matricial,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

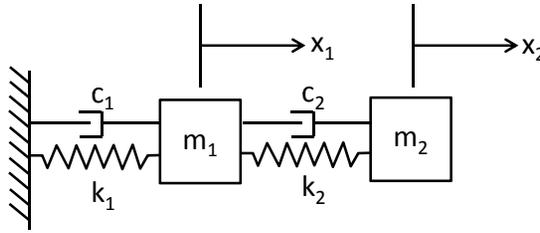


Figura 12.1: Sistema de dos grados de libertad con amortiguamiento viscoso

La ecuación 12.9 da un ejemplo de una matriz de amortiguamiento  $C$ , definida por,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

La matriz de amortiguamiento  $C$  es simétrica y en un sistema de  $n$  grados de libertad corresponde a una matriz de  $n \times n$ . Por lo tanto, un sistema amortiguado de  $n$  grados de libertad se puede modelar por una ecuación de la forma:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.11)$$

La dificultad con modelar el amortiguamiento de esta forma, es que no se puede utilizar una metodología general de análisis modal. Se podría utilizar análisis modal de forma directa si la matriz de amortiguamiento  $C$ , se puede escribir como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (12.12)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. Esta forma de amortiguamiento se denomina *amortiguamiento proporcional*. Substituyendo 12.12 en la ecuación 12.11, se obtiene:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + (\alpha M + \beta K)\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (12.13)$$

realizando el cambio de variables  $x = Py$  y pre-multiplicando por  $P^T$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + (\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{k})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (12.14)$$

esto corresponde a  $n$  ecuaciones desacopladas de la forma:

$$\ddot{y}_i + (\alpha + \beta\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad (12.15)$$

definiendo  $2\zeta_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2$ , la ecuación anterior se puede escribir de la forma general:

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0 \quad (12.16)$$

con

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.17)$$

En este caso  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden seleccionar para obtener un valor medido (o deseado) de  $\zeta_i$ . Por el contrario, si  $\alpha$  y  $\beta$  son conocidos, la ecuación 12.17 nos entrega los valores de los factores de amortiguamiento modal  $\zeta_i$ . La solución del sistema de ecuaciones anterior esta dada por las ecuaciones 12.6, 12.7 y 12.8.

## 12.1. Análisis modal de respuesta forzada

La respuesta forzada de un sistema de  $n$  grados de libertad también se puede calcular utilizando análisis modal. En este caso, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = F \quad (12.18)$$

realizando el cambio de variables  $x = Py$  y pre-multiplicando por  $P^T$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + (\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{k})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{ky} = \mathbf{f} \quad (12.19)$$

con  $\mathbf{f} = P^T F$

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \tilde{f}_i \quad (12.20)$$

con  $\tilde{f}_i = \mathbf{f}_i/m_{ii}$  y  $\zeta_i = \alpha/2\omega_i + \beta\omega_i/2$ .

La solución de la ecuación 12.20, se obtiene se acuerdo a los procedimientos vistos para los casos de un grado de libertad.

La solución homogénea se puede escribir como una suma modal:

$$x_h(t) = \sum_{i=1}^n d_i e^{-\zeta_i\omega_i t} \text{sen}(\omega_{di}t + \phi_i) \mathbf{u}_i \quad (12.21)$$

donde  $\mathbf{u}_i$  son los vectores propios unitarios de la matriz  $M^{-1}K$ . Por otro, lado la ecuación particular se puede expresar como:

$$x_p(t) = Py_p(t) \quad (12.22)$$

donde  $y_p(t)$  es la solución particular de la ecuación 12.20 y  $P$  es una matriz que contiene los modos  $\mathbf{u}_i$ .

Por lo tanto, la solución de la ecuación 12.18 viene dada por:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n d_i e^{-\zeta_i\omega_i t} \text{sen}(\omega_{di}t + \phi_i) \mathbf{u}_i + Py_p(t) \quad (12.23)$$

## **Parte III**

# **Diseño para la supresión de las vibraciones**

# Capítulo 13

## Medición Experimental

### 13.1. Transductores de vibración

Un transductor es un elemento que transforma la vibración mecánica en una señal eléctrica analógica, para ser posteriormente procesada y analizada. Los transductores de vibración más frecuentemente utilizados son : (1) Sensor de proximidad, (2) Sensor sísmico de velocidad y (3) Acelerómetros piezoeléctricos. Las lecturas de velocidad son generalmente las de mayor campo de aplicación, ya que la velocidad es directamente proporcional al esfuerzo y al desgaste del sistema mecánico. La velocidad se puede medir directamente mediante un sensor de velocidad o mediante un acelerómetro cuya señal es posteriormente integrada. Por otro lado, las mediciones de aceleración son las mejores para analizar fenómenos de altas frecuencias. La aceleración es el parámetro que ofrece la mejor medida de la fuerza asociada a una fuente particular de vibración.

#### 13.1.1. Sensor de proximidad

Un sensor de proximidad, conocido también como “de corriente Eddy” o proxímetro, se aplica normalmente a bajas frecuencias (entre 0 y 1000Hz) para medir vibraciones en sistemas rotatorios. Los proxímetros se usan para medir desplazamiento radial o axial de ejes. Se instalan usualmente en la cubierta de los rodamientos y miden el desplazamiento relativo entre el eje y la posición de anclaje del sensor. Un sistema de captación de proximidad de tipo Eddy se compone del propio sensor, un cable de extensión y un acondicionador de señal. En la Figura 13.1 se ilustra el esquema de funcionamiento de un proxímetro de inductivo, éste posee una bobina

electromagnética que se usa para detectar la distancia a un objeto metálico. Este tipo de sensores ignora objetos no metálicos.

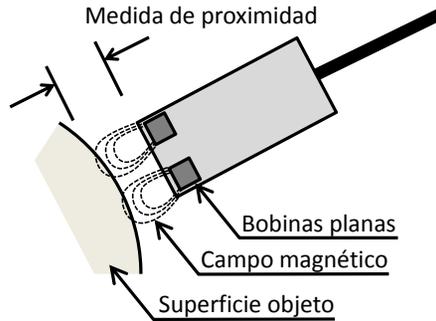


Figura 13.1: Esquema de un proxímetro

### 13.1.2. Sensor sísmico de velocidad

Los sensores sísmicos de velocidad se utilizan en equipos con altos niveles de vibración. Como se muestra en la Figura 13.2, se componen de un imán permanente ubicado en el centro de una bobina de hilo de cobre. Cuando el sensor vibra, se crea un movimiento relativo entre el imán y el bobinado, induciéndose por la ley de Faraday una tensión proporcional a la velocidad del movimiento. Tienen la ventaja que miden directamente la velocidad, que es proporcional a la severidad de la vibración. Sin embargo, las dimensiones del transductor son relativamente grandes, necesitando grandes bases magnéticas para su sujeción. En consecuencia, el rango de frecuencias es, en cierto modo, restrictivo: 10-1.000 Hz.

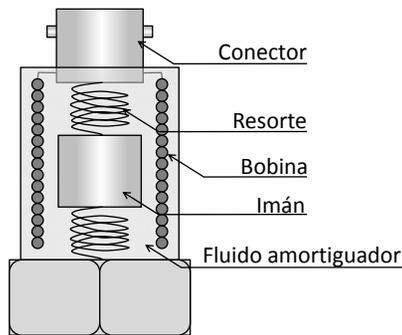


Figura 13.2: Esquema de un sensor de velocidad

### 13.1.3. Acelerómetro piezoeléctrico

Este tipo de transductor genera una tensión eléctrica proporcional a la aceleración por presión sobre un cristal piezoeléctrico. Un acelerómetro piezoeléctrico puede captar con precisión señales entre 1 Hz y 15.000 Hz. Estos dispositivos son muy apropiados para tomar datos de vibración a alta frecuencia, donde aparecen grandes esfuerzos con desplazamientos relativamente pequeños. También existen sensores de velocidad piezoeléctricos, los que se construye igual que un acelerómetro, pero con un amplificador de señal que realiza una integración lógica. Aprovechando así, las buenas características de respuesta en frecuencia de un acelerómetro, de modo que genera una salida lineal en un rango de frecuencia mucho mayor que el velocímetro sísmico. Los transductores de tipo ICP o IEPE tiene un acondicionador de señal interno, el que transforma la carga del cristal en voltaje.

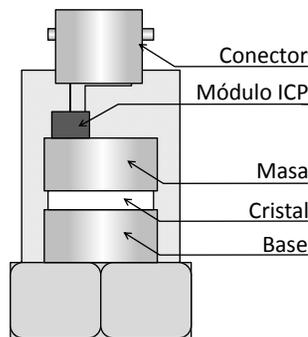


Figura 13.3: Esquema de un acelerómetro piezoeléctrico

# Capítulo 14

## Análisis Espectral

Los transductores de vibración entregan la señal capturada directamente de la estructura o máquina, esta señal contiene información importante sobre el comportamiento de cada componente de la máquina. Sin embargo, existe un problema a la hora de realizar un diagnóstico: estas señales están cargadas de mucha información, la que comprende las señales características de cada componente de la máquina, por lo cual resulta prácticamente imposible distinguir a simple vista sus comportamientos característicos.

Una forma de separar cada componente de la señal es mediante el análisis espectral, en donde se estudian las señales en el dominio de frecuencias. El matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768 - 1830) encontró la forma de representar una señal compleja en el dominio del tiempo por medio de series de curvas sinusoidales con valores de amplitud y frecuencia específicos. Entonces lo que hace un analizador de espectros que trabaja con la transformada rápida de Fourier es capturar una señal, calcular todas las series de señales sinusoidales que contiene la señal compleja y por último mostrarlas de forma individual en una gráfica de espectro.

En la Figura 14.1 puede verse una señal de vibración compleja. A dicha señal se le calculan las señales sinusoidales que la componen y por último se muestra cada una de ellas en el dominio de la frecuencia.

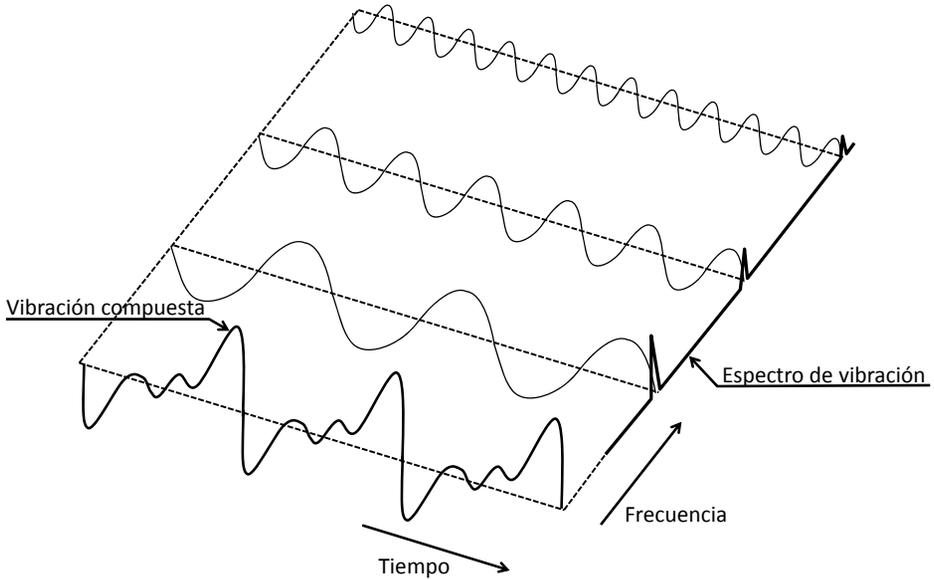


Figura 14.1: Espectro de una señal de vibración compleja

## 14.1. La Transformada de Fourier

Para cualquier señal periódica  $g(t)$  de periodo  $T$  tal que:

$$g(t) = g(t + T)$$

se puede mostrar que:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\omega_0 t)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular fundamental en  $\text{rad/s} = \frac{2\pi}{T}$

Los coeficientes para los cosenos y senos se obtienen al correlacionarlos con la función  $g(t)$ :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Definiendo  $\Delta f = 1/T$  ( $\omega_0 = 2\pi\Delta f$ ).

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(k\Delta f)e^{j2\pi k\Delta f t}$$

Los coeficientes de fourier viene dados por:

$$G(k\Delta f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} g(t)e^{-j2\pi k\Delta f t} dt$$

t: tiempo, k: entero que cuenta los pasos en frecuencia,  $\Delta f$ : espaciado de frecuencias:  $\Delta f = 1/T$ , T: periodo de tiempo:  $T = 1/\Delta f$ .

El set de valores  $G(k\Delta f)$  se denomina espectro de la función  $g(t)$ . En general el espectro posee valores complejos.

Al utilizar computadores digitales, es necesario adquirir la señal continua en intervalos de tiempo. Esto significa que la señal continua es representada por una señal discreta con valores a tiempos equidistantes. Considerando esto la transformada de Fourier queda como:

$$g(n\Delta t) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{+f_s/2} G(f)e^{j2\pi f n\Delta t} df \quad (14.1)$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\Delta t)e^{-j2\pi f n\Delta t} \quad (14.2)$$

con:

- $n$ : entero contando el numero de pasos de tiempo
- $\Delta t$ : intervalo de muestreo:  $\Delta t = 1/f_s$
- $f_s$ : frecuencia de muestreo:  $f_s = 1/\Delta t$

En condiciones reales de medición experimental es imposible medir la señal temporal hasta un tiempo infinito. Una parte de la señal debe ser seleccionada. Se asume que la señal capturada se repite con un periodo T, entregando una función periódica. Combinando la hipótesis de periodicidad con un muestreo temporal de la señal, se obtiene la definición de la transformada discreta de Fourier:

$$g(n\Delta t) = \frac{1}{f_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} G(k\Delta f)e^{j2\pi nk/N_s} \quad (14.3)$$

$$G(k\Delta f) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} g(n\Delta t) e^{-j2\pi nk/N_s} \quad (14.4)$$

con:  $N_s$  : número de datos:  $T = N_s\Delta t$  y  $f_s = N_s\Delta f$

La evaluación directa de la transformada discreta de Fourier requiere  $N_s^2$  operaciones. Con la transformada rápida de Fourier (FFT) se reduce el número de operaciones a  $N_s \log_2 N_s$ . La transformada rápida de Fourier es el núcleo de todos los procesadores de señal modernos.

Consideremos como ejemplo una señal sinusoidal, con periodo  $T=0.02$ s y amplitud  $A=1$ :

$$x(t) = \text{sen}(2\pi 50t) \quad (14.5)$$

La señal es muestreada a una frecuencia de 10kHz y se considera el periodo de tiempo 0-0.2s. En la Figura 14.2 se ilustra el resultado de la transformada rápida de Fourier de la señal.

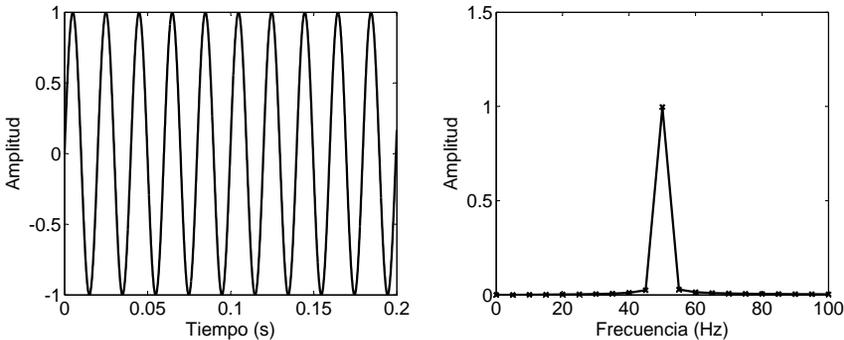


Figura 14.2: Espectro de una señal periódica

### 14.1.1. Algunos parámetros importantes

Aquí se resumen algunos de los parámetros mencionados en los párrafos anteriores:

- $T$  : Periodo de tiempo en donde se adquieren  $N_s$  muestras equiespaciadas de la señal a ser analizada. En la mayoría de los analizadores de Fourier  $N_s$  está restringidos a potencias de 2 (por ejemplo, 1024). Relaciones:  $T = N_s\Delta t = 1/\Delta f$

- $f_s$  : Frecuencia de muestreo, frecuencia a la cual se adquieren y digitalizan los datos. Relaciones:  $f_s = 1/\Delta t = N_s \Delta f$
- $\Delta t$  : Intervalo de muestreo: intervalo de tiempo al cual la señal es muestreada. Relaciones:  $\Delta t = T/N_s = 1/f_s$
- $\Delta f$  : Espaciado de frecuencias en el espectro. Relaciones:  $\Delta f = 1/T = f_s/N_s$ . En consecuencia, mediciones con un espaciado de frecuencias pequeño (i.e. una resolución en frecuencias alta) conllevan tiempos de medición mayores.
- $f_{max}$  : Frecuencia máxima: frecuencia mayor contenida o permitida en la señal temporal. Según el teorema de Shannon:  $f_{max} \leq f_s/2$
- $N_s$  : Número de muestras en el periodo de tiempo T:  $N_s = T/\Delta t = f_s/\Delta f$

## 14.2. Errores

Durante el proceso de análisis digital de una señal pueden ocurrir muchos errores. Errores típicos son sobrecargas, ruido digital, errores de cuantificación, limitaciones del rango dinámico. Sin embargo, los dos errores principales son aliasing y leakage.

### 14.2.1. Aliasing

El aliasing se produce debido al hecho que la señal temporal debe ser muestreada. Componentes de alta frecuencia en la señal pueden causar errores de amplitud y frecuencia en el espectro. Si la mayor frecuencia contenida en una señal no cumple con el teorema de Shannon:  $f_{max} \leq f_s/2$ , entonces las frecuencias por sobre  $f_s/2$  van a aparecer como frecuencias menores a  $f_s/2$ . La Figura 14.3 muestra un ejemplo de Aliasing, se muestran tres senos con frecuencias de 1, 4 y 6 Hz muestreados a 5 Hz, a la frecuencia de muestreo los tres senos son idénticos.

Aliasing se puede evitar removiendo todos los componentes con frecuencias mayores a  $f_s/2$ . Esto se puede lograr con una señal de excitación apropiada, aunque se logra generalmente utilizando un filtro pasa bajas. Dado que no existen filtros que remuevan todas las frecuencias altas a cero sin influenciar en las bajas, los filtros se fijan normalmente a un 40% de  $f_s$ .

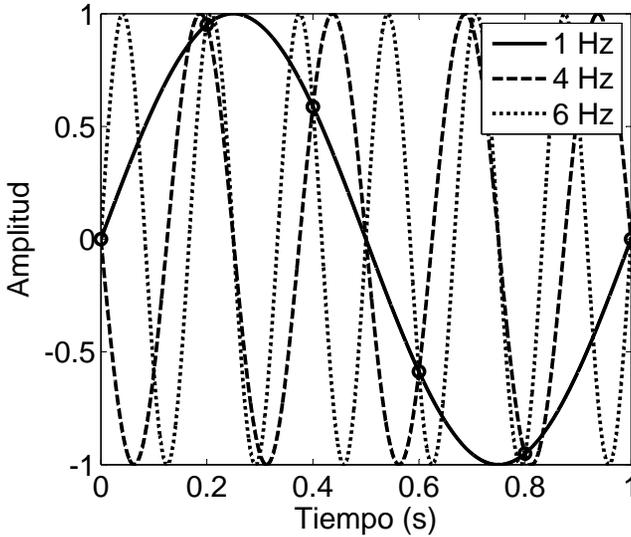


Figura 14.3: Aliasing: Seno a 1, 4 y 6 Hz, muestreados a 5 Hz (círculos)

### 14.2.2. Leakage

El Leakage se origina debido a que los datos deben ser adquiridos en un periodo de observación finito  $T$ . La transformada discreta de Fourier asume entonces que la señal es periódica con periodo  $T$ . Si esta condición no se cumple, se produce un error de "leakage". La Figura 14.4 ilustra el espectro obtenido de una señal tipo coseno, cuando la función es periódica en  $T$  y cuando no lo es. En el segundo caso, el espectro discreto no coincide con el real. El error en la hipótesis de periodicidad produce errores importantes de amplitud y frecuencia.

La única solución al problema de leakage, es asegurarse que la señal es periódica o se observa completamente en el periodo de adquisición, lo que en general, es muy difícil de lograr. En sistemas perfectamente lineales, se puede lograr al excitarlos con una señal periódica en el intervalo de tiempo considerado. Aumentar el tiempo de adquisición, i.e. aumentar la resolución en frecuencias, ayuda a mejorar la periodicidad de la señal. El uso de ventanas de tiempo también ofrecen una solución parcial al problema de leakage.

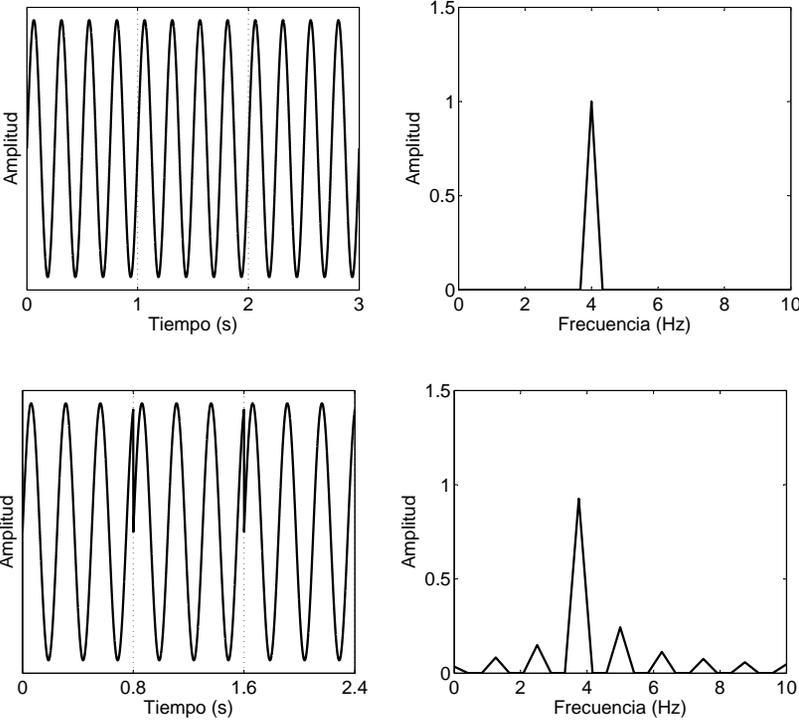


Figura 14.4: Hipótesis de periodicidad, Leakage

# Capítulo 15

## Niveles aceptables de vibración

Para diseñar un componente en términos de su respuesta vibracional, se debe establecer claramente cual es la respuesta deseada. Se debe definir con claridad antes del diseño, si el criterio se establece en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración y exactamente como se deben medir estos. Estas opciones dependen mayormente de la aplicación específica. Por ejemplo, en la practica es generalmente aceptado que la mejor indicación para posible daño estructural es la amplitud de la velocidad de la estructura, mientras que la aceleración es la más perceptible por los humanos. En la tabla 15.1 se muestran algunos rangos usuales de frecuencias y desplazamientos para vibraciones.

	Frecuencia (Hz)	Amplitud del desplazamiento (mm)
Vibración atómica	$10^{12}$	$10^{-8}$ - $10^{-6}$
Límite de percepción humana	1 – 8	$10^{-2}$
Vibración de maquinaria y edificios	10 – 100	$10^{-2}$ – 1
Vaivén de edificios altos	0,1 – 5	10 – 1000

Tabla 15.1: Rangos de frecuencia y desplazamiento para vibraciones

Se han propuesto diferentes métodos para medir y describir niveles aceptables de vibración. La ISO (International Organization for Standardization, [www.iso.org](http://www.iso.org)) entrega un estándar de niveles de vibraciones aceptables. Estos estándar están dados en términos del valor *rms* (root mean square) de la señal. El valor *rms* corresponde a la raíz cuadrada del promedio temporal de la señal al cuadrado. Para

el desplazamiento  $x(t)$ , el valor  $rms$  está dado por la siguiente ecuación,

$$x_{rms} = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right]^{1/2} \tag{15.1}$$

Una forma conveniente de describir los niveles de vibración aceptable es a través de gráficos como el de la Figura 15.1. Este gráfico es una representación de la relación entre desplazamiento, velocidad, aceleración y frecuencia para un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento. Se debe tener en consideración que ha medida que avanza la tecnología los niveles aceptables de vibraciones cambian. Por lo tanto, los datos entregados en la Figura 15.1 se deben considerar sólo como indicaciones aproximadas.

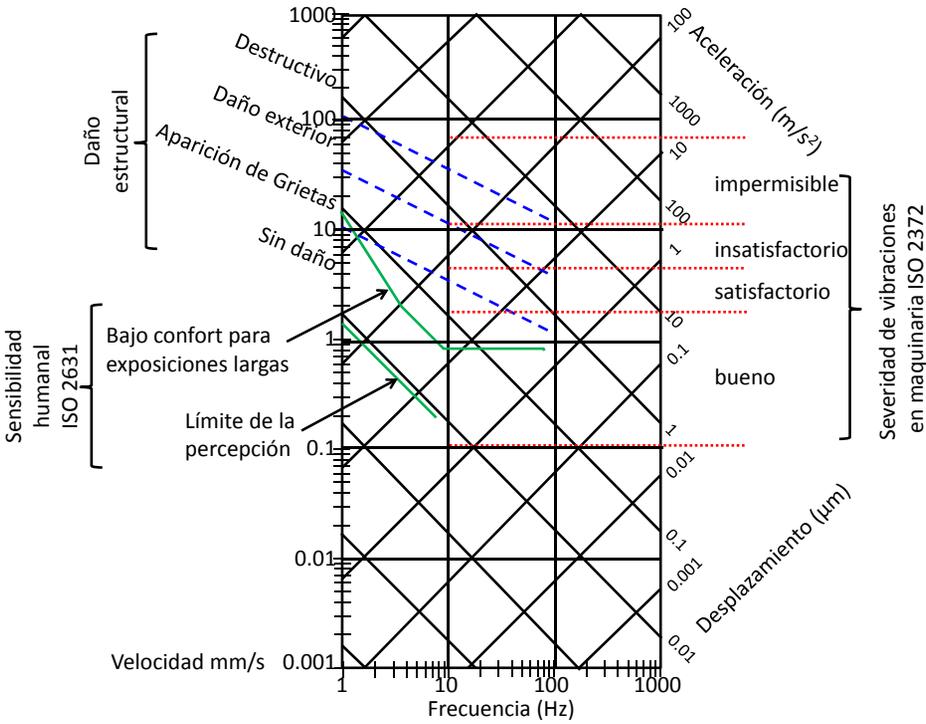


Figura 15.1: Nomograma con niveles de vibración permisible (RMS) para daño estructural, percepción humana y vibración de maquinaria.

Este gráfico asume vibraciones sinusoidales, es decir,

$$x(t) = A \text{sen } \omega_n t, \quad v(t) = A\omega_n \text{cos } \omega_n t, \quad a(t) = -A\omega_n^2 \text{sen } \omega_n t$$

De donde se obtiene que los valores *rms* del desplazamiento, velocidad y aceleración, viene dados por,

$$x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad v_{rms} = \frac{A\omega_n}{\sqrt{2}}, \quad a_{rms} = \frac{A\omega_n^2}{\sqrt{2}}$$

## 15.1. Efecto de las vibraciones en el cuerpo humano

Cuando una superficie vibrante entra en contacto con el cuerpo humano o alguna de sus partes (cabeza, espalda, nalgas, extremidades, manos) se produce una agresión mecánica cuyos efectos pueden ser la incomodidad, la reducción de la eficiencia o inclusive lesiones o estados patológicos. Estos efectos se deben en general a la aparición de fuerzas oscilantes que son contrarrestadas físicamente por tres mecanismos:

1. La tensión muscular
2. La compresión de los tejidos
3. La aceleración de las masas de tejidos

La tensión muscular de origen vibratorio causa fatiga y resta precisión a los movimientos. La compresión de tejidos puede producir trastornos circulatorios locales e inclusive la ruptura de vasos sanguíneos capilares que pueden afectar el suministro de oxígeno a diversos órganos. Ello se observa, por ejemplo, en vibraciones del cuello y de las manos. En el caso del cuello puede comprometerse la afluencia de sangre, provocando sensaciones de vértigo. En el caso de las manos da origen al síndrome de Raynaud o dedos fríos. Por último, la aceleración de partes del cuerpo produce movimientos relativos que en general recaen en las articulaciones o en las vértebras. El efecto de las vibraciones en el cuerpo humano está dado principalmente por la frecuencia y magnitud de éstas. Por ejemplo, se tienen los siguientes efectos en el cuerpo humano según la frecuencia de la vibración:

- Las oscilaciones de frecuencia menor a 0.5Hz producen malestar semejante al mareo en un barco
- Las frecuencias de 5-6 Hz causan fatiga general, debido a la resonancia de los músculos
- La cabeza y el cuello son muy sensibles a vibraciones que varían entre los 18 y 20 Hz
- Las zonas viscerales se muestran especialmente sensibles a frecuencias entre 5 y 7 Hz

- Frecuencias del orden de 20 Hz son perjudiciales para las vértebras cervicales
- Las vibraciones aceptables están restringidas a frecuencias comprendidas entre 1 y 2 Hz.

Existen varias normas internacionales que ofrecen criterios para la exposición del ser humano a las vibraciones. En relación con las vibraciones de cuerpo entero, transmitidas a través de los pies, las nalgas o la espalda según la postura, se tiene la Norma Internacional ISO 2631, la que es publicada en cinco partes. La parte 1 trata las especificaciones generales y los criterios para vibraciones de 1 Hz a 80 Hz del cuerpo entero. La parte 2 se refiere a la aplicación específica al caso de las vibraciones en edificios en igual rango de frecuencia. La parte 3 trata las vibraciones de muy baja frecuencia, 0.1 Hz a 0.63 Hz, que tienen lugar en vehículos tales como buques o aviones. La parte 4 trata sobre los efectos de las vibraciones y movimiento rotacional en pasajeros de sistemas de transporte con rieles fijos, y la parte 5 trata sobre los efectos de las vibraciones que contienen múltiples impactos.

La norma ISO 5349, considera las vibraciones transmitidas a través de las manos y brazos.

En términos generales los criterios cubren tres tipos de situaciones: la comodidad, la eficiencia laboral y la seguridad y la salud. Estos criterios se basan en tres clases de límites: el límite del confort reducido, a partir del cual se compromete el bienestar físico o psíquico del individuo, el límite de la capacidad reducida por la fatiga, más allá del cual se ve afectada la eficiencia en las tareas, y el límite de exposición, luego del cual comienza a haber riesgo para la salud.

## 15.2. Severidad vibración en maquinaria

Las normas de severidad de vibraciones de maquinaria se basan en dos parámetros de vibración: amplitud y frecuencia. Las dos normas más relevantes sobre la severidad de vibraciones de máquinas de la Organización Internacional de Normalización (International Standard Organization), son las normas ISO 2372 e ISO 10816.

La norma ISO 2372 “Vibración mecánica en equipos rotativos” es aplicable a equipos rotativos cuyo rango de velocidades está entre 600 y 12.000 RPM. Los datos que se requieren para su aplicación son el nivel global de vibración en velocidad RMS, en un rango de frecuencia entre 10 y 1.000 Hz, distinguiendo varias clases de equipos rotativos según la Tabla 15.2.

Clase	Descripción
Clase I	Equipos pequeños hasta 15 kW
Clase II	Equipos medios, de 15 a 75 kW o hasta 300 kW con cimentación especial
Clase III	Equipos grandes, por encima de 75 kW con cimentación rígida o de 300 kW con cimentación especial
Clase IV	Turbomaquinaria (equipos con RPM > velocidad crítica)

Tabla 15.2: Clasificación de equipos en ISO 2372

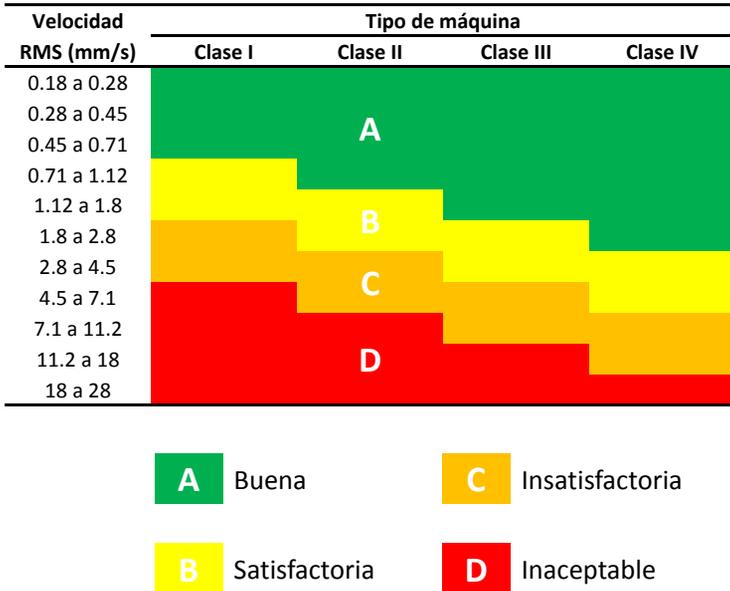


Figura 15.2: Severidad de la vibración según la norma ISO 2372

La norma ISO 10816 “Vibración mecánica. Evaluación de la vibración en una máquina mediante medidas en partes no rotativas”, establece las condiciones y procedimientos generales para la medición y evaluación de la vibración, utilizando mediciones realizadas sobre partes no rotativas de las máquinas. Este estándar consta de cinco partes:

- Parte 1: Indicaciones generales.

- Parte 2: Turbinas de vapor y generadores que superen los 50 MW con velocidades típicas de trabajo de 1500, 1800, 3000 y 3600 RPM.
- Parte 3: Maquinaria industrial con potencia nominal por encima de 15 kW y velocidades entre 120 y 15000 RPM.
- Parte 4: Conjuntos movidos por turbinas de gas excluyendo las empleadas en aeronáutica.
- Parte 5: Conjuntos de maquinas en plantas de hidrogenación y bombeo (únicamente disponible en inglés).

La severidad de la vibración se clasifica conforme a los siguientes parámetros:

**Tipo de máquina, potencia o altura de eje.** Se clasifican las maquinas en los siguientes cinco grupos:

- Grupo 1: Máquinas rotatorias grandes con potencia superior 300 kW. Máquinas eléctricas con altura de eje  $H \geq 315$  mm.
- Grupo 2: Máquinas rotatorias medianas con potencia entre 15 y 300 kW. Máquinas eléctricas con altura de eje  $160 \leq H \leq 315$  mm.
- Grupo 3: Bombas con impulsor de múltiples álabes y con motor separado (flujo centrífugo, axial o mixto) con potencia superior a 15 kW.
- Grupo 4: Bombas con impulsor de múltiples álabes y con motor integrado (flujo centrífugo, axial o mixto) con potencia superior a 15 kW.

La altura del eje H de una máquina está definida como la distancia medida entre la línea de centro del eje y el plano basal de la máquina misma. La altura del eje H de una máquina sin patas o de una máquina con pies levantados o cualquier máquina vertical, se debe tomar como la altura de eje H de una máquina horizontal en el mismo marco básico. Cuando el soporte es desconocido, se puede utilizar la mitad del diámetro de máquina.

**Flexibilidad del soporte:** Si la primera frecuencia natural del sistema máquina-soporte en la dirección de la medición es mayor que su frecuencia principal de excitación (en la mayoría de los casos es la frecuencia de rotación) en al menos un 25 %, entonces el sistema soporte puede ser considerado rígido en esa dirección. En algunos casos el sistema máquina-soporte puede ser considerado rígido en una dirección de medición y flexible en la otra dirección. Por ejemplo, la primera frecuencia natural en la dirección vertical puede estar sobre la frecuencia principal de excitación mientras que la frecuencia natural horizontal puede ser considerablemente menor. Tales sistemas serían rígidos en el plano vertical y flexibles en el plano horizontal. En estos casos, la vibración debe ser evaluada de acuerdo a la clasificación del soporte que corresponda en la dirección de la medición.

En la Figura 15.3 se ilustra una tabla para evaluar la severidad de la vibración según la norma ISO 10813.

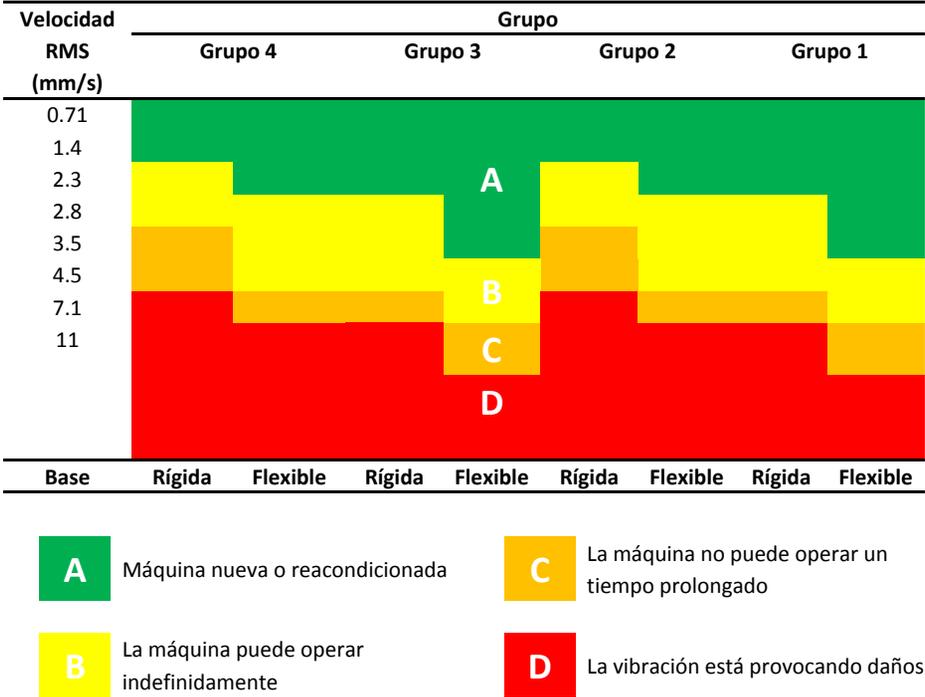


Figura 15.3: Severidad de la vibración según la norma ISO 10813

# Capítulo 16

## Aislamiento de las vibraciones

La forma más efectiva de reducir vibraciones no deseadas es detener o modificar la causa de las vibraciones. Si esto no se puede realizar, es a veces posible diseñar un *sistema aislador de vibraciones* para aislar la causa de las vibraciones del sistema o componente de interés. Esto se puede realizar mediante el uso de materiales con alto amortiguamiento, como la goma, para cambiar la rigidez y amortiguación entre la causa de las vibraciones y el componente que necesita ser protegido de las vibraciones.

La herramienta utilizada para diseñar aislador de vibración es el concepto de transmisibilidad de desplazamiento y fuerza introducido en el capítulo 3. Estos conceptos se resumen en la Figura 16.1.

En el capítulo 3 se estudió el caso en que el origen de las vibraciones viene de la base. Existe un segundo caso, donde las vibraciones provienen de un componente montado sobre una base fija (por ejemplo, desbalance rotatorio). En este caso, se quiere aislar la transmisión de vibraciones del componente a la base.

Consideremos el sistema de la Figura 16.1 (derecha). La fuerza transmitida a la base a través del resorte y amortiguador viene dada por,

$$F_T(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \quad (16.1)$$

La solución para el caso de una fuerza de excitación armónica de la forma  $F_0 \cos \omega t$  fue calculada en el capítulo 2.2 y viene dada por,

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) + X \cos(\omega t - \theta)$$

En el caso estacionario (i.e., después que ha pasado un tiempo) el primer término decae a cero y la respuesta se puede modelar como,

$$x(t) = X \cos(\omega t - \theta) \quad (16.2)$$

El modelo de la base móvil de la izquierda se utiliza en el diseño de aislamiento para proteger al dispositivo del movimiento de la base. El modelo de la derecha se utiliza para proteger el punto de fijación (base) de la vibración de la masa.

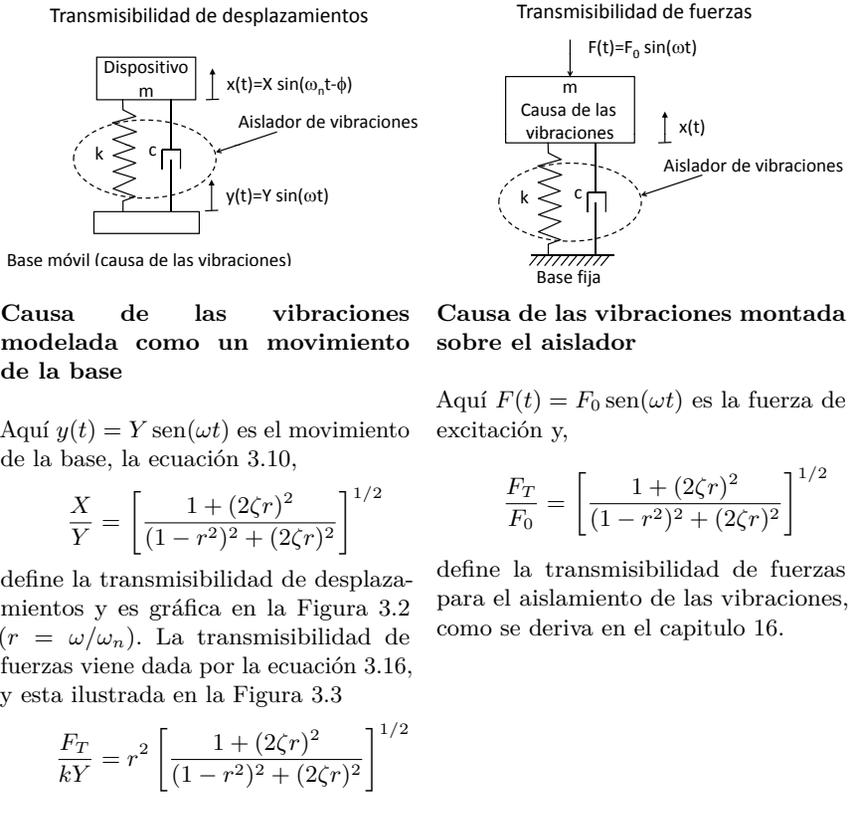


Figura 16.1: Resumen de formulas para transmisibilidad de desplazamientos y fuerzas

Diferenciando con respecto al tiempo,

$$\dot{x}(t) = -\omega X \text{sen}(\omega t - \theta) \tag{16.3}$$

Substituyendo 16.2 y 16.3 en la ecuación 16.1, se tiene,

$$F_T(t) = kX \cos(\omega t - \theta) - c\omega X \text{sen}(\omega t - \theta) \tag{16.4}$$

$$= kX \cos(\omega t - \theta) + c\omega X \cos(\omega t - \theta + \pi/2) \tag{16.5}$$

La magnitud de  $F_T(t)$ , denotada por  $F_T$ , se puede calcular a partir de la ecuación 16.5 si se nota que ambos cosenos están desfasados por  $90^\circ$ , y por lo tanto, se pueden pensar como dos vectores perpendiculares. Esto lleva a que la magnitud  $F_T$ , se puede calcular como,

$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \quad (16.6)$$

De acuerdo a la ecuación 2.36, el valor de  $X$  viene dado por,

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

donde  $r = \omega/\omega_n$ . Substituyendo el valor de  $X$  en la ecuación 16.6,

$$F_T = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sqrt{k^2 + c^2\omega^2} \quad (16.7)$$

$$= F_0 \frac{\sqrt{1 + c^2\omega^2/k^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (16.8)$$

$$= F_0 \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (16.9)$$

donde  $c^2\omega^2/k^2 = (2m\omega_n\zeta)^2\omega^2/k^2 = (2\zeta r)^2$ . La *razón de transmisibilidad*, denotada T.R., se define como la razón entre la magnitud de la fuerza transmitida y la magnitud de la fuerza aplicada,

$$\text{T.R.} = \frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (16.10)$$

Si se compara ésta transmisibilidad de fuerzas con la transmisibilidad de desplazamientos dada en la Figura 16.1, se ve que ambas son idénticas. Sin embargo, es importante notar, que a pesar de tener el mismo valor, vienen de problemas de aislamiento distintos y, por lo tanto, describen fenómenos diferentes.

En la Figura 16.2 se gráfica la razón de transmisibilidad para distintos valores de la razón de amortiguamiento  $\zeta$  y razón de frecuencias  $r$ . Mientras mayor es el valor de T.R., mayor es el desplazamiento de la masa. Estas curvas son útiles en el diseño de aisladores de vibración. En particular, en el proceso de diseño consiste en elegir  $\zeta$  y  $r$ , entre los aisladores disponibles de manera que T.R. sea pequeño.

Se puede ver de la Figura 16.2 que el aislamiento ocurre sólo cuando  $r$  es mayor a  $\sqrt{2}$ . Para  $r$  menores a  $\sqrt{2}$  la vibración se ve amplificada. El valor de la razón de amortiguamiento nos entrega cuanto se puede reducir T.R. para un  $r$  dado. Cercano

a la resonancia, el T.R. está completamente determinado por el valor de  $\zeta$ . En la zona de aislamiento, mientras menor sea  $\zeta$  menor es T.R. y mejor es el aislamiento. Se debe notar también que en la zona de aislamiento, mientras mayor es  $r$  menor es T.R., es equivale a aumentar la masa o reducir la rigidez del aislamiento.

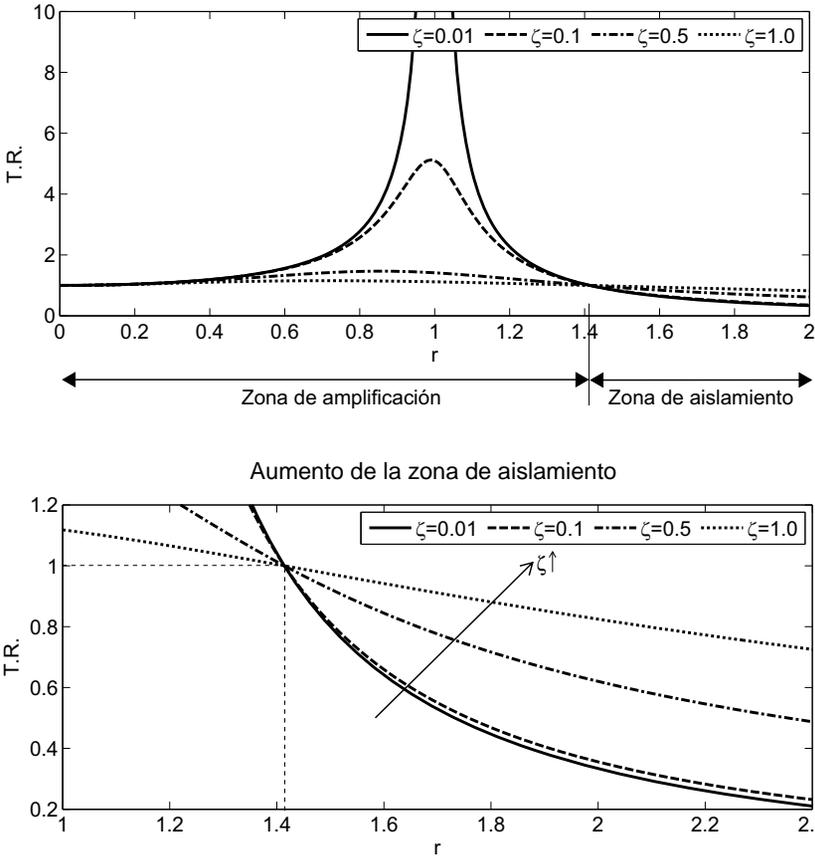


Figura 16.2: Gráfico de la razón de transmisibilidad

Casos usuales en donde la masa es la causa de la vibración son equipos rotatorios como motores eléctricos, turbinas de vapor, motores de combustión interna, generadores, máquinas de lavar .En estos casos, se debe elegir un aislamiento que cumpla que  $r > \sqrt{2}$ . Si con esto no se llegan a resultados aceptables, se puede añadir masa al equipo ( $r = \omega / \sqrt{k/m}$ ) o disminuir la rigidez del aislamiento.

Mientras se aumenta el amortiguamiento para un  $r$  fijo, el valor de T.R. aumenta,

por lo que se recomiendan valores de amortiguamiento pequeño. Sin embargo, algo de amortiguamiento es necesario, dado que cuando el equipo parte, causa una excitación armónica en un rango de frecuencias y generalmente pasa por la resonancia ( $r = 1$ ). Como se muestra en la Figura 16.2, la presencia de amortiguamiento en crítica para reducir la transmisibilidad en la resonancia. La presencia de amortiguamiento también es muy importante en el estudio de la respuesta transiente. Se vio en el capítulo 6 que en la parte transiente el sobresalto y el tiempo de establecimiento,  $t_p$ , dependen fuertemente del amortiguamiento. A mayor amortiguamiento menor es el sobresalto y menor es  $t_p$ .

Para los casos de las razones de frecuencias suficientemente grandes (cerca a  $r > 3$ ) y amortiguación suficientemente pequeña ( $\zeta < 0,2$ ) el valor de T.R. no se ve afectado por el amortiguamiento. Dado que la mayoría de los resortes tienen factores de amortiguamiento pequeños (menores a 0,01), el término  $(2\zeta r)^2$  es muy pequeño (por ejemplo,  $r = 3$ ,  $(2\zeta r)^2 = 0,0036$ ). En consecuencia, es usual en el diseño de aisladores de vibración despreciar el término  $(2\zeta r)^2$  en la ecuación 16.10. En este caso, T.R. viene se puede aproximar por,

$$\text{T.R.} = \frac{1}{(r^2 - 1)} \quad (r > 3) \quad (16.11)$$

La frecuencia de excitación de un equipo usualmente se entrega en su velocidad de rotación en revoluciones por minuto (rpm). Si  $n$  es la velocidad en rpm, entonces,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (16.12)$$

Adicionalmente, los resortes son usualmente clasificados en términos de su deflexión estática definida por  $\Delta = W/k = mg/k$ , donde  $m$  es la masa del equipo y  $g$  es la aceleración de gravedad. Se ha vuelto muy común diseñar los aisladores de vibración en términos de la velocidad de rotación  $n$  y la deflexión estática  $\Delta$ . Se utiliza también una tercera cantidad,  $R$ , definida como la reducción en transmisibilidad,

$$R = 1 - \text{T.R.} \quad (16.13)$$

la que es usualmente usada para cuantificar la efectividad del aislador de vibraciones.

Substituyendo el valor de T.R. en la ecuación 16.13 y despejando  $r$ , se obtiene:

$$r = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}} = \sqrt{\frac{2 - R}{1 - R}} \quad (16.14)$$

substituyendo  $\omega$  y reemplazando  $k = mg/\Delta$ ,

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g(2 - R)}{\Delta(1 - R)}} \quad (16.15)$$

esta última ecuación relaciona la velocidad del motor con el factor de reducción y con la deflexión estática. Se utiliza para construir curvas de diseño para el aislamiento de vibraciones.

Como ejemplo de utilización de éstas curvas, consideremos un equipo que opera a 5000rpm y tiene una masa de 3kg. Se quiere calcular la rigidez del aislamiento para asegurar una reducción del 95 % de las vibraciones. De la Figura 16.3, 5000rpm y 95 % de reducción equivale a una deflexión de 0.75mm. Lo que significa un resorte de rigidez:

$$k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{3 \times 9,8}{0,75 \times 10^{-3}} = 39200N/m \tag{16.16}$$

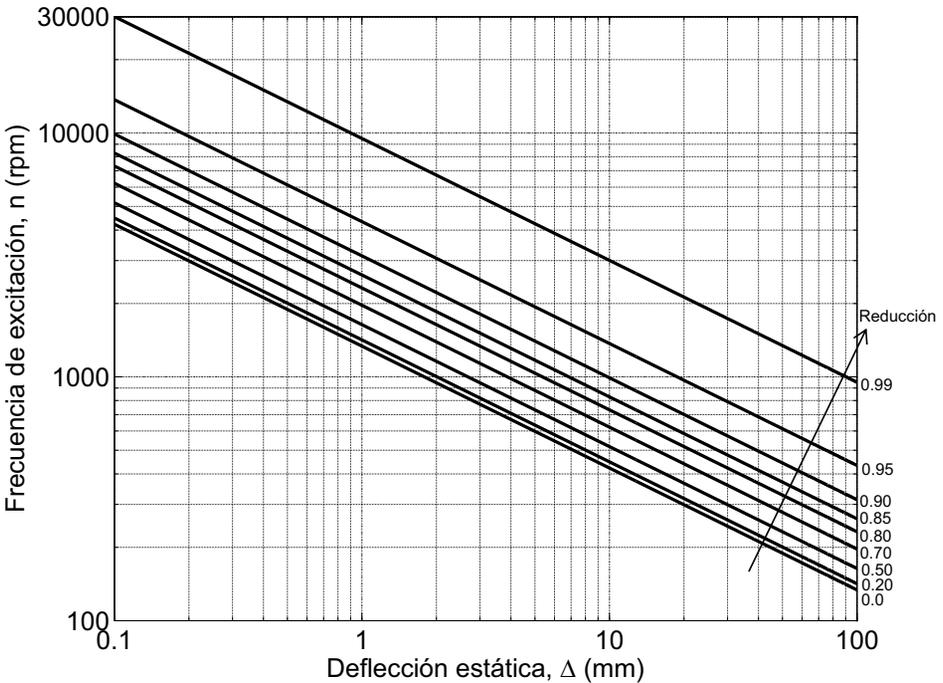


Figura 16.3: Curvas de diseño para el aislamiento de vibraciones

## Capítulo 17

# Absorbedor de vibraciones

Otra opción para proteger a un componente de vibraciones armónicas a una frecuencia constante es un *absorbedor dinámico de vibraciones*. A diferencia del aislador de la sección anterior, un absorbedor dinámico consiste en un segundo sistema masa-resorte que se añade al componente principal para evitar que vibre. El efecto mayor de añadir un segundo sistema masa-resorte es cambiar el sistema de un grado de libertad a un sistema de dos grados de libertad. El nuevo sistema tiene dos frecuencias naturales. El sistema masa-resorte añadido se denomina absorbedor. Los parámetros del absorbedor (masa y rigidez) se eligen de manera que el movimiento del componente original este en un mínimo. Esto se acompaña con un movimiento sustancial del sistema absorbedor.

Los absorbedores son usualmente utilizados en maquinas que funcionan a una velocidad constante, tales como lijadoras, compresores, cortadoras eléctricas, etc. En la Figura 17.1 se ilustra un absorbedor simple añadido a un sistema masa-resorte. La ecuación de movimiento de este sistema es:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \text{sen } \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.1)$$

donde  $x$  es el desplazamiento de la masa principal de masa  $m$  y rigidez  $k$ ,  $x_a$  es el desplazamiento del absorbedor de masa  $m_a$  y rigidez  $k_a$  y  $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$  es la excitación armónica aplicada sobre la masa principal. Se desea diseñar el absorbedor de manera que el desplazamiento de la masa principal sea el menor posible para el caso estacionario.

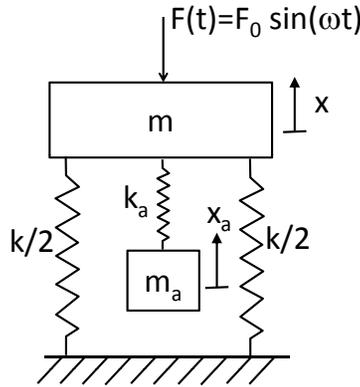


Figura 17.1: Sistema masa-resorte con un absorbedor dinámico de vibraciones

A diferencia de la técnica de análisis modal utilizada anteriormente, aquí se quiere determinar la solución en términos de los parámetros del sistema ( $m$ ,  $k$ ,  $m_a$  y  $k_a$ ). Para esto, definamos la solución estacionaria de la forma:

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t \tag{17.2}$$

$$x_a(t) = X_a \text{ sen } \omega t \tag{17.3}$$

Substituyendo éstas soluciones estacionarias en la ecuación 17.1,

$$\begin{bmatrix} k + k_a - m\omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a - m_a\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} \text{ sen } \omega t = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sen } \omega t \tag{17.4}$$

Dividiendo por  $\text{sen } \omega t$  e invirtiendo la matriz de coeficientes, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} &= \frac{1}{(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2} \begin{bmatrix} k_a - m_a\omega^2 & k_a \\ k_a & k + k_a - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2} \begin{bmatrix} (k_a - m_a\omega^2)F_0 \\ k_a F_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17.5}$$

Recordar que la inversa de una matriz  $A$  de  $2 \times 2$  viene dada por,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

De la ecuación 17.5 se puede despejar  $X$  y  $X_a$ ,

$$X = \frac{(k_a - m_a \omega^2) F_0}{(k + k_a - m \omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - k_a^2} \quad (17.6)$$

$$X_a = \frac{k_a F_0}{(k + k_a - m \omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - k_a^2} \quad (17.7)$$

Notar de la ecuación 17.6 que los coeficientes del absorbedor se pueden elegir de forma que la magnitud de la vibración estacionaria de la masa principal,  $X$ , sea exactamente cero. Esto se cumple si,

$$\omega^2 = \frac{k_a}{m_a} \quad (17.8)$$

Por lo tanto, si se eligen  $k_a$  y  $m_a$  de manera de satisfacer la ecuación 17.8, la respuesta estacionaria de la masa principal es cero. En este caso, la respuesta estacionaria del absorbedor viene dada por ( $k_a = m_a \omega^2$ ),

$$x_a = -\frac{F_0}{k_a} \text{sen } \omega t \quad (17.9)$$

el absorbedor oscila con una amplitud igual a  $X_a = F_0/k_a$

Notar que la magnitud de la fuerza actuando sobre el absorbedor es  $k_a x_a = k_a(-F_0/k_a) = -F_0$ . Por lo tanto, cuando el absorbedor es sintonizado a la frecuencia de excitación y ha llegado a un estado estacionario, la fuerza provista por el absorbedor es igual en magnitud y de dirección contraria a la fuerza de excitación. Entregando una fuerza neta igual a cero sobre la masa principal, la que no se mueve. Notar que mientras que la fuerza aplicada sobre el sistema es absorbida completamente por el movimiento del absorbedor, el sistema no esta experimentando una resonancia puesto que  $\sqrt{k_a/m_a}$  no es una frecuencia natural del sistema de dos grados de libertad.

La efectividad de un absorbedor de vibraciones, depende de varios factores. Primero, la excitación armónica debe ser conocida y no desviarse mucho de su valor constante. Si la frecuencia de excitación varía mucho, el absorbedor yo no estará sintonizado y la masa principal va a experimentar alguna oscilación. Existe también el peligro que la frecuencia de excitación varíe y tome el valor de alguna de las dos frecuencias naturales del sistema. En el último caso el sistema entraría en resonancia y potencialmente fallaría. Otro factor importante en el diseño es que el resorte de rigidez  $k_a$  debe ser capaz de soportar la fuerza completa de la excitación, por lo tanto debe ser capaz de realizar las deflecciones correspondientes. El problema del tamaño del resorte y deflección, también como la masa del absorbedor entrega una restricción geométrica en el diseño de un sistema absorbedor de vibraciones.

El problema de evitar resonancias en el diseño de absorbedores en caso que la frecuencia de excitación se desvíe, se puede cuantificar examinando la razón de masas  $\mu$ , definida como la razón entre la masa del absorbedor y la masa principal:

$$\mu = \frac{m_a}{m} \tag{17.10}$$

Adicionalmente, conviene definir las frecuencias,

$$\begin{aligned} \omega_p &= \sqrt{\frac{k}{m}} && \text{Frecuencia natural del sistema primario sin el absorbedor} \\ \omega_a &= \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} && \text{Frecuencia natural del absorbedor sin sistema principal} \end{aligned}$$

Con éstas definiciones, se puede notar que,

$$\frac{k_a}{k} = \mu \frac{\omega_a^2}{\omega_p^2} = \mu\beta^2 \tag{17.11}$$

donde  $\beta = \omega_a/\omega_p$  es la razón de frecuencias. Substituyendo los valores de  $\mu$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_a$  en la ecuación 17.6:

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{1 - (\omega/\omega_a)^2}{[1 + \mu\beta^2 - \beta^2(\omega/\omega_a)^2][1 - (\omega/\omega_a)^2] - \mu\beta^2} \tag{17.12}$$

En la Figura 17.2 se gráfica el valor absoluto de ésta expresión para el caso  $\mu = 0,25$  y  $\beta = 1$ . Este gráfico ilustra cuanta variación en la frecuencia de excitación se puede tolerar en el diseño del absorbedor. Notar que si la frecuencia varía a  $0,781\omega_a$  o  $1,28\omega_a$  el sistema combinado entra en resonancia y falla. De hecho, si la frecuencia de excitación varía de manera que  $|Xk/F_0| > 1$ , la fuerza transmitida al sistema principal es mayor a la fuerza original y el absorbedor deja de ser una mejora. El área sombreada en la Figura 17.2 indica los valores de  $\omega/\omega_a$  de manera que  $|Xk/F_0| < 1$ . En este caso, el rango operativo del absorbedor de vibraciones es  $0,908\omega_a < \omega < 1,118\omega_a$ . En este rango el absorbedor va a entregar algo de protección en el sistema principal al reducir la magnitud de sus vibraciones estacionarias.

El diseño de un absorbedor se puede estudiar más a fondo examinando el efecto de  $\mu$  y  $\beta$ . Estas dos cantidades adimensionales, indirectamente especifican la masa y rigidez del absorbedor. La ecuación característica para sistemas de dos grados de libertad se obtiene al definir el determinante de la matriz de coeficientes en la ecuación 17.4 igual a cero. Los valores de  $\omega$  que satisfacen la ecuación característica, corresponden a las frecuencias naturales del sistema. La ecuación característica

equivale, entonces, a igualar el denominador de la ecuación 17.12 y reemplazar  $\omega$  por  $\omega_n$ . Reordenando se obtiene:

$$\beta^2 \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right)^2 - [1 + \beta^2(1 + \mu)] \frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} + 1 = 0 \tag{17.13}$$

La solución de esta ecuación viene dada por,

$$\left( \frac{\omega_n}{\omega_a} \right)^2 = \frac{1 + \beta^2(1 + \mu)}{2\beta^2} \pm \frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\beta^4(1 + \mu)^2 - 2\beta^2(1 - \mu) + 1} \tag{17.14}$$

La que ilustra como varían las frecuencias naturales del sistema en función de  $\mu$  y  $\beta$ . Estas soluciones se grafican en la Figura 17.3 para el caso  $\beta = 1$ . Notar que a medida que  $\mu$  aumenta, las frecuencias naturales se separan y le alejan de la condición de operación  $\omega = \omega_a$  del absorbedor. Por lo tanto, si  $\mu$  es pequeño, el sistema no va a tolerar mucha variación de la frecuencia de excitación antes de fallar. Como regla general, se eligen valores de  $\mu$  entre 0,05 y 0,25. Los absorbedores de vibración también pueden fallar por fatiga, en general, en el diseño se definen también límites para la amplitud de vibración del absorbedor  $X_a$ .

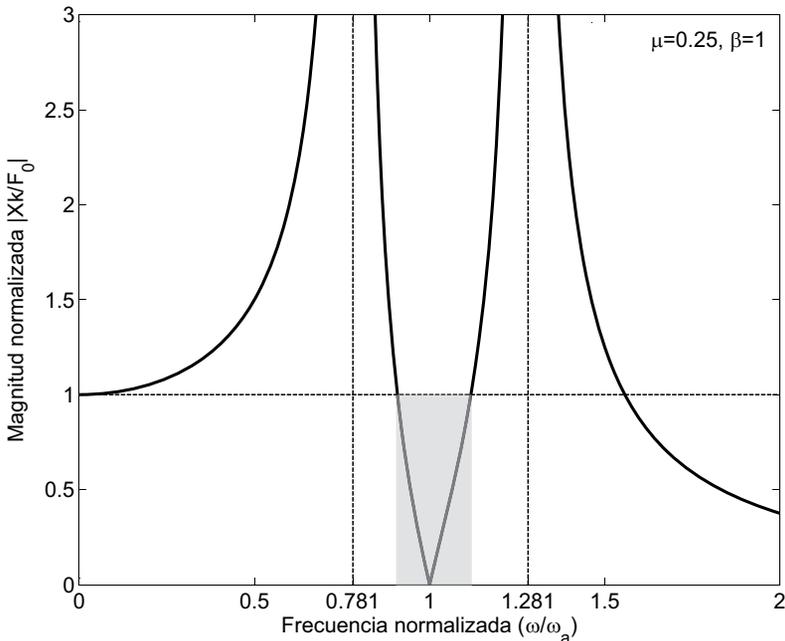


Figura 17.2: Magnitud normalizada de la masa principal versus la frecuencia de excitación normalizada para el caso  $\mu = 0,25$  y  $\beta = 1$

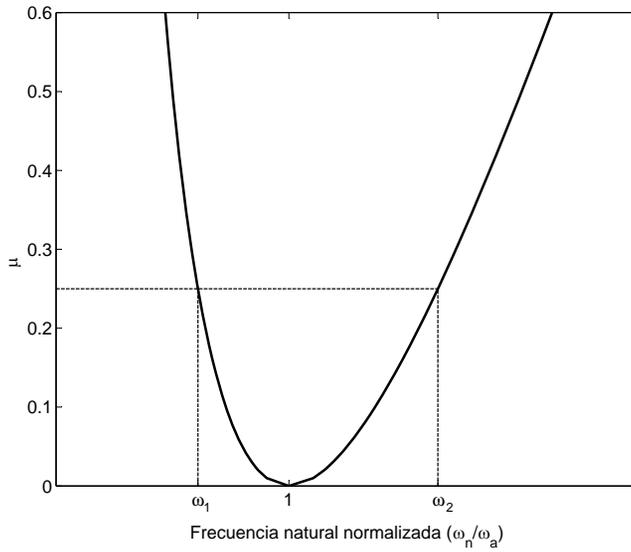


Figura 17.3: Gráfico de la razón de masa  $\mu$  versus las frecuencias naturales del sistema para el caso  $\beta = 1$

## Capítulo 18

# Absorbedor de vibración con amortiguación

El amortiguamiento está usualmente presente en distintos componentes y puede disminuir la capacidad de un absorbedor de vibraciones de lograr que la masa principal no oscile. A pesar de esto, el amortiguamiento se añade usualmente en los absorbedores para prevenir resonancias o para mejorar la banda efectiva de operación del absorbedor de vibraciones. También se puede utilizar un amortiguador solo como un absorbedor de vibraciones, ya que disipa energía. Estos dispositivos se denominan *amortiguadores de vibración* en vez de absorbedores.

Consideremos primero el efecto de añadir amortiguamiento en un absorbedor de vibraciones estándar. En la Figura 18.1 se ilustra un ejemplo de un absorbedor de vibraciones con amortiguación en el sistema principal y en el absorbedor. Las ecuaciones de movimiento de este sistema son:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

Debido al amortiguamiento estas ecuaciones no se pueden desacoplar, sin embargo, se puede calcular la solución estacionaria asumiendo una solución de forma exponencial. Para ello, definamos la fuerza de excitación de la forma  $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$  y asumamos una solución de la forma,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (18.2)$$

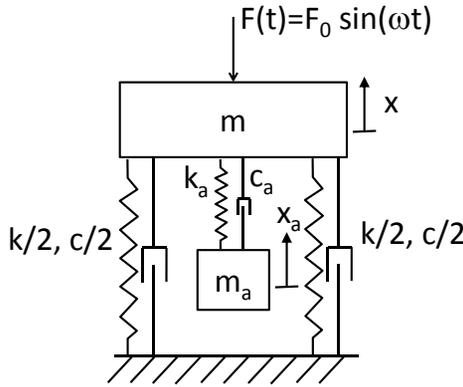


Figura 18.1: Esquema de un absorbedor de vibraciones con amortiguamiento en el sistema principal y en el absorbedor

Donde  $X$  es la amplitud de vibración de la masa principal y  $X_a$  la amplitud de vibración del absorbedor. Reemplazando 18.2 en la ecuación 18.1,

$$\begin{bmatrix} (k + k_a - m\omega^2) + j\omega(c + c_a) & -k_a - j\omega c_a \\ -k_a - j\omega c_a & (k_a - m_a\omega^2) + j\omega c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega t} \tag{18.3}$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $e^{j\omega t}$  e invirtiendo la matriz de coeficientes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X \\ X_a \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} (k_a - m_a\omega^2) + j\omega c_a & k_a + j\omega c_a \\ k_a + j\omega c_a & (k + k_a - m\omega^2) + j\omega(c + c_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\det(K - \omega^2 M - j\omega C)} \tag{18.4}$$

El determinante en el denominador de la fracción viene dado por,

$$\begin{aligned} \det(K - \omega^2 M - j\omega C) &= mm_a\omega^4 - (c_a c + m_a(k + k_a) + k_a m)\omega^2 + k_a k \\ &+ j [(kc_a + ck_a)\omega - (c_a(m + m_a) + cm_a)\omega^3] \end{aligned} \tag{18.5}$$

Simplificando la ecuación 18.4 se obtiene:

$$X = \frac{[(k_a - m_a\omega^2) + j\omega c_a] F_0}{\det(K - \omega^2 M - j\omega C)} \tag{18.6}$$

$$X_a = \frac{(k_a + j\omega c_a) F_0}{\det(K - \omega^2 M - j\omega C)} \tag{18.7}$$

Estas expresiones corresponden a la versión de dos grados de libertad de la función de respuesta en frecuencia vista en 8.15. Es importante notar, que a diferencia del caso sin amortiguamiento, la respuesta de la masa principal no puede ser zero aún si la condición de sintonización se satisface. Por lo tanto, la presencia de amortiguamiento impide la capacidad del absorbedor de anular completamente el movimiento de la masa principal.

Las ecuaciones 18.6 y 18.7 se pueden estudiar para distintos casos específicos. Consideremos primero, el caso en que el amortiguamiento del sistema principal es despreciado ( $c = 0$ ). Si el sistema principal esta hecho de metal, el amortiguamiento interno es muy pequeño y es razonable despreciarlo. En este caso, el determinante en la ecuación 18.5 se reduce a:

$$\det(K - \omega^2 M - j\omega C) = [(k - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - m_a k_a \omega^2] + j [(k - (m + m_a)\omega^2)c_a \omega]$$

La deflexión máxima de la masa principal viene dada por la ecuación 18.6, con el determinante definido en la ecuación anterior. Esto corresponde a la división de dos numeros complejos y, por lo tanto, es un numero complejo representando la amplitud y fase de la respuesta de la masa principal. Usando algebra de números complejos, la amplitud de movimiento de la masa principal se puede escribir como:

$$\left| \frac{X}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{(k_a - m_a\omega^2)^2 + \omega^2 c_a^2}{[(k - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - m_a k_a \omega^2]^2 + [(k - (m + m_a)\omega^2)c_a \omega]^2}} \quad (18.8)$$

**Recuerdo de álgebra de numeros complejos**

La respuesta dada por la ecuación 18.6 se puede escribir como la razón entre dos números complejos:

$$\frac{X}{F_0} = \frac{A_1 + jB_1}{A_2 + jB_2}$$

multiplicando por el conjugado del denominador arriba y abajo:

$$\frac{X}{F_0} = \frac{(A_1 + jB_1)(A_2 - jB_2)}{(A_2 + jB_2)(A_2 - jB_2)} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{A_2^2 - B_2^2} + j \frac{B_1 A_2 + A_1 B_2}{A_2^2 - B_2^2}$$

lo que indica como  $X/F_0$  se puede escribir como un número complejo de la forma  $X/F_0 = a + jb$ . La magnitud de  $X/F_0$  viene dado por  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , de donde se obtiene que:

$$\left| \frac{X}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2}}$$

lo que corresponde a la expresión en dada en la ecuación 18.8

Utilizando los mismos parámetros definidos en el capítulo anterior:  $\mu = m_a/m$ ,  $\omega_a = \sqrt{k_a/m_a}$ ,  $\omega_p = \sqrt{k/m}$ ,  $\beta = \omega_a/\omega_p$ ,  $r = \omega/\omega_p$ , e introduciendo el “factor de amortiguamiento mixto” definido por,

$$\zeta = \frac{c_a}{2m_a\omega_p} \tag{18.9}$$

La expresión de la ecuación 18.8 se puede expresar como:

$$\frac{Xk}{F_0} = \sqrt{\frac{(2\zeta r)^2 + (r^2 - \beta^2)^2}{(2\zeta r)^2(r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + [\mu r^2\beta^2 - (r^2 - 1)(r^2 - \beta^2)]^2}} \tag{18.10}$$

la que entrega la amplitud adimensional de la masa principal. La que se encuentra determinada por cuatro parámetros físicos:

$\mu$  es la razón entre la masa del absorbedor y la masa principal

$\beta$  es la razón entre las frecuencias naturales desacopladas

$r$  es la razón entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural principal

$\zeta$  es la razón entre amortiguamiento del absorbedor y  $2m_a\omega_p$

Estos cuatro parámetros se pueden considerar como variables de diseño y se eligen de manera de obtener el menor valor posible en la respuesta de la masa principal,  $X$ , para una aplicación en particular. En la Figura 18.2 se ilustra como el valor del amortiguamiento, reflejado en  $\zeta$ , afecta la amplitud de la respuesta para  $\mu = 0,25$  y  $\beta = 1$ .

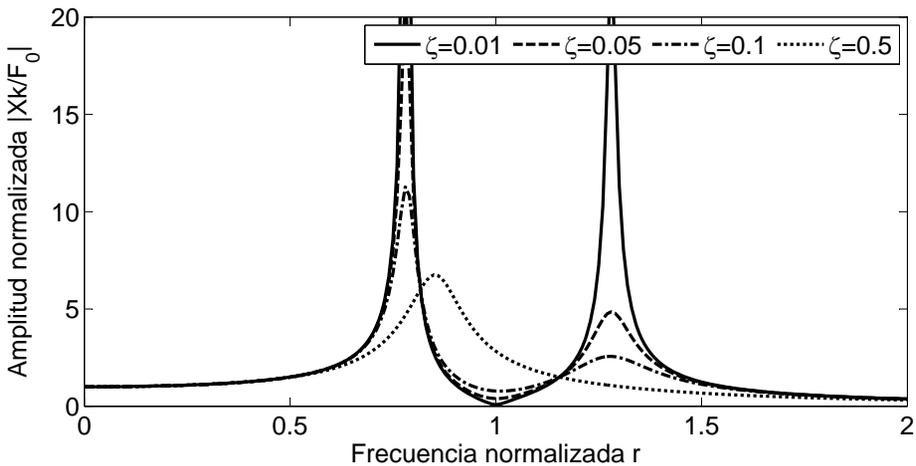


Figura 18.2: Amplitud normalizada de la masa principal como función de la razón de frecuencias  $r$ , para el caso  $\mu = 0,25$  y  $\beta = 1$

En la Figura 18.2 se observa que el efecto de añadir amortiguamiento es un aumento del rango de operación  $|Xk/F_0| \leq 1$ . El precio de este aumento en el rango operativo es que la amplitud no es nunca cero.

Consideremos ahora el caso que el absorbedor sea un amortiguador puro como en la Figura 18.3. Sistemas se esta forma aparecen en el diseño de reductores de vibración para sistemas rotatorios como motores, donde la velocidad de operación, y por lo tanto la frecuencia de excitación, varía en un rango amplio. En esos casos, se añade un amortiguador viscoso al final del eje (o componente rotatorio) como se ilustra en la Figura 18.4. El eje rota con un ángulo  $\theta_1$  con rigidez torsional  $k$  e inercia  $J_1$ . El amortiguador de inercia  $J_2$  gira con ángulo  $\theta_2$  en un medio viscoso de amortiguación  $c_a$ .

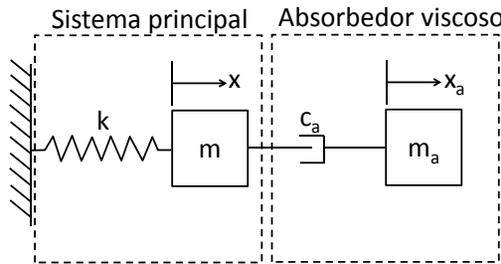


Figura 18.3: Sistema amortiguador-masa añadido al sistema principal para formar un absorbedor viscoso de vibraciones

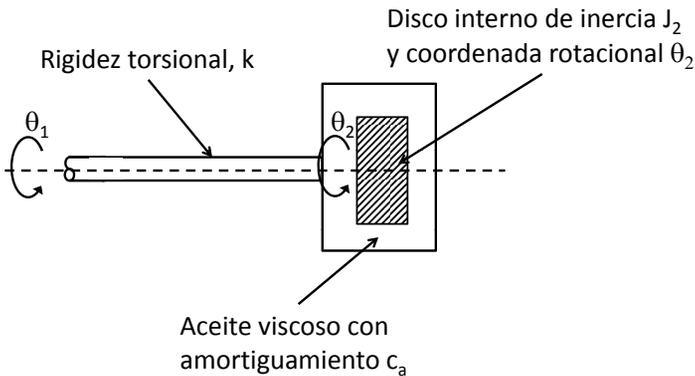


Figura 18.4: Amortiguador viscoso y masa añadido a un eje rotatorio para absorción de vibraciones de amplio espectro

En este caso se tiene que  $k_a = 0$ , por lo tanto  $\omega_a = 0$  y  $\beta = \omega_a/\omega_p = 0$ .

Reemplazando en la ecuación 18.10 y asumiendo que la fuerza  $F_0$  es un momento de magnitud  $M_0$ , se obtiene:

$$\frac{Xk}{M_0} = \sqrt{\frac{4\zeta^2 + r^2}{4\zeta^2(r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 r^2}} \tag{18.11}$$

donde  $\zeta = c_a/(2J_2\omega_p)$ ,  $r = \omega/\omega_p$  y  $\mu = J_2/J_1$ . En la Figura 18.5 se ilustra la amplitud  $Xk/M_0$  para distintos niveles de amortiguamiento en función de  $r$ . Notar que el mayor amortiguamiento no corresponde a la mayor reducción de amplitud.

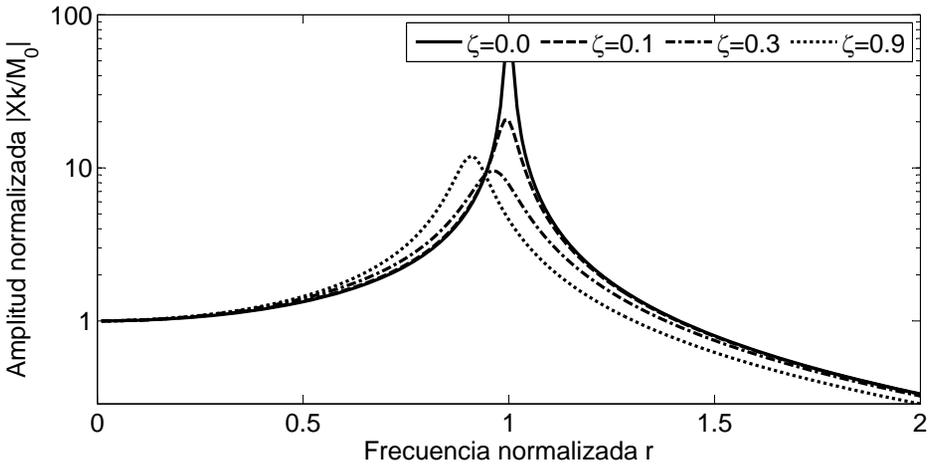


Figura 18.5: Amplitud de la respuesta para un sistema con un amortiguador viscoso, caso  $\mu = 0,25$

## Capítulo 19

# Adición de amortiguamiento viscoelástico

Una manera efectiva y usual de reducir las vibraciones transientes y estacionarias, es aumentar el amortiguamiento en el sistema de manera que haya una mayor disipación de energía.

La adición de amortiguamiento consiste en añadir una lámina de material viscoelástico, como goma, en la estructura. El sistema combinado tiene un mayor nivel de amortiguamiento y por lo tanto puede reducir vibraciones no deseadas. Este procedimiento se determina usando notación de *rigidez compleja*. El concepto de rigidez compleja se obtiene a partir de la respuesta armónica de un sistema amortiguado de la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{j\omega t} \quad (19.1)$$

Assumiendo una solución de la forma  $x(t) = X e^{j\omega t}$ , se obtiene,

$$(-m\omega^2 + j\omega c + k)X = F_0 \quad (19.2)$$

lo que se puede escribir como,

$$(-m\omega^2 + k(j\frac{\omega c}{k} + 1))X = F_0 \quad (19.3)$$

ó

$$(-m\omega^2 + k^*)X = F_0 \quad (19.4)$$

donde  $k^* = k(1 + j\bar{\eta})$ . Donde  $\bar{\eta} = \omega c/k$  se denomina *factor de pérdida* y  $k^*$  se denomina *rigidez compleja*. Esto ilustra que en el caso estacionario, la respuesta

de un sistema amortiguado se puede representar como la respuesta de un sistema “sin amortiguamiento” con rigidez compleja. Dado que el factor de pérdida tiene la forma,

$$\bar{\eta} = \frac{c}{k}\omega \quad (19.5)$$

este factor depende de la frecuencia de excitación. Por lo tanto, el valor de la energía disipada depende de la frecuencia de excitación.

El concepto de rigidez compleja se denomina *modelo de Kelvin-Voigt* de un material. Este corresponde al sistema masa-resorte-amortiguador clásico. La diferencia entre el modelo de Kelvin-Voigt y los modelos vistos anteriormente, es que el primero solo es válido para la respuesta estacionaria de movimiento armónico.

La formulación de la rigidez compleja, también se puede extender al modelo de young de un material viscoelástico. Tales materiales se denominan *viscoelásticos* porque poseen un comportamiento tanto elástico como viscoso. El modulo de elasticidad complejo de éstos materiales se puede escribir como,

$$E^* = E(1 + j\eta) \quad (19.6)$$

como antes  $\eta$  es el factor de pérdida del material viscoelástico. El modulo de elasticidad complejo de un material, se puede medir y en general depende de la frecuencia de excitación y de la temperatura del material.

Los materiales que tienen un comportamiento viscoelástico son la goma y materiales tipo goma, plexiglas, vinilo y nylon. Un uso común de estos materiales es para la adición de amortiguamiento o como aisladores. Estos materiales se añaden usualmente en capas a estructuras formadas por materiales de bajo amortiguamiento, como aluminio o acero, para formar una nueva estructura con suficiente rigidez y amortiguamiento. En la Tabla 19.1 se entregan valores de modulo de elasticidad y factor de perdida en función de la frecuencia y temperatura para un material viscoelástico.

$E$ (Pa)	$\eta$	$T$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$\omega$ (Hz)
$2,068 \times 10^7$	0.21	24	10
$2,758 \times 10^7$	0.28	24	100
$4,826 \times 10^7$	0.55	24	1000
$2,758 \times 10^7$	0.25	10	10
$4,137 \times 10^7$	0.5	10	100
$8,963 \times 10^7$	1	10	1000

Tabla 19.1: Datos de modulo de elasticidad complejo para Paracril-BJ con 50 PHRC<sup>a</sup>

El factor de perdida  $\eta$  definido en termino del modulo de elasticidad complejo está relacionado con el factor de perdida de la rigidez  $\bar{\eta}$ , de la misma forma que el

modulo de elasticidad y rigidez de una estructura están relacionados. Por ejemplo, si el componente es una viga, la rigidez asociada con la deflexión se define como,

$$k = \frac{3EI}{l^3} \tag{19.7}$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la sección y  $l$  es el largo de la viga. Por lo tanto, si la viga esta hecha de un material viscoelástico,

$$k^* = \frac{3E^*I}{l^3} = \frac{3I}{l^3}E(1 + j\eta) = k(1 + j\bar{\eta}) \tag{19.8}$$

de manera que las dos nociones de factores de perdida son idénticos,  $\eta = \bar{\eta}$ .

Como se mencionó anteriormente el amortiguamiento se añade a la estructura adhiriendo una capa de material viscoelástico sobre ella, como se ilustra en la Figura 19.1. Considerando este caso, la viga está compuesta de dos materiales. El primero es un metal de modulo de elasticidad  $E_1$  y espesor  $H_1$ . El segundo material, corresponde a un material viscoelástico de modulo de elasticidad  $E_2$ , factor de perdida  $\eta_2$  y espesor  $H_2$ . Se puede demostrar que la rigidez combinada de la viga  $EI$  viene dada por,

$$EI = E_1I_1 \left[ 1 + e_2h_2^3 + 3(1 + h_2)^2 \frac{e_2h_2}{1 + e_2h_2} \right] \tag{19.9}$$

donde  $e_2 = E_2/E_1$  y  $h_2 = H_2/H_1$  son adimensionales. Notar que resultado de la viga compuesta es una viga de rigidez un poco mayor a la original. El factor de perdida del sistema combinado  $\eta$  viene dado por,

$$\eta = \frac{e_2h_2(3 + 6h_2 + 4h_2^2 + 2e_2h_2^3 + e_2^2h_2^4)}{(1 + e_2h_2)(1 + 4e_2h_2 + 6e_2h_2^2 + 4e_2h_2^3 + e_2^2h_2^4)}\eta_2 \tag{19.10}$$

Esta última ecuación se puede utilizar en el diseño de adhesión de amortiguamiento a vigas simples. Sin embargo, es una expresión un poco larga para ser usada en diseño. Muchas veces se usa la aproximación,

$$\eta = 14(e_2h_2^2)\eta_2 \tag{19.11}$$

la que es razonable en muchos casos. Los valores de  $e_2$  y  $\eta_2$  viene dados por los materiales. Por lo tanto, una vez seleccionado el material, la variable que queda como parte del diseño es el parámetro  $h_2 = H_2/H_1$ .

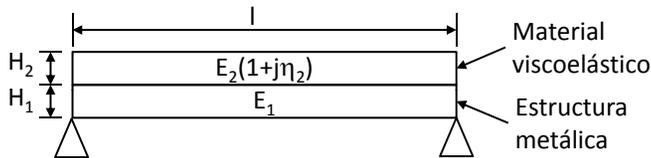


Figura 19.1: Viga simple con adhesión de amortiguamiento

## **Parte IV**

# **Vibración en Sistemas Continuos**

# Capítulo 20

## Vibración en barras

Consideremos la vibración de una barra elástica de largo  $l$  y sección variable, como se indica en la Figura 20.1. La densidad de la barra se denota por  $\rho$  y el área de la sección como  $A(x)$ . Usando el sistema de coordenadas indicado en la Figura, la suma de fuerzas en un elemento infinitesimal en la dirección  $x$  es,

$$F + dF - F = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \tag{20.1}$$

donde  $w(x, t)$  es la deflexión de la barra en la dirección  $x$ ,  $F$  denota la fuerza que actúa por la izquierda de elemento, mientras que  $F + dx$  es la fuerza actuando por la derecha. Reordenando la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{dF}{dx} = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \tag{20.2}$$

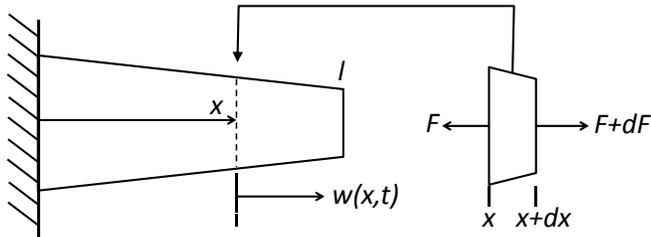


Figura 20.1: Barra empotrada con vibración longitudinal en la dirección  $x$

De resistencia de materiales la fuerza  $F$  viene dada por  $F = \sigma_s A$ , donde  $\sigma_s$  es la tensión unitaria en la dirección  $x$  y tiene el valor  $E\varepsilon_x$ , donde  $E$  es el modulo de

Young y  $\varepsilon_x$  es la deformación unitaria. Esto lleva a:

$$F = EA(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (20.3)$$

Reemplazando 20.3 en la ecuación 20.2:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (20.4)$$

En los casos en que  $A(x)$  es constante, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\left( \frac{E}{\rho} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (20.5)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de onda, donde  $c = \sqrt{E/\rho}$  corresponde a la velocidad de propagación de la deformación en la barra.

La ecuación 20.5 se resuelve con un método de separación de variables. En este método se asume que la solución  $w(x, t)$  se puede escribir como la multiplicación de dos funciones, una que depende solo de  $x$  y otra que depende solo de  $t$ . Por lo tanto:

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (20.6)$$

Reemplazando en la ecuación 20.5:

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)\ddot{T}(t) \quad (20.7)$$

reordenando,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} \quad (20.8)$$

Dado que ambos lados de la ecuación son funciones de una variable distinta, entonces para que se cumpla la relación 20.8, ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = -\sigma^2 \quad (20.9)$$

En este caso, la constante  $-\sigma^2$  se elige para asegurar que sea un número negativo. En realidad, se deben considerar todas las opciones (negativo, positivo o cero). Sin embargo, con las otras dos opciones se llegan a resultados físicamente imposibles.

Reordenando 20.9, se tiene que  $X(x)$  debe satisfacer:

$$X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0 \quad (20.10)$$

la que tiene solución de la forma:

$$X(x) = a_1 \operatorname{sen} \sigma x + a_2 \operatorname{cos} \sigma x \quad (20.11)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes de integración y dependen de las condiciones de borde.

Si consideramos el caso de una barra empotrada por la izquierda y libre en el extremo derecho, se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$X(0) = 0, X'(l) = 0 \quad (20.12)$$

Aplicando la primera ecuación se obtiene que  $a_2 = 0$ , de manera que  $X(x)$  tiene la forma:

$$X(x) = a_1 \operatorname{sen} \sigma x \quad (20.13)$$

Aplicando la segunda condición:

$$X'(l) = a_1 \sigma \operatorname{cos} \sigma l = 0 \quad (20.14)$$

Dado que  $a_1$  no puede ser igual a cero, entonces se debe cumplir que:

$$\sigma l = (2n - 1) * \frac{\pi}{2} \quad (20.15)$$

Los modos de vibración son entonces de la forma:

$$X(x) = a_1 \operatorname{sen} \left( \frac{(2n - 1)\pi x}{2l} \right) \quad (20.16)$$

Consideremos ahora la ecuación para  $T(t)$ :

$$\ddot{T}_n(t) + \sigma_n^2 c^2 T_n(t) = 0 \quad (20.17)$$

la que tiene solución de la forma:

$$T_n(t) = A_n \operatorname{sen} \sigma_n ct + B_n \operatorname{cos} \sigma_n ct \quad (20.18)$$

La solución final es por lo tanto de la forma:

$$w(x, t) = \sum_i c_n \operatorname{sen} \sigma_n x \operatorname{sen} \sigma_n ct + d_n \operatorname{sen} \sigma_n x \operatorname{cos} \sigma_n ct \quad (20.19)$$

El set de constantes  $c_n$  y  $d_n$  se puede determinar al aplicar las condiciones iniciales de  $w(x, t)$ . Consideremos el desplazamiento inicial:

$$w(x, 0) = w_0(x) = \sum_i d_n \operatorname{sen} \left( \frac{(2n - 1)\pi}{2l} x \right) \quad (20.20)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right)$  e integrando sobre el largo:

$$\int_0^l w_0(x) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx = \sum_i d_n \int_0^l \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx \quad (20.21)$$

Dado que  $\{\text{sen}\sigma_n x\}$  es un set de funciones ortogonales, cada termino del lado derecho es igual a cero excepto para  $n = m$ :

$$\int_0^l \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx = \begin{cases} l/2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (20.22)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^l w_0(x) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx = d_m \frac{l}{2} \quad (20.23)$$

y

$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) dx \quad (20.24)$$

Consideremos ahora la velocidad inicial:

$$\dot{w}_0(x) = \sum_i c_n \sigma_n c \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \quad (20.25)$$

multiplicando nuevamente ambos lados por  $\text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right)$  e integrando sobre el largo:

$$\int_0^l \dot{w}_0(x) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx = \sum_i c_n \sigma_n c \int_0^l \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\right) dx \quad (20.26)$$

de donde se obtiene que:

$$c_n = \frac{2}{\sigma_n c l} \int_0^l \dot{w}_0(x) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) dx \quad (20.27)$$

Por lo tanto, la respuesta libre de una barra empotrada con un lado libre viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_i c_n \operatorname{sen} \sigma_n x \operatorname{sen} \sigma_n ct + d_n \operatorname{sen} \sigma_n x \cos \sigma_n ct$$

con,

$$\sigma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right) dx$$

$$c_n = \frac{2}{\sigma_n cl} \int_0^l \dot{w}_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right) dx$$

En la Tablas 20.1 y 20.2 se resumen distintas condiciones de borde usuales en barras con sus respectivos modos y frecuencias características.

Fijo en un extremo:  $w(x, t)|_{x=0, l} = 0$

Libre en un extremo:  $\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0, l} = 0$

Masa adherida a la izquierda:  $AE \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = m \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0}$

Masa adherida a la derecha:  $AE \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -m \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=l}$

Resorte de rigidez  $k$  adherido a la izquierda:  $AE \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = k w(x, t)|_{x=0}$

Resorte de rigidez  $k$  adherido a la derecha:  $AE \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -k w(x, t)|_{x=l}$

Tabla 20.1: Resumen de varias condiciones de borde para la vibración longitudinal de una barra

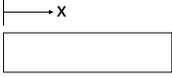
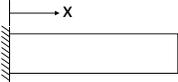
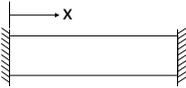
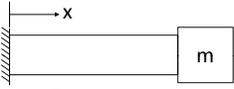
Configuración	Frecuencia característica (rad/s)	Modos de vibración
 <p>libre-libre</p>	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$
 <p>fijo-libre</p>	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l}$	$\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$
 <p>fijo-fijo</p>	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$
 <p>fijo-resorte</p>	$\lambda_n \cot \lambda_n = -\left(\frac{kl}{EA}\right)$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right)$
 <p>fijo-masa</p>	$\cot \lambda_n = \left(\frac{m}{\rho Al}\right) \lambda_n$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right)$

Tabla 20.2: Distintas configuraciones para una barra con vibración longitudinal ilustrando sus modos y frecuencias características

# Capítulo 21

## Vibración torsional

La barra del capítulo anterior puede vibrar también en la dirección torsional como se muestra en el eje circular de la Figura 21.1. En este caso, la vibración ocurre en la dirección angular en torno al centro del eje. La rotación del eje,  $\theta$ , es una función de la posición a lo largo,  $x$ , y del tiempo,  $t$ . La ecuación de movimiento se obtiene al considerar el balance de momento de un elemento infinitesimal de largo  $dx$ , como el ilustrado en la Figura 21.1. El torque a la derecha del elemento es  $\tau$ , mientras que el torque a la izquierda viene dado por  $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx$ .

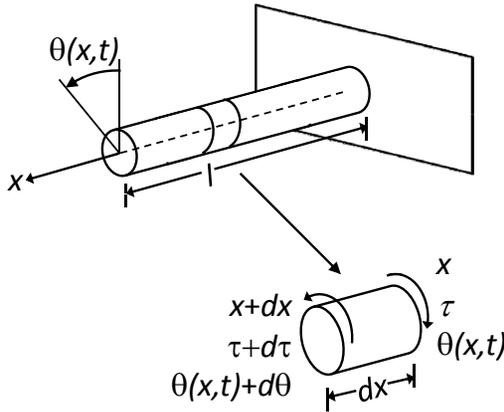


Figura 21.1: Eje circular ilustrando un movimiento angular  $\theta(x,t)$

De resistencia de materiales, el torque aplicado se relaciona con la deflección rotacional por:

$$\tau = GJ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (21.1)$$

donde  $G$  es el modulo de corte y  $J$  el momento de inercia polar de la sección. Notar que  $J$  podría ser una función de  $x$ , pero la vamos a considerar constante. Sumando el torque total actuando sobre  $dx$  se tiene que:

$$\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx - \tau = J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dx \quad (21.2)$$

donde  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$  es la aceleración angular y  $J_0$  es el momento de inercia por unidad de largo, se puede demostrar que  $J_0 = \rho J$ . Reemplazando el torque dado en la ecuación 21.1, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GJ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (21.3)$$

Simplificando en el caso de  $J$  constante:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left( \frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (21.4)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de ondas con  $c = \sqrt{G/\rho}$ . Para otro tipo de secciones, la ecuación torsional de un eje todavía se puede ocupar para aproximar el movimiento torsional. Sin embargo, se debe reemplazar  $J$  en la ecuación 21.1 por una constante torsional  $\gamma$ , que equivale al momento requerido para producir una rotación de 1 *rad* en un eje de largo unitario dividido por el modulo de corte. Por lo tanto, en un eje de sección no circular, la ecuación de movimiento se puede aproximar por:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left( \frac{G\gamma}{\rho J} \right) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (21.5)$$

En la Tabla 21.1 se entregan valores de  $\gamma$  para algunas secciones usuales.

La solución de la ecuación 22.1 depende de dos condiciones iniciales en el tiempo ( $\theta(x, 0)$  y  $\partial \theta(x, 0)/\partial t$ ) y dos condiciones de borde, una en cada extremo del eje. Las elecciones posibles de condiciones de borde son similares a las de la barra. En la tabla 21.2 se entregan algunas condiciones de borde usuales.

En la Tabla 21.3 se entregan las frecuencias naturales y modos de vibración para distintas configuraciones. Notar la similitud con el caso de la barra con movimiento longitudinal. La única diferencia esta en la interpretación física del movimiento.

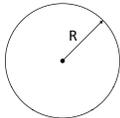
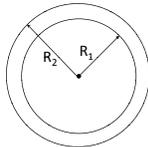
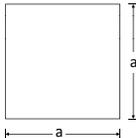
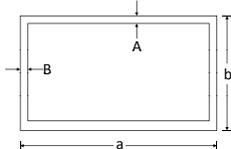
Sección	Constante torsional $\gamma$
	$\frac{\pi R^4}{2}$
	$\frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$
	$0,1406a^4$
	$\frac{2AB(a - A)^2(b - B)^2}{aA + bB - A^2 - B^2}$

Tabla 21.1: Algunos valores de la constante torsional para distintas secciones

Fijo en un extremo:  $\theta(x, t)|_{x=0,l} = 0$

Libre en un extremo:  $\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0,l} = 0$

Inercia  $J_1$  adherida a la izquierda:  $GJ \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = J_1 \frac{\partial^2\theta(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$

Inercia  $J_1$  adherida a la derecha:  $GJ \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -J_1 \frac{\partial^2\theta(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l}$

Resorte de rigidez k adherido a la izquierda:  $GJ \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = k \theta(x, t)|_{x=0}$

Resorte de rigidez k adherido a la derecha:  $GJ \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -k \theta(x, t)|_{x=l}$

Tabla 21.2: Resumen de varias condiciones de borde para la vibración torsional de un eje

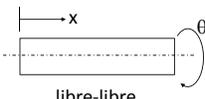
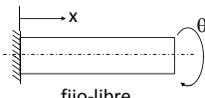
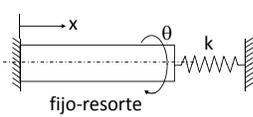
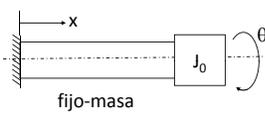
Configuración	Frecuencia característica (rad/s)	Modos de vibración
 <p>libre-libre</p>	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$
 <p>fijo-libre</p>	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l}$	$\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$
 <p>fijo-fijo</p>	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$
 <p>fijo-resorte</p>	$\lambda_n \cot \lambda_n = -\left(\frac{kl}{G\gamma}\right)$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right)$
 <p>fijo-masa</p>	$\cot \lambda_n = \left(\frac{J_0}{\rho l \gamma}\right) \lambda_n$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\text{sen}\left(\frac{\lambda_n x}{l}\right)$

Tabla 21.3: Distintas configuraciones para una eje con vibración torsional ilustrando sus modos y frecuencias características

## Capítulo 22

# Vibración transversal en vigas

En la Figura 22.1 se ilustra una viga con vibración en la dirección transversal; deflexión  $w(x, t)$  en la dirección  $y$ . La viga tiene sección  $A(x)$  y largo  $l$ . Asociada a la viga se define la rigidez por flexión  $EI(x)$ , donde  $E$  es el modulo de Young para la viga e  $I(x)$  la inercia de la sección con respecto al eje  $z$ . De resistencia de materiales, el momento sobre la viga,  $M(x, t)$ , se relaciona con la deflexión,  $w(x, t)$ , por:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (22.1)$$

Un modelo para las vibraciones en flexión se puede derivar al examinar un elemento infitesimal como el de la Figura 22.1. De la suma de fuerzas en la dirección  $y$  se obtiene:

$$\left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) - V(x, t) + f(x, t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (22.2)$$

donde  $V(x, t)$  es la fuerza de corte a la izquierda del elemento y  $V(x, t) + dV(x, t)$  es la fuerza a la derecha del elemento,  $f(x, t)$  es la fuerza externa total aplicada al elemento por unidad de largo. En el balance de fuerzas anterior, se asume que la deformación por corte es despreciable, esto es cierto si  $l/h_2 \geq 10$  y  $l/h_1 \geq 10$ , donde  $h_1$  y  $h_2$  son la base y altura de la sección de la viga.

Equilibrado, los momentos actuando sobre el elemento, se tiene que:

$$\left( M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right) - M(x, t) + \left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) dx + [f(x, t) dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (22.3)$$

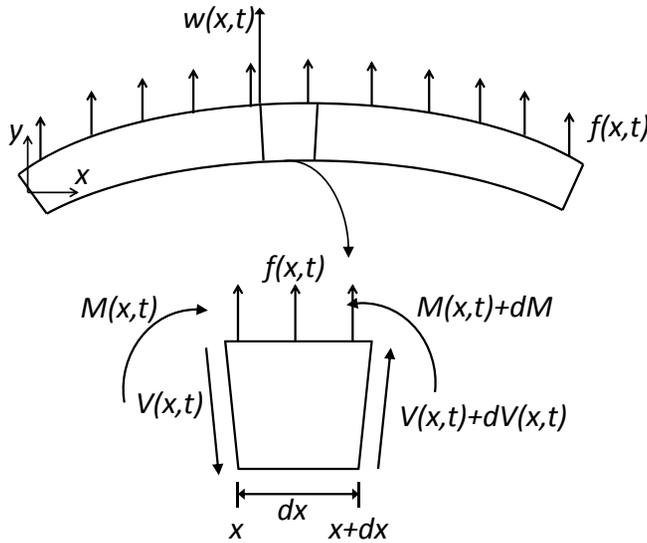


Figura 22.1: Viga de largo  $l$  en vibración transversal y deformada por una fuerza por unidad de largo denotada  $f(x, t)$

Simplificando la expresión anterior,

$$\left[ \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + V(x, t) \right] dx + \left[ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{f(x, t)}{2} \right] dx^2 = 0 \tag{22.4}$$

dado que  $dx$  es muy pequeño  $dx^2$  es casi cero, y por lo tanto se tiene que:

$$V(x, t) = - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \tag{22.5}$$

Reemplazando esta relación en la ecuación 22.2, se tiene que:

$$- \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} dx + f(x, t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \tag{22.6}$$

Substituyendo ahora la ecuación 22.1 y dividiendo por  $dx$ :

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = f(x, t) \tag{22.7}$$

Si no se aplican fuerzas externas y se asume una sección constante, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{22.8}$$

Notar que a diferencia de los casos anteriores, ésta ecuación contiene una derivada a la cuarta y, por lo tanto, requiere cuatro condiciones de borde para calcular la solución. La presencia de una segunda derivada temporal, indica que se necesitan dos condiciones en el tiempo, una para el desplazamiento y una para la velocidad.

Las condiciones de borde necesarias para resolver la ecuación 22.8 utilizando el método de separación de variables al examinar la deflexión  $w(x, t)$  son; la pendiente de la deflexión  $\partial w(x, t)/\partial x$ , el momento de flexión  $EI\partial^2 w(x, t)/\partial x^2$  y la fuerza de corte  $\partial [EI\partial^2 w(x, t)/\partial x^2]/\partial x$  en cada extremo de la viga. Condiciones de borde usuales son; *empotrada*, *apoyo simple*, *libre* o *deslizante*. En un apoyo deslizante la viga puede deslizarse pero no puede rotar.

Si una viga está **libre** en un extremo, la deflexión y pendiente en ese extremo no tienen restricciones, pero el momento y la fuerza de corte son cero:

$$\begin{aligned}\text{momento} &= EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \text{fuerza de corte} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0\end{aligned}\tag{22.9}$$

Si, por otro lado, el extremo de la viga está **empotrado**, el momento y la fuerza de corte no tienen restricciones, pero la deflexión y su pendiente son cero:

$$\begin{aligned}\text{deflexión} &= w = 0 \\ \text{pendiente} &= \frac{\partial w}{\partial x} = 0\end{aligned}\tag{22.10}$$

En el caso de un **apoyo simple**, la pendiente y la fuerza de corte no tienen restricciones, pero la deflexión y el momento son cero:

$$\begin{aligned}\text{deflexión} &= w = 0 \\ \text{momento} &= EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0\end{aligned}\tag{22.11}$$

Por último, una condición **deslizante** significa que la pendiente y las fuerzas de corte son cero, mientras que el momento y la deflexión no tienen restricciones:

$$\begin{aligned}\text{pendiente} &= \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \text{fuerza de corte} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0\end{aligned}\tag{22.12}$$

Otras condiciones de borde son posibles al conectar un extremo de la viga a un resorte, mesa, amortiguador, etc. Estas condiciones de borde vienen determinadas por balance de fuerzas y momentos.

La ecuación 22.8 se resuelve por medio del método de separación de variables usado en los capítulos anteriores. Substituyendo  $w(x, t) = X(x)T(t)$ :

$$c^2 \frac{X''''(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (22.13)$$

Se ha elegido la constante  $\omega^2$  basado en la experiencia con los sistemas anteriores, en donde, la frecuencia natural se obtiene de la ecuación temporal:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (22.14)$$

Esta ecuación temporal tiene solución de la forma:

$$T(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t \quad (22.15)$$

donde las constantes  $A$  y  $B$  se van a determinar eventualmente por medio de las condiciones iniciales de deflexión y velocidad. La ecuación espacial queda como:

$$X''''(x) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (22.16)$$

definiendo,

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (22.17)$$

y asumiendo una solución de la forma  $Ae^{\alpha x}$ , la solución general de la ecuación 23.1 tiene la forma:

$$X(x) = a_1 \operatorname{sen} \beta x + a_2 \operatorname{cos} \beta x + a_3 \operatorname{senh} \beta x + a_4 \operatorname{cosh} \beta x \quad (22.18)$$

En este caso el valor de  $\beta$  y tres de las cuatro constantes de integración  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  se van a determinar con las cuatro condiciones de borde. La cuarta constante se combina con las constante  $A$  y  $B$  de la ecuación temporal, las que se determinan de las condiciones iniciales.

### Ejemplo

Como ejemplo, determinemos los modos y frecuencias naturales de una viga empotrada en un lado y con un apoyo simple en el otro extremo.

En el extremo empotrado se deben cumplir las condiciones de borde dadas en 22.10:

$$X(0) = 0 \implies a_2 + a_4 = 0$$

$$X'(0) = 0 \implies \beta(a_1 + a_3) = 0$$

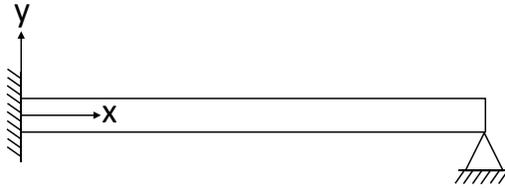


Figura 22.2: Viga de largo  $l$  empotrada en un extremo y con un apoyo simple en el otro extremo

Reemplazando en la ecuación 23.3 se obtiene que,

$$X(x) = a_1(\sin \beta x - \sinh \beta x) + a_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) \quad (22.19)$$

Por otro lado, en el extremo de la derecha se deben cumplir las relaciones dadas en 22.11:

$$X(l) = 0 \implies a_1(\sin \beta l - \sinh \beta l) + a_2(\cos \beta l - \cosh \beta l) = 0$$

$$EIX''(l) = 0 \implies \beta^2 a_1(-\sin \beta l - \sinh \beta l) + \beta^2 a_2(-\cos \beta l - \cosh \beta l) = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir de forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} (\sin \beta l - \sinh \beta l) & (\cos \beta l - \cosh \beta l) \\ (-\sin \beta l - \sinh \beta l) & (-\cos \beta l - \cosh \beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones puede tener una solución distinta de cero para el vector  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T$  solo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero.

Definiendo el determinante de la matriz de coeficientes igual a cero se obtiene la siguiente ecuación,

$$\tan \beta l = \tanh \beta l$$

la que se satisface para un número infinito de valores de  $\beta$ , denotados por  $\beta_n$ . La solución se puede visualizar al graficar ambos  $\tan \beta l$  y  $\tanh \beta l$  versus  $\beta l$  en el mismo gráfico, como se muestra en la Figura 22.3.

Las primeras cinco soluciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_1 l &= 3,9267 & \beta_2 l &= 7,0686 & \beta_3 l &= 10,2102 \\ \beta_4 l &= 13,3518 & \beta_5 l &= 16,4934 \end{aligned}$$

Para el resto de los modos (i.e. para valores del índice  $n > 5$ ), las soluciones de la ecuación característica se pueden aproximar por:

$$\beta_n l = \frac{(4n + 1)\pi}{4}$$

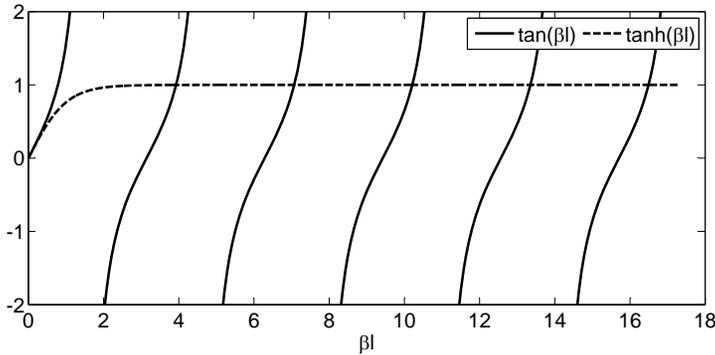


Figura 22.3: Gráfico de  $\tan \beta l$  y  $\tanh \beta l$  versus  $\beta l$

Con los valores de la frecuencias  $\beta_n$ , se pueden calcular las formas modales. Reemplazando  $\beta_n$  en la ecuación 22.19,

$$a_1(\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l) + a_2(\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l) = 0$$

Por lo tanto,

$$a_1 = -\frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l} a_2$$

para cada  $n$ . El coeficiente  $a_2$  no se puede determinar por este set de ecuaciones porque la matriz es singular (en caso contrario se tendría que cada  $a_i$  es cero). Este coeficiente se convierte en la magnitud arbitraria del modo de vibración. Esta constante depende de  $n$ , lo que vamos a denotar por  $(a_2)_n$ . Reemplazando se obtienen los modos de vibración:

$$X_n(x) = (a_2)_n \left[ \cos \beta_n x - \cosh \beta_n x - \frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \right]$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

En la Figura 22.4 se muestran los primeros tres modos de vibración para  $(a_2)_n = 1$ .

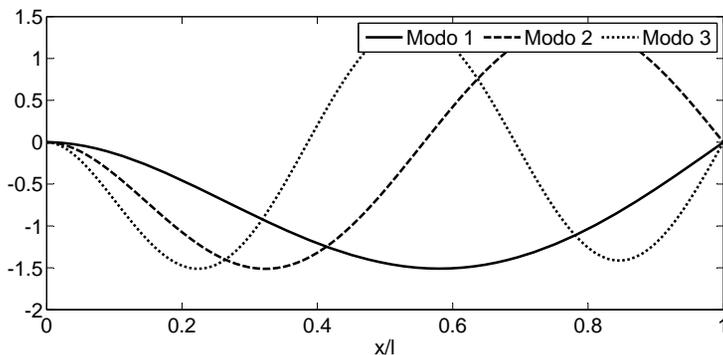


Figura 22.4: Gráfico de los primeros tres modos de vibración de una viga empotrada-apoyada

Se puede demostrar que los modos de vibración son ortogonales, es decir:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0 \quad (22.20)$$

para  $n \neq m$ . Como en capítulos anteriores esta condición de ortogonalidad junto con las condiciones iniciales, se usan para calcular las constantes  $A_n$  y  $B_n$ . La solución final para el desplazamiento viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{sen } \omega_n t + B_n \text{cos } \omega_n t) X_n(x) \quad (22.21)$$

En la Tabla 22.1 se resumen las frecuencias naturales y modos de vibración para una viga con distintas condiciones de borde. Los coeficientes  $\sigma_n$  fueron determinados a partir de las ecuaciones dadas en la tabla 22.2.

El modelo utilizado en esta sección se conoce como la viga de *Euler-Bernoulli*. Para la formulación de este modelo que asumió que la viga es:

- Uniforme a su largo.
- Compuesta de un material lineal, isotropico y elástico sin cargas axiales.
- Tal que las secciones planas se mantienen planas.
- Tal que el plano de simetría de la viga es también el plano de vibración, de manera que la rotación y traslación están desacopladas.
- Tal que la inercia rotacional y la deformación por corte se pueden despreciar.

Configuración	$\beta l$	Modos de vibración	$\sigma_n$				
 <p>Libre - libre</p>	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$ 0 ( cuerpo rígido) 4,73004074 7,85320462 10,9956078 14,1371655 17,2787597 $\frac{(2n + 1)\pi}{2}, n > 5$	$\cosh \beta_n x + \cos \beta_n x$ $-\sigma_n(\sinh \beta_n x + \sen \beta_n x)$	0,9825 1,0008 0,9999 1,0000 0,9999 1, $n > 5$				
	 <p>Empotrado - libre</p>	$\cos \beta l \cosh \beta l = -1$ 1,87510407 4,69409113 7,85475744 10,99554073 14,13716839 $\frac{(2n - 1)\pi}{2}, n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n(\sinh \beta_n x - \sen \beta_n x)$	0,7341 1,0185 0,9992 1,0000 1,0000 1, $n > 5$			
		 <p>Empotrado - apoyado</p>	$\tan \beta l = \tanh \beta l$ 3,92660231 7,06858275 10,21017612 13,35176878 16,49336143 $\frac{(4n + 1)\pi}{4}, n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n(\sinh \beta_n x - \sen \beta_n x)$	1,0008 1, $n > 1$		
			 <p>Empotrado - deslizante</p>	$\tan \beta l + \tanh \beta l = 0$ 2,36502037 5,49780392 8,63937983 11,78097245 14,92256510 $\frac{(4n - 1)\pi}{4}, n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n(\sinh \beta_n x - \sen \beta_n x)$	0,9825 1, $n > 1$	
				 <p>Empotrado - empotrado</p>	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$ 4,73004074 7,85320462 10,9956079 14,1371655 17,2787597 $\frac{(2n + 1)\pi}{2}, n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n(\sinh \beta_n x - \sen \beta_n x)$	0,982502 1,00078 1,999966 1,00000 1,00000 1, $n > 5$
					 <p>Apoyado - apoyado</p>	$\frac{\sen \beta l = 0}{n\pi}$	$\sen \frac{n\pi x}{l}$

Tabla 22.1: Distintas configuraciones para una viga con vibración transversal ilustrando sus modos y frecuencias características. La frecuencia natural viene dada por  $\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{EI/\rho A}$

Condición de borde	Formula para $\sigma_n$
Libre-libre	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$
Empotrado-libre	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l}$
Empotrado-apoyado	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$
Empotrado-deslizante	$\sigma_n = \frac{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}$
Empotrado-Empotrado	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$

Tabla 22.2: Ecuaciones para los coeficientes  $\sigma_n$  usados en la tabla 19.1

## Capítulo 23

# Modelos de amortiguamiento

Los modelos presentados en los capítulos anteriores no toman en cuenta la disipación de energía. El amortiguamiento se puede introducir de dos formas; como amortiguamiento modal o con un modelo físico del amortiguamiento.

Una forma sencilla de añadir el amortiguamiento, es incluirlo en la ecuación temporal luego de separar las variables. Consideremos la forma general de la ecuación temporal:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.1)$$

Donde  $\omega_n$  es la  $n$ -ésima frecuencia natural. El amortiguamiento modal se puede añadir en la ecuación anterior al incluir el siguiente termino:

$$2\zeta_n \omega_n \dot{T}_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.2)$$

donde  $\zeta_n$  es la  $n$ -ésima razón de amortiguamiento modal. Las razones de amortiguamiento,  $\zeta_n$ , se eligen basado en la experiencia o en mediciones experimentales. Tienen valores entre 0 y 1, el caso más usual es tener valores de  $\zeta_n \leq 0,05$ .

Una vez que las razones de amortiguamiento modal son asignadas, se añade el termino de amortiguamiento modal en la ecuación temporal:

$$\ddot{T}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.3)$$

La solución para el caso de amortiguamiento débil viene dada por:

$$T_n(t) = A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \text{sen}(\omega_{dn} t + \phi_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.4)$$

donde  $\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$ . Las constantes  $A_n$  y  $\phi_n$  viene dadas por las condiciones iniciales, se determinan siguiendo la misma metodología vista en el capítulo 20.

El amortiguamiento también se puede modelar como amortiguadores discretos. De hecho, en muchos casos se disipa más energía con amortiguadores discretos que con el amortiguamiento interno del material. Por ejemplo, consideremos la vibración longitudinal de una barra con sistemas resorte-amortiguador en sus extremos, como se muestra en la Figura 23.1.

En este caso, el amortiguador se añade como una fuerza externa que se opone al movimiento,

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{23.5}$$

Donde la fuerza  $f(x,t)$  viene dada por:

$$f(x,t) = \delta(x)c \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} - \delta(x-L)c \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \tag{23.6}$$

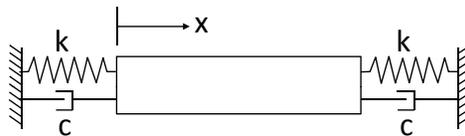


Figura 23.1: Barra en vibración longitudinal sujeta por un sistema resorte-amortiguador en ambos extremos

# Capítulo 24

## Respuesta forzada

La respuesta forzada de un sistema continuo se puede determinar usando las condiciones de ortogonalidad de los modos de vibración. De esta manera se desacoplan las ecuaciones de movimiento. Este procedimiento se ilustra mejor con un ejemplo.

### Ejemplo

Consideremos una barra empotrada en un extremo y con una fuerza de excitación sinusoidal en el otro extremo. Como se ilustra en la Figura 24.1. La ecuación de movimiento de una barra con fuerzas externas viene dada por:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (24.1)$$

En este caso  $f(x, t) = 0$  para  $x \neq l$  y  $f(x, l) = F_0 \text{sen } \omega t$ . Esta función se puede escribir como  $f(x, t) = \delta(x - l) F_0 \text{sen } \omega t$  donde  $\delta(x - l)$  es la función de Dirac indicando que la fuerza se aplica en  $x = l$ . Los modos de vibración para una barra empotrada-libre viene dados por:

$$X_n(x) = a_n \text{sen} \left( \frac{(2n - 1)\pi x}{2l} \right) \quad (24.2)$$

Asumiendo una solución de la forma  $w_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ . Reemplazando en la ecuación 24.1:

$$\rho A X_n(x) \ddot{T}(t) - EA T(t) X_n''(x) = \delta(x - l) F_0 \text{sen } \omega t \quad (24.3)$$



Figura 24.1: Barra empotrada con fuerza de excitación sinusoidal

Reemplazando el valor de  $X_n(x)$ :

$$\left[ \rho A \ddot{T}(t) + EA \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 T(t) \right] \text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) = \delta(x-l) F_0 \text{sen } \omega t \quad (24.4)$$

donde el coeficiente  $a_n$  se ha definido arbitrariamente igual a 1. Multiplicando por  $\text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right)$  e integrando:

$$\begin{aligned} \left[ \rho A \ddot{T}(t) + EA \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)^2 T(t) \right] \frac{l}{2} &= \int_0^l \delta(x-l) F_0 \text{sen } \omega t \text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx \\ &= F_0 \text{sen } \omega t \text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (24.5)$$

La ecuación 24.5 se puede escribir de la forma:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \hat{F}_n \text{sen } \omega t, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24.6)$$

donde,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right) \quad (24.7)$$

$$\hat{F}_n = \frac{2}{l\rho A} F_0 \text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \quad (24.8)$$

Cuya solución es de la forma:

$$T_n(t) = A_n \text{sen } \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + \frac{\hat{F}_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \text{sen } \omega t \quad (24.9)$$

La solución final viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \text{sen } \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + \frac{\hat{F}_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \text{sen } \omega t \right] \text{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right)$$

$$(24.10)$$

Las constantes  $A_n$  y  $B_n$  se obtienen como en casos anteriores a partir de las condiciones iniciales usando las propiedades de ortogonalidad de los modos.

Consideremos el desplazamiento inicial:

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) \quad (24.11)$$

multiplicando por  $\operatorname{sen} \left( \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \right)$  e integrando:

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx \quad (24.12)$$

Reemplazando ahora la velocidad inicial:

$$\dot{w}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \omega_n + \frac{\hat{F}_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) \quad (24.13)$$

multiplicando por  $\operatorname{sen} \left( \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \right)$  e integrando:

$$A_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \dot{w}_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx - \frac{\hat{F}_n \omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (24.14)$$

En resumen la solución viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \operatorname{sen} \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + \frac{\hat{F}_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t \right] \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right)$$

donde,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right)$$

$$\hat{F}_n = \frac{2}{l\rho A} F_0 \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right)$$

$$A_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \dot{w}_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx - \frac{\hat{F}_n \omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) dx$$

**Parte V**

**Elementos Finitos**

---

El método de elementos finitos es una técnica que utiliza métodos de interpolación para modelar y resolver problemas como los descritos en el capítulo anterior, asociados a problemas vibracionales en sistemas continuos (por ejemplo, barras, vigas, placas, etc). Este método es también, muy útil para modelar sistemas complejos con formas geométricas inusuales.

El método de elementos finitos comienza por dividir una estructura en un número de partes pequeñas. Estas partes pequeñas se denominan *elementos finitos* y el procedimiento de dividir la estructura se denomina *discretización*. Cada elemento es, usualmente, muy simple como una barra, viga o placa, el que tiene una ecuación de movimiento que se puede resolver o aproximar. Cada elemento tiene puntos terminales denominados *nodos*, los que lo conectan con el elemento siguiente. El conjunto de elementos finitos y nodos se denomina malla de elementos finitos.

Se debe definir la ecuación de movimiento para cada elemento finito. Las soluciones de las ecuaciones de movimiento se aproximan por combinaciones lineales de polinomios de bajo orden. Cada una de las soluciones individuales debe ser la misma que las soluciones de los elementos adyacentes en los nodos comunes (lo que se denomina como condición de continuidad). Estas soluciones se acoplan en un procedimiento de ensamblado, lo que resulta en matrices de rigidez y masa globales, las que describen la vibración de la estructura como un todo. Este modelo de masa y rigidez global representa una aproximación de la estructura que se puede analizar y resolver usando los métodos vistos en la parte II. El vector  $x(t)$  de desplazamientos asociados con la solución del modelo en elementos finitos, corresponde al movimiento de los nodos de la malla.

# Capítulo 25

## Elemento de barra

La vibración longitudinal de una barra nos entrega un ejemplo sencillo de como se construye un modelo en elementos finitos. Consideremos el caso de una barra empotrada, en la Figura 25.1 se ilustra esta barra con dos mallas distintas. Tomando el primer caso de un solo elemento en la Figura 25.1(a). El desplazamiento estático (independiente del tiempo) de esta barra debe satisfacer la ecuación:

$$EA \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0 \tag{25.1}$$

para cada valor de  $x$  en el intervalo  $[0, l]$ .

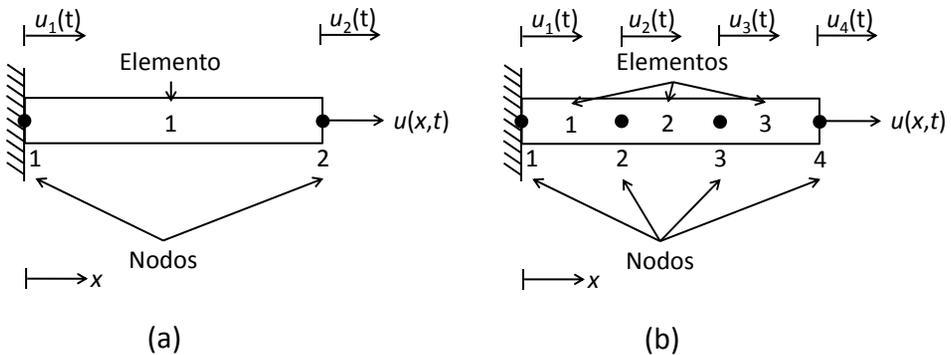


Figura 25.1: Dos mallas distintas para la misma viga empotrada de largo  $l$  en vibración longitudinal. (a) malla de un elemento y dos nodos, (b) malla de tres elementos y cuatro nodos

La ecuación 25.1 se puede integrar directamente, de donde se obtiene:

$$u(x) = c_1 x + c_2 \quad (25.2)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración con respecto a  $x$ . Por lo tanto, aunque  $c_1$  y  $c_2$  se denominan constantes, podrían ser función de otra variable como  $t$ .

La ecuación 25.2 para el desplazamiento estático se puede determinar directamente porque la estructura a modelar es muy simple. Para estructuras mas complicadas, la forma funcional de  $u(x)$  se debe suponer, usualmente como un polinomio de bajo orden. El método de elementos finitos utiliza dos aproximaciones, la primera es definir la discretización del modelo (i.e., que malla y tamaño de malla, donde poner los elementos y nodos, etc.). La segunda corresponde a la elección de los polinomios a utilizar en la ecuación 25.2.

En cada nodo, el valor de  $u$  se permite que dependa del tiempo, por eso el uso de etiquetas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  en la Figura 25.1(a). Las funciones dependientes del tiempo  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  se denominan desplazamientos *nodales*. La función espacial  $u(x)$  y los desplazamientos nodales  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  se relacionan por las condiciones de borde en los nodos:

$$\begin{aligned} u(0) = u_1(t) &= c_2 \\ u(l) = u_2(t) &= c_1 l + c_2 \end{aligned}$$

de manera que  $c_1 = [u_2(t) - u_1(t)]/l$  y  $c_2 = u_1(t)$ . Reemplazando  $c_1$  y  $c_2$  en la ecuación 25.2, se obtiene una aproximación para  $u(x, t)$ , dada por:

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1(t) + \frac{x}{l} u_2(t) \quad (25.3)$$

Si  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  fueran conocidas, entonces la ecuación 25.3 nos entregaría una solución aproximada para los desplazamientos de la barra. Los coeficientes  $(1 - x/l)$  y  $(x/l)$  se denominan *funciones de forma*.

Para determinar la ecuación de movimiento, consideremos la energía asociada. La energía de deformación (potencial) de la barra viene dada por la siguiente integral:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (25.4)$$

reemplazando la solución aproximada para  $u(x, t)$  dada en la ecuación 25.3:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{EA}{l^2} [-u_1(t) + u_2(t)]^2 dx = \frac{EA}{2l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) \quad (25.5)$$

La última expresión se puede escribir como  $V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u}$ , con:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (25.6)$$

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25.7)$$

$K$  define la matriz de rigidez asociada al elemento individual.

Por otro lado, la energía cinética del elemento viene dada por la integral:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l A\rho \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (25.8)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la barra. Utilizando la aproximación 25.3, se tiene que:

$$\dot{u}(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dot{u}_1(t) + \frac{x}{l} \dot{u}_2(t) \quad (25.9)$$

asumiendo una densidad constante ( $\rho(x) = \rho$ ) y reemplazando 25.9 en la ecuación 25.8, se obtiene:

$$T(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{3} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) \quad (25.10)$$

esta expresión se puede factorizar de la forma  $T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T M \dot{\mathbf{u}}$ , con:

$$M = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (25.11)$$

la matriz  $M$  se define como la matriz de masa del elemento de barra individual.

La ecuación de movimiento se puede determinar utilizando el método de Lagrange. En este método las ecuaciones de movimiento vienen dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial V}{\partial u_i} = f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25.12)$$

donde  $u_i$  es la  $i$ -ésima coordenada del sistema y  $f_i(t)$  es la fuerza externa aplicada en la coordenada  $i$ .

Examinando las condiciones de borde en la Figura 25.1(a) se ve que el desplazamiento en el lado empotrado es igual a zero  $u_1(t) = 0$ . Por lo tanto, la energía cinética total es:

$$T(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho Al}{3} \dot{u}_2^2 \quad (25.13)$$

y la energía potencial total:

$$V(t) = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} u_2^2 \quad (25.14)$$

Reemplazando estas dos expresiones en la ecuación de Lagrange:

$$\frac{\rho Al}{3} \ddot{u}_2 + \frac{EA}{l} u_2 = 0 \quad (25.15)$$

simplificando:

$$\ddot{u}_2 + \frac{3E}{\rho l^2} u_2 = 0 \quad (25.16)$$

la que constituye un modelo simple en elementos finitos de una barra empotrada utilizando un solo elemento.

La solución de la ecuación 25.16 dadas las condiciones iniciales viene dada por:

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 u_2(0)^2 + \dot{u}_2(0)^2}}{\omega_n} \operatorname{sen} \left( \omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n u_2(0)}{\dot{u}_2(0)} \right) \quad (25.17)$$

donde  $u_2(0)$  y  $\dot{u}_2(0)$  son el desplazamiento y velocidad inicial. La frecuencia natural  $\omega_n$  viene dada:

$$\omega_n = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \quad (25.18)$$

### Respuesta libre de un sistema de un grado de libertad

La solución de la ecuación  $\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$  sujeta a  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$  es:

$$x(t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \operatorname{sen} \left( \omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0} \right)$$

La solución 25.17 se puede combinar con la ecuación 25.9 para determinar la solución aproximada para la respuesta transiente del desplazamiento de la barra. El desplazamiento de la barra viene dado por:

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 u_2(0)^2 + \dot{u}_2(0)^2}}{\omega_n} \frac{x}{l} \operatorname{sen} \left( \omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n u_2(0)}{\dot{u}_2(0)} \right) \quad (25.19)$$

Esto describe una vibración de frecuencia  $1/l\sqrt{3E/\rho}$ , en contraste con la solución exacta dada en el capítulo 20, la que describe la vibración a un número infinito de frecuencias.

## 25.1. Barra de tres elementos

Si se quiere aumentar la precisión del método en elementos finitos, es necesario aumentar el número de divisiones en el modelo. Consideremos ahora aumentar el tamaño del modelo a 3 elementos y 4 nodos como se ilustra en la Figura 25.1(b). Cada elemento de la barra tiene la misma energía potencial dada por la ecuación 25.5, con dos diferencias. La primera es que el largo del elemento es ahora  $l/3$  en vez de  $l$  y la segunda es que las coordenadas de los nodos son distintas para cada uno de los elementos. Tomando en cuenta estas consideraciones y utilizando notación matricial, la energía potencial de los tres elementos viene dada por:

$$V_1(t) = \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (25.20)$$

$$V_2(t) = \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (25.21)$$

$$V_3(t) = \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (25.22)$$

La energía potencial total es la suma:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \\ &= \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (25.23) \end{aligned}$$

Lo que se puede expresar de la forma  $V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u}$ , donde  $\mathbf{u} = [u_2 \ u_3 \ u_4]^T$  es el vector de coordenadas activas. La derivada de  $V(t)$  con respecto a  $\mathbf{u}$  es:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (25.24)$$

De manera similar, la energía cinética viene dada por:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\rho Al}{36} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25.25)$$

Lo que se puede escribir como

$$T(t) = \frac{\rho Al}{36} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} \quad (25.26)$$

Esto se puede expresar de la forma  $T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T M \dot{\mathbf{u}}$ . El primer termino en la expresión de Lagrange viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\rho Al}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{bmatrix} \quad (25.27)$$

Reemplazando 25.24 y 25.27 en la ecuación de Lagrange, se obtiene la siguiente ecuación:

$$M \ddot{\mathbf{u}}(t) + K \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (25.28)$$

con,

$$M = \frac{\rho Al}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (25.29)$$

$$K = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25.30)$$

Las matrices  $M$  y  $K$  son las matrices globales de masa y rigidez que definen el modelo dinámico de la barra.

# Capítulo 26

## Elemento de Viga

Consideremos un elemento de viga como el de la Figura 26.1. Este elemento contiene dos nodos y cuatro coordenadas. Las coordenadas corresponden a dos desplazamientos verticales  $u_1$  y  $u_3$  y dos rotaciones  $u_2$  y  $u_4$ . Es decir, cada nodo se modela con dos grados de libertad.

La ecuación de movimiento estacionaria debe satisfacer:

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0 \tag{26.1}$$

integrando se obtiene:

$$u(x, t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \tag{26.2}$$

donde  $c_i(t)$  son constantes de integración con respecto a la variable espacial  $x$ . La ecuación 26.2 se utiliza para aproximar el desplazamiento transversal dentro del elemento.

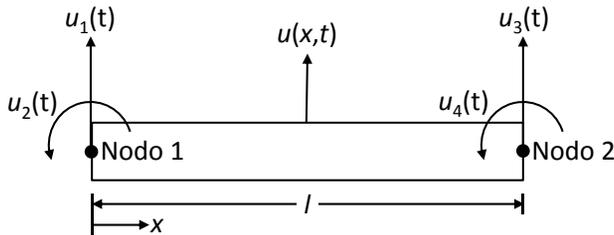


Figura 26.1: Elemento de viga simple

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, los desplazamientos desconocidos  $u_i(t)$  deben satisfacer las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_1(t) & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= u_2(t) \\ u(l, t) &= u_3(t) & \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= u_4(t) \end{aligned} \quad (26.3)$$

A partir de estas relaciones en conjunto con la ecuación 26.2 se pueden despejar las constantes de integración, obteniendo:

$$c_1(t) = \frac{1}{l^3} [2(u_1 - u_3) + l(u_2 - u_4)] \quad (26.4)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{l^2} [3(u_3 - u_1) - l(2u_2 + u_4)] \quad (26.5)$$

$$c_3(t) = u_2(t) \quad (26.6)$$

$$c_4(t) = u_1(t) \quad (26.7)$$

Reemplazando los coeficientes en la ecuación 26.2 y reordenando, se obtiene una aproximación para el desplazamiento  $u(x, t)$  en función de los desplazamientos nodales:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[ 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right] u_1(t) + l \left[ \frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] u_2(t) \\ &+ \left[ 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \right] u_3(t) + l \left[ -\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] u_4(t) \end{aligned} \quad (26.8)$$

como antes los coeficientes junto a cada  $u_1(t)$  definen las funciones de forma del elemento de viga.

Las matrices de masa y rigidez se pueden calcular siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la barra. La energía cinética del elemento viene dada por:

$$T(t) = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (26.9)$$

la que se puede escribir de la forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T M \dot{\mathbf{u}} \quad (26.10)$$

donde  $M$  es la matriz de masa. El vector  $\dot{\mathbf{u}}$  es la derivada temporal del vector de coordenadas  $\mathbf{u}(t) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]$ . Luego de integrar y factorizando la matriz de

masa para el elemento de viga es:

$$M = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (26.11)$$

Por otro lado, la energía potencial de la viga se puede calcular como:

$$V(t) = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (26.12)$$

El resultado se puede factorizar en la forma:

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T K \dot{\mathbf{u}} \quad (26.13)$$

De donde se obtiene la matriz de rigidez:

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (26.14)$$

Las matrices  $K$  y  $M$  definen el elemento finito de una viga en vibración transversal.

## Capítulo 27

# Matriz de masas concentradas

En los capítulos anteriores la matriz de masa de un elemento se construyó usando las funciones de forma derivadas de los desplazamientos estáticos junto con la definición de energía cinética. Las matrices construidas de esta forma se denominan *matrices de masa consistentes*, porque son derivadas a partir de un set de funciones de forma consistentes con el cálculo de la matriz de rigidez.

Una forma alternativa para aproximar la matriz de masa, es la matriz de masas concentradas. La derivación de esta matriz supone una distribución uniforme de masas concentradas sobre los nodos del modelo en elementos finitos. Las masas concentradas se dividen de forma proporcional al tamaño y número de elementos del modelo. Tales matrices se denominan *matrices de masa inconsistentes*.

El método de masas concentradas tiene la ventaja que se puede determinar de forma sencilla y produce estimaciones más bajas de las frecuencias. Las matrices con parámetros concentrados son matrices diagonales, lo que simplifica los cálculos. A pesar de estas ventajas, las matrices concentradas tienen varias desventajas. Primero, pueden causar errores debido a la pérdida de precisión. Segundo, si el elemento bajo consideración posee una coordenada rotacional, esta coordenada no tendría masa asignada y la matriz resultante se vuelve singular (no tiene inversa). Esos sistemas requieren de métodos especiales para su solución.

La matriz de masas concentradas se obtiene al ubicar en cada nodo masas concentradas con valores acordes a la proporción adecuada de la masa total del sistema. Por ejemplo, consideremos el elemento de barra del capítulo 25. La masa total del elemento de largo  $l$  es  $\rho Al$ . Ubicando una mitad en cada nodo, se obtiene:

$$M = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27.1)$$

Esta es la matriz de masas concentradas del elemento de barra.

Consideremos ahora el elemento de viga del capítulo 26. La masa de un elemento de largo  $l$  es  $\rho Al$ . Si la masa se divide entre la dos coordenadas transversales ( $u_1$  y  $u_3$ ), la matriz de masas es:

$$M = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27.2)$$

Dado que las coordenadas rotaciones ( $u_2$  y  $u_4$ ) no tiene masa asignada, la matriz diagonal tiene dos ceros en su diagonal y por lo tanto es singular. La singularidad de la matriz de masa puede causar muchas dificultades en el calculo e interpretación de los valores propios y por lo tanto de las frecuencias naturales. La naturaleza singular de la matriz de masa de la viga se puede resolver al asignar inercias asociadas a las coordenadas rotacionales  $u_2$  y  $u_4$ . Esto se hace al calcular la inercia de la mitad del elemento de viga en cada extremo. En una viga uniforme esto es:

$$I = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho Al}{2} \right) \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{\rho Al^3}{24} \quad (27.3)$$

asumiendo esta inercia en  $u_2$  y  $u_4$ , la matriz de masas concentradas para un elemento de viga viene dada por:

$$M = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{12} \end{bmatrix} \quad (27.4)$$

Esta matriz diagonal de masas concentradas no es singular y cuando se combina con la matriz de rigidez del elemento de viga, se pueden determinar de forma sencilla las frecuencias naturales.

# Capítulo 28

## Coordenadas locales - globales y ensamble

Consideremos la estructura de barras de la Figura 28.1. Notar que el sistema de coordenadas para cada uno de los dos elementos ( $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$ ) está dirigido en direcciones distintas. Cada barra vibra solo en su dirección longitudinal, mientras que el sistema de barras vibra en ambas direcciones  $X$  e  $Y$ . Para resolver esto, se definen los desplazamientos de cada barra en el *sistema global de coordenadas*  $X - Y$ . Estas coordenadas se denotan con la letra  $U_i$  y se denominan desplazamientos nodales globales.

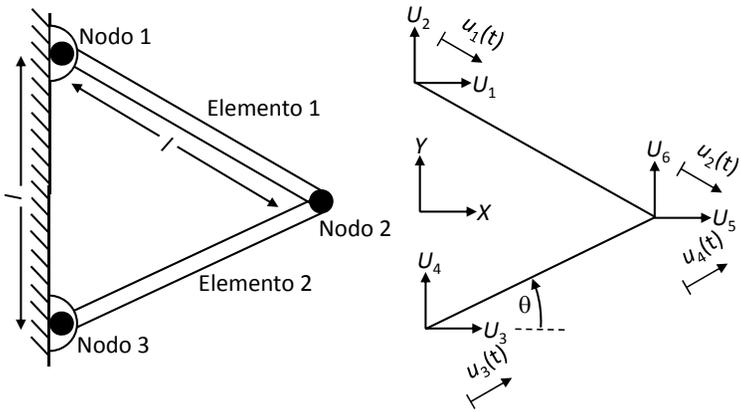


Figura 28.1: Estructura de dos barras montadas a una pared por una conexión articulada

La configuración geométrica de la estructura se puede utilizar para establecer la relación entre los desplazamientos nodales locales  $u_i$  y los desplazamientos nodales globales  $U_i$ . A partir de la Figura 28.1  $u_3$  y  $u_4$  se pueden relacionar con  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  y  $U_6$  al examinar la proyección de las coordenadas globales en la dirección de las coordenadas locales. Esto lleva a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u_3 &= U_3 \cos \theta + U_4 \sin \theta \\ u_4 &= U_5 \cos \theta + U_6 \sin \theta \end{aligned} \quad (28.1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el sistema de coordenadas global,  $X - Y$ , y el sistema de coordenadas local que esta alineado con cada barra. La ecuación 28.1 se puede escribir de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad (28.2)$$

o de manera simbólica como:

$$\mathbf{u}_2 = \Gamma \mathbf{U}_2 \quad (28.3)$$

donde  $\Gamma$  denota la matriz de transformación de coordenadas y  $\mathbf{U}_2$  es la del vector global de coordenadas que contiene a las coordenadas del segundo elemento ( $\mathbf{U}_2 = [U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]^T$ ). El vector  $\mathbf{u}_2$  contiene las coordenadas locales del segundo elemento ( $\mathbf{u}_2 = [u_3 \ u_4]^T$ ).

La energía cinética y potencial del elemento 2 en la Figura 28.1 se puede escribir de dos formas, las que deben ser equivalentes. Esto es, la energía escrito en términos de uno u otro sistema de coordenadas. Igualando la energía potencial en coordenadas locales con la escrita en coordenadas globales, se tiene que:

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K_e \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \Gamma^T K_e \Gamma \mathbf{U} \quad (28.4)$$

donde  $K_e$  es la matriz de rigidez del elemento en el sistema de coordenadas locales. Por lo tanto, la matriz de rigidez en el sistema global de coordenadas es:

$$K_{(2)} = \Gamma^T K_e \Gamma \quad (28.5)$$

Para el ejemplo de la Figura 28.1 la matriz de rigidez en el sistema global de coordenadas es:

$$K_{(2)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (28.6)$$

La matriz de un elemento de barra  $K_e$  se obtuvo de la ecuación 25.7. Realizando los productos indicados:

$$K_{(2)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28.7)$$

la que es una matriz de  $4 \times 4$  correspondiente a las coordenadas globales  $\mathbf{U}_2$ . Siguiendo el mismo procedimiento para el otro miembro de la estructura, la matriz global del elemento 1 es:

$$K_{(1)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28.8)$$

que corresponde al vector global  $\mathbf{U}_1 = [U_1 \ U_2 \ U_5 \ U_6]$ .

Para combinar las matrices de ambos elementos en el sistema global ( $K_{(1)}$  y  $K_{(2)}$ ) en una matriz global del sistema de coordenadas completo  $\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]$ ,  $K_{(1)}$  se expande a,

$$K'_{(1)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & 0 & 0 & -\cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta & 0 & 0 & \text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta & 0 & 0 & -\text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28.9)$$

se han añadido ceros en la posición de las coordenadas faltantes  $U_3$  y  $U_4$ . De forma similar se expande la matriz  $K_{(2)}$ , para que sea compatible con el tamaño del vector de coordenadas completo  $\mathbf{U}$ .

$$K'_{(2)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\cos^2 \theta & -\text{sen } \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta \cos \theta & -\text{sen}^2 \theta & \text{sen } \theta \cos \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28.10)$$

Los términos  $K'_{(1)}$  y  $K'_{(2)}$  se suman para formar la matriz de rigidez de la estructura en el sistema de coordenadas globales:

$$K = K'_{(1)} + K'_{(2)} \quad (28.11)$$

Por ejemplo, la matriz de rigidez de la estructura para el caso  $\theta = 30^\circ$  es:

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0,75 & -0,433 & 0 & 0 & -0,75 & 0,433 \\ -0,433 & 0,25 & 0 & 0 & 0,433 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,433 & -0,75 & -0,433 \\ 0 & 0 & 0,433 & 0,25 & -0,433 & -0,25 \\ -0,75 & 0,433 & -0,75 & -0,433 & 1,5 & 0 \\ 0,433 & -0,25 & -0,433 & -0,25 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Notar que la rigidez efectiva correspondiente a las coordenadas  $U_5$  y  $U_6$  es mayor. Esto corresponde al punto donde se juntan ambas barras en un nodo común. Antes que la matriz anterior se pueda usar en análisis de vibraciones, se deben aplicar las condiciones de borde. Examinando la Figura 28.1 es claro que en las uniones articuladas a la pared los desplazamientos son nulos, es decir,  $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$ . Por lo tanto, después de aplicar las condiciones de borde, la matriz de rigidez global se reduce a:

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

la que se obtiene al eliminar las filas y columnas de las coordenadas fijas.

Se sigue el mismo procedimiento para determinar la matriz de masa global consistente. Primero las matrices de masa de cada elemento en el sistema de coordenadas global vienen dadas por:

$$M_{(i)} = \Gamma^T M_i \Gamma \quad (28.12)$$

Cada una de estas matrices,  $M_{(1)}$  y  $M_{(2)}$  en el caso de la Figura 28.1, es expandida para añadir ceros en las coordenadas faltantes, tal como se realizó para las matrices de rigidez 28.9 y 28.10. Las matrices expandidas se suman, para dar como resultado una matriz global de  $6 \times 6$ . Esta matriz de  $6 \times 6$  se reduce al aplicar las condiciones de borde, para dar como resultado la siguiente matriz de masa de  $2 \times 2$ :

$$M = \frac{4\rho Al}{6} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (28.13)$$

La ecuación de movimiento de la estructura utilizando elementos finitos se puede expresar entonces como:

$$\frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_5 \\ \ddot{U}_6 \end{bmatrix} + \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28.14)$$

Las frecuencias naturales vienen dadas por:

$$\omega_1 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \quad (28.15)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \quad (28.16)$$

Los resultados de este modelo se pueden mejorar al agregar un mayor número de divisiones a cada barra.

# Bibliografía

- [1] Singiresu S Rao and Rodolfo Navarro Salas. *Vibraciones mecánicas*. Pearson Educación, 2012.
- [2] D.J. Inman. *Engineering vibrations*. Prentice Hall, third edition, 2008.
- [3] Leonard Meirovitch. *Fundamental of Vibrations*. Waveland Press, Inc., 2010.
- [4] Stephen Timoshenko. *Vibration Problems in Engineering*. Oxford City Press, second edition, 2011.
- [5] S.G. Kelly. *Schaum's outline of theory and problems of mechanical vibrations*. Schaum's Outline Series, 1996.